Analysis Übungsstunde 8

gtuerler@student.ethz.ch

07.11.24

Intro PDE's $\quad u_x := \frac{du(x,y)}{dx}$, $u_{xx} = \frac{d^2u(x,y)}{dx^2}$ // auch t, z andere variabeln

- **Linear**: falls funktion & Ableitungen nur mit Grad 1 "hoch 1"

$$y' = 2y$$
$$y' = \cos(x)y$$
$$y' = \cos(y)$$
$$y' = y^2$$

- **homogen**: falls Linear und jeder Term funktion selbst oder eine Ableitung

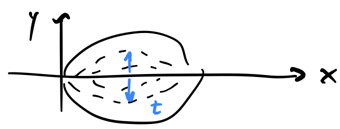
$$y'' - 2y = 0$$
$$4y' + 10 = 0$$

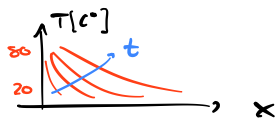
- **Ordnung eines PDE** "höchste Ableitung"

$$u_{tt} + u_t = u \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = u$$
$$u_t + u = 0 \qquad \frac{du}{dt} + u = 0$$

Wichtige PDE

- 1D Wellengleichung $\quad u_{tt} = c^2 u_{xx}$
- 1D Wärmeleitgleichung $\quad u_t = c^2 u_{xx}$





- 2D Poissongleichung $\quad u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$
- 2D Wellengleichung $\quad u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$
- 2D Wärmeleitgleichung $\quad u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy})$
- 3D Laplacegleichung $\quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

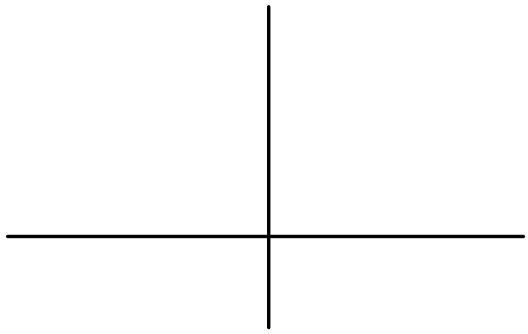
Klassifizierung lineare PDE zweiter Ordnung

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = F(x, y, z, u, u_x, u_y)$$

- hyperbolisch $\quad AC - B^2 < 0$
- parabolisch $\quad AC - B^2 = 0$
- elliptisch $\quad AC - B^2 > 0$
- gemischt $\quad$ Vorzeichen von $(AC - B^2)$ ändert sich mit x & y

Bsp $\quad y u_{xx} + 4x u_{xy} + u_{yy} - u_x + xu = 0$

$$\Leftrightarrow \quad y u_{xx} + 2 \cdot 2x u_{xy} + 1 u_{yy} = u_x - xu$$



Bsp Winter 2023

1.MC6 [3 Points] Consider the following PDE (partial differential equation) for the function $u = u(x, y)$:

$$u_{xx} + 2\cos(x) u_{xy} + y u_{yy} - u_x + u_y = \sin(x).$$

Is the PDE hyperbolic, parabolic, elliptic or of mixed type ?

(A) hyperbolic.

(B) parabolic.

(C) elliptic.

(D) mixed type.

Lösen von PDE's

- es gilt superpositionsprinzip
- falls $u(x,t)$ in verschiedenen Ableitun $(u_t, u_{xx}$ etc$)$

  ↳ löse mit Ansatz $U(x,t) = F(x) \cdot G(t)$ (nächste Woche)

- falls nur ableitung in eine Variable (u_x, u_{xx})

  ↳ löse mit separation of variables & substitution

Bsp

$$\begin{cases} u_{yy} = u_y \cdot \frac{1}{y} \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,1) = \cos(x) \end{cases} \qquad \text{reminder: } u := u(x,y)$$

$u(x,0)=0$, $u(x,1)=\cos(x)$: AWP

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{1}{y}$$

Bemerkungen zu Fourier Transformation

PDE's mit Fourier lösen $\Rightarrow$ geht genau gleich wie bei $\mathcal{L}$!

(Woche 2

Rezept Lösen DGL

1) DGL finden (eigentlich immer gegeben)
2) Beide Seiten Transformieren $f(t) \to \cancel{\mathcal{L}}\ \mathcal{F}$
3) Nach $Y(s)$ auflösen
4) Inverse ~~Laplace~~ Fourier transformation $\cancel{\mathcal{L}^{-1}}\ \mathcal{F}^{-1} \to f(t)$

Bsp: Winter 23

1.MC3 [**3 Points**] Let f be a continuous function such that $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Solve the following differential equation using the Fourier transform

$$f(x) + f'(x) + 4f''(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\pi x^2}.$$

(A) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x}\, d\omega.$

(B) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega+4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x}\, d\omega.$

(C) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x}\, d\omega.$

(D) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega+4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x}\, d\omega.$

ZF:

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega\, \mathcal{F}(f(t))$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{df^2}{dt^2}\right) = -\omega^2 \mathcal{F}(f(t))$$

pro weitere Ableitung je mal $i\omega$ dazu

Fourier Transformation

Sei Funktion f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f:

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Eigenschaften:

1. $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$
2. Sei f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty}$ sowie f' absolut integrabel, so gilt:

$$\mathcal{F}(f') = i\omega\mathcal{F}(f)$$

Inverse Fourier Transformation

Die inverse Fourier Transformation von g ist:

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Es gilt:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$$

Intregale mit Fourier lösen

gegeben: $\mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{3}{5+i\omega} = \hat{f}$ suche: a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$

a)

Fourier Transformation

Sei Funktion f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f:

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Eigenschaften:

1. $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$
2. Sei f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty}$ sowie f' absolut integrabel, so gilt:

$$\mathcal{F}(f') = i\omega \mathcal{F}(f)$$

b) $\mathcal{F}(x^2 f(x)) =$

W6:

Allg: $\mathcal{F}(x^k f) = i^k \frac{d^k \hat{f}(\omega)}{d\omega^k}$