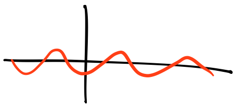
Analysis Übungsstunde 6

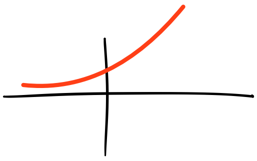
gtuerler@student.ethz.ch

24.10.24

Fourier Integral



Periodische Funktionen $\longrightarrow$ Fourier-Reihe



Nicht-Periodische Funktionen $\rightarrow$ Fourier-Integral

Form:

$$f(x) = \int_0^\infty \left(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x) \right) d\omega$$

$$A(\omega) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(\omega v)\,dv$$

$$B(\omega) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(\omega v)\,dv$$

Bedingungen

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$
- Dirichlet-Theorem (→ Woche 4)
- f ist stückweise stetig in jedem endlichen Intervall mit Links- & Rechtsableitungen in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$

Wichtige Vereinfachungen

• $f(x)$ gerade	• $f(x)$ ungerade
$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos(\omega v)\,dv$ $B(\omega) = 0$	$A(\omega) = 0$ $B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin(\omega v)\,dv$

Fourier Transformation

$$\mathcal{F}(f(t)) = \hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

können auch x sein

t ist ersetzbar: bsp $t^* = 4a + \frac{t^2}{2}$ oder auch mit x!

$$\mathcal{F}^{-1}(g(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \cdot e^{+i\omega t}\, d\omega$$

- $f(x) \underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftarrows}} \mathcal{F}(f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega)$
- $\mathcal{F}^{-1} \cdot \mathcal{F} = \mathbb{I}$
- $\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f(t))\right) = f(t)$

! Falls $\omega = 0$ nicht def: → $\hat{f}(0)$ separat berechnen (siehe bsp)

Eigenschaften (ZF)

- Linearität $\quad \mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$
- Convolution $\quad \mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$
- Ableitungen im Zeitbereich
  $$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega \mathcal{F}(f(t))$$
  $$\mathcal{F}\left(\frac{df^2}{dt^2}\right) = -\omega^2 \mathcal{F}(f(t))$$
  $\vdots$

  pro weitere Ableitung je Mal $i\omega$ dazu
- Ableitungen im Frequenzbereich $\quad \frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} = -i\mathcal{F}(t \cdot f(t))$ → Allg: $\mathcal{F}(x^k f) = i^k \frac{d^k \hat{f}(\omega)}{d\omega^k}$
- shifts
  $$\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{-ia\omega} \cdot \mathcal{F}(f(t))$$
  $$\mathcal{F}(\omega - b) = \mathcal{F}(e^{ib\omega} f(t))$$

Wichtige Integrale, nicht auf ZF

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cdot e^{-ikx}\, dx = e^{\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ak^2+bk+c)}\, dk = e^{\frac{b^2}{4a} - c} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

	Fourier Transformation	Laplace Transformation
Form	$\overset{\hat{=}\hat{f}(\omega)}{F(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$	$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
Transformierte Variable	ω : reelle Kreisfrequenz ↑ nur Frequenzanteile	$s := \sigma + j\omega$ komplexe Frequenz ↑ berücksichtigt auch Dämpfung: $Re(s) = \sigma$
Periodizität	kann periodisch sein	Funktion ist kausal (startet zu einem Punkt)
Anwendung	Periodische oder unbegrenzte Signale Frequenz Analyse	Transiente Signale mit Anfangswerten Stability Analysis (CS1)

Kurzes Bsp zu cplx Fourier Reihen

Achte auf ob c_0 separat berechnet werden muss.

2. Fourier Series (*10 Points*)

Consider the function $f(x) = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$.

a) (*2 Points*) Show that it is periodic of period 2π.

b) (*6 Points*) Compute its Fourier series. → even: $b_n = 0$

$a_0 = \int \dots \quad a_n = \int \dots$

c) (*2 Points*) Use the previous result to find the following numerical series:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = ?$$

b) $$\underline{f(x)} = \underbrace{\frac{2}{\pi}}_{a_0} - \underbrace{\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}}_{a_n} \cos(nx)$$

c) für form muss $\cos(nx) = 1 \rightarrow x = 0 \qquad \cos(0) = 1$

$$0 = \sin\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{4n^2-1} \cdot (1)$$

$$\sum \frac{1}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Bsp Winter 2016

5. Sei f eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$$

a) Finden Sie die Fouriertransformierte von $f(x)$.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\cancel{\int_{-\infty}^{-1} 0} + \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, e^{-i\omega x}\, dx + \cancel{\int_{1}^{\infty} 0} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\, dx - \int_{-1}^{1} x^2 e^{-i\omega x}\, dx \right)$$

$\int x \cdot e^{ax} dx = (\frac{ax-1}{a^2}) \cdot e^{ax} + C$

$\int x^2 \cdot e^{ax} dx = (\frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}) \cdot e^{ax} + C$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x} - \left(\frac{\overset{-\omega^2}{(-i\omega)^2} x^2 + 2i\omega x + 2}{\underbrace{(-i\omega)^3}_{i\omega^3}} \right) e^{-i\omega x} \right]_{-1}^{1}$$

$$e^{i\omega}\left(\frac{-1}{i\omega} + \frac{2}{\omega^2} + \frac{2}{i\omega^3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega} - \frac{-1}{i\omega} e^{i\omega} - \left[\left(\frac{-\omega^2 - 2i\omega + 2}{i\omega^3} \right) e^{-i\omega} - \left(\frac{-\omega^2 + 2i\omega + 2}{i\omega^3} \right) e^{i\omega} \right] \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\cancel{\frac{1}{i\omega} (e^{i\omega} - e^{-i\omega})} - \cancel{\frac{1}{i\omega} (e^{i\omega} - e^{-i\omega})} - \frac{2 \cdot 2}{\omega^2} \underbrace{\frac{1}{2} (e^{i\omega} + e^{-i\omega})}_{\cos(\omega)} + \frac{2 \cdot 2i}{i\omega^3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2i} (e^{i\omega} - e^{-i\omega})}_{\sin(\omega)} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{4}{\omega^2} \cdot \cos(\omega) + \frac{4}{\omega^3} \sin(\omega) \right)$$

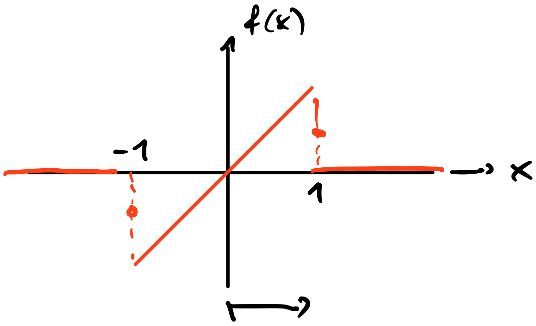
$$= -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\omega\cos(\omega) - \sin(\omega)}{\omega^3} \right) \quad \forall \omega \text{ ausser wenn } \omega = 0$$

$$\rightarrow \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1-x^2) \cdot \overset{e^{0} \leftarrow \omega=0}{1}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \dots = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\omega\cos(\omega) - \sin(\omega)}{\omega^3} \right) & \omega \neq 0 \\ \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \omega = 0 \end{cases}$$

Bsp. Fourier Integral

$$f(x) = \begin{cases} x & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



$\Rightarrow f(x)$ ungerade $\rightarrow A(\omega) = 0$

$$\Rightarrow B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\underbrace{v}_{=x})\sin(\omega v)\,dv = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\sin(\omega x)}_{v'} + \cancel{\int_1^\infty 0}$$

$\int uv' = uv - \int u'v$

$u \quad v \qquad u' \quad v \qquad \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)\right]_0^1$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{\omega}x\cos(\omega x)\right]_0^1 + \frac{1}{\omega}\int_0^1 1\cdot\cos(\omega x)\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos(\omega)}{\omega} + \frac{\sin(\omega)}{\omega^2}\right)$$

$$= \frac{2}{\omega^2\pi}\left(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega)\right)$$

Prüfe ob für alle ω gültig ist!!

$\lim\limits_{\omega\to 0}$ " $= \frac{0-0}{0}$ "

1.BH $\quad \frac{2\left(\cancel{\cos(\omega)} - \cancel{\cos(\omega)} + \omega\sin(\omega)\right)}{2\pi\omega} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

2.BH $\quad \frac{2\left(-\sin(\omega) + \sin(\omega) + \sin(\omega) - \omega\cos(\omega)\right)}{2\pi} = \frac{0}{2\pi}$ ✓

$= B(\omega) \qquad \rightarrow$ definiert $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$

$A(\omega) = 0$

Einsetzen in Fourier Integral:

$$f(x) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{2}{\pi\omega^2}\left(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega)\right)}_{B(\omega)} \cdot \sin(\omega x)\;dx \qquad A(\omega) = 0$$