Analysis Übungsstunde 8

gtuerler@student.ethz.ch

07.11.24

Intro PDE's $u_x := \frac{du(x,y)}{dx}$, $u_{xx} = \frac{d^2u(x,y)}{dx^2}$ // auch t, z andere variabeln

$u(x,y)$, $u(x,t)$

- Linear : falls funktion & Ableitungen nur mit Grad 1 "hoch 1"

$y' = 2y$
$y' = \cos(x)y$ } linear

$y' = \cos(y)$
$y' = y^2$ } nicht linear

- homogen: falls Linear und jeder Term funktion selbst oder eine Ableitung

$y'' - 2y = 0$ homogen

$4y' + \underline{10} = 0$ nicht homogen

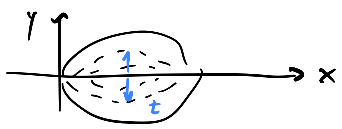
- Ordnung einer PDE "höchste Ableitung"

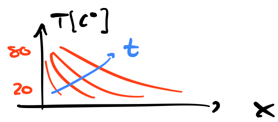
$u_{\underline{tt}} + u_t = u$ $\quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = u$ zweiter Ordnung

$u_{\underline{t}} + u = 0$ $\quad \frac{du}{dt} + u = 0$ erster Ordnung

Wichtige PDE

- 1D Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$
- 1D Wärmeleitgleichung $\underline{u_t} = c^2 u_{xx}$
- 2D Poissongleichung $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$
- 2D Wellengleichung $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$
- 2D Wärmeleitgleichung $u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy})$
- 3D Laplacegleichung $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 = \nabla^2 u$





Klassifizierung lineare PDE zweiter Ordnung

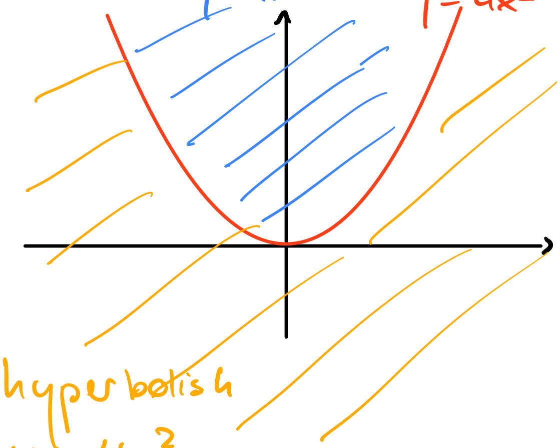
$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = F(x, y, z, u, u_x, u_y)$$

- hyperbolisch $AC - B^2 < 0$
- parabolisch $AC - B^2 = 0$
- elliptisch $AC - B^2 > 0$
- gemischt Vorzeichen von $(AC - B^2)$ ändert sich mit x & y

Bsp $y u_{xx} + 4x u_{xy} + u_{yy} - u_x + xu = 0$

$$\Leftrightarrow \underset{A}{y} u_{xx} + 2 \cdot \underset{B}{2x} u_{xy} + \underset{C}{1} u_{yy} = u_x - xu$$

$$\Rightarrow AC - B^2 = y \cdot 1 - (2x)^2$$
$$= y - 4x^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} 0$$
$$y \overset{<}{\underset{>}{=}} 4x^2$$



Bsp Winter 2023

1.MC6 [3 Points] Consider the following PDE (partial differential equation) for the function $u = u(x, y)$:

$$u_{xx} + 2\cos(x) u_{xy} + y u_{yy} - u_x + u_y = \sin(x).$$

Is the PDE hyperbolic, parabolic, elliptic or of mixed type ?

(A) hyperbolic.
(B) parabolic.
(C) elliptic.
(D) mixed type.

$$1 u_{xx} + 2\cos(x) u_{xy} + y u_{yy} = \sin(x) + u_x - u_y$$

$A = 1$ $B = \cos(x)$ $C = y$

$$AC - B^2 = 1 \cdot y - \cos^2(x)$$

$\Rightarrow$ D mixed type

2B

$AC - B^2$ ($A \uparrow 1$, $C \uparrow 2$, $B \uparrow 3$) $\rightarrow 1 \cdot 2 - 3^2$

$2 - 9 = -7 < 0$ hyperbolisch.

Lösen von PDE's

- es gilt superpositionsprinzip
- falls $u(x,t)$ in verschiedenen Ableitun $(u_t, u_{xx}$ etc$)$
  ↳ löse mit Ansatz $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$ (nächste Woche)
- falls nur ableitung in eine Variable (u_x, u_{xx})
  ↳ löse mit separation of variables & substitution

Bsp

$$\begin{cases} u_{yy} = u_y \cdot \frac{1}{y} \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,1) = \cos(x) \end{cases}$$

AWP

reminder: $u := u(x,y)$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{1}{y}$$

subst. $\frac{du}{dy} = f$

$$\frac{df}{dy} = f \frac{1}{y} \overset{\text{sep of var}}{\iff} \frac{df}{f} = \frac{dy}{y} \quad // \int$$

$$\ln(f) = \ln(y) + \underbrace{C_1(x)}_{\ln(c)} = \ln(y \cdot C_1(x)) \quad // e^{()}$$

$$f = y \cdot C_1(x) \quad // \; f = \frac{du}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} = y \cdot C_1(x) \overset{\text{sep. of var}}{\iff} du = y \cdot C_1(x) \cdot dy \quad // \int$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2} y^2 C_1(x) + C_2$$

AWP: $u(x,0) = 0 = 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$

$u(x,1) = \cos(x) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot C_1 + 0 \quad C_1 = 2\cos(x)$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}} y^2 \cancel{2} \cdot \cos(x) + 0 = \underline{\underline{y^2 \cos(x)}}$$

Bemerkungen zu Fourier Transformation

PDE's mit Fourier lösen $\Rightarrow$ geht genau gleich wie bei $\mathcal{L}$!

Woche 2

Rezept Lösen DGL

1) DGL finden (eigentlich immer gegeben)
2) Beide Seiten Transformieren $f(t) \to \cancel{\mathcal{L}}\ \mathcal{F}$
3) Noch $Y(s)$ auflösen $\mathcal{F}^{-1}$
4) Inverse ~~Laplace~~ Fourier transformation $\cancel{\mathcal{L}^{-1}} \to f(t)$

Bsp: Winter 23

1.MC3 [3 Points] Let f be a continuous function such that $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Solve the following differential equation using the Fourier transform

$$f(x) + f'(x) + 4f''(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\pi x^2}.$$

(A) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x}\, d\omega.$

(B) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega+4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x}\, d\omega.$

(C) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{+i\omega x}\, d\omega.$

(D) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega+4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x}\, d\omega.$

$$\underbrace{\mathcal{F}(f + f' + 4f'')}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\mathcal{F}(\sqrt{2\pi}e^{-\pi x^2})}_{\mathrm{II}}$$

$$(\mathrm{I}) \quad \hat{f} + i\omega\hat{f} - 4\omega^2\hat{f}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \mathcal{F}(\sqrt{2\pi}e^{-\pi x^2}) = \cancel{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

$$(\mathrm{I}) = (\mathrm{II})$$

$$\hat{f} + i\omega\hat{f} - 4\omega^2\hat{f} = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

$$\hat{f}(1 + i\omega - 4\omega^2) = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

$$\hat{f} = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}}{(1 + i\omega - 4\omega^2)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}}{(1 + i\omega - 4\omega^2)} \cdot e^{+i\omega x}\, d\omega$$

ZF:

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega\, \underbrace{\mathcal{F}(f(t))}_{\hat{f}}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{df^2}{dt^2}\right) = -\omega^2 \mathcal{F}(f(t))$$

pro weitere Ableitung je mal $i\omega$ dazu

Fourier Transformation

Sei Funktion f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f:

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Eigenschaften:

1. $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$
2. Sei f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty}$ sowie f' absolut integrabel, so gilt:
$$\mathcal{F}(f') = i\omega\mathcal{F}(f)$$

Inverse Fourier Transformation

Die inverse Fourier Transformation von g ist:

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Es gilt: $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$

$g(\omega) = \hat{f}$

Intregale mit Fourier lösen

gegeben: $\mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{3}{5+i\omega} = \hat{f}$ suche: a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$

Fourier Transformation

Sei Funktion f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f:

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Eigenschaften:

1. $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$
2. Sei f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty}$ sowie f' absolut integrabel, so gilt:

$$\mathcal{F}(f') = i\omega\mathcal{F}(f)$$

a) $$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \underbrace{e^{-i\omega x}}_{e^0=1} dx = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \cdot \frac{3}{5+i\omega}$$

$\omega = 0$

setze $\omega = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{3}{5}$$

WS:

Allg: $\mathcal{F}(x^k f) = i^k \frac{d^k \hat{f}(\omega)}{d\omega^k}$

$k=2$

$$\mathcal{F}(x^2 f) = i^2 \frac{d^2 \hat{f}(\omega)}{d\omega^2}$$

b) $$\mathcal{F}(x^2 f(x)) = -1 \cdot \frac{d^2}{d\omega^2}\left(\hat{f}(\omega)\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) e^{-i\omega x} dx = -1 \frac{d^2}{d\omega^2}\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \cdot \frac{3}{5+i\omega}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) e^{-i\omega x} dx = +\frac{d}{d\omega}\left(\frac{0 \cancel{\cdot 5+i\omega} + 3i}{(5+i\omega)^2}\right) = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{3i}{(5+i\omega)^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \underbrace{e^{-i\omega x}}_{1} dx = \frac{3i(+2)i}{(5+i\omega)^{3}} = \frac{6}{(5+i\omega)^3}$$

$\omega = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{6}{(5+0)^3} = \frac{6}{125}$$