Analysis Übungsstunde 11

gtuerler@student.ethz.ch

19.09.24

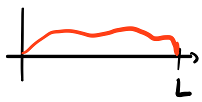
1D - Wärmeleitgleichung Fourier Lösung

$c = \frac{k}{\rho\sigma}$ — Leitfähigkeit, spez. Wärme, dichte

Wenn
$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \quad x \in [0,L], \; t > 0$$

Temp bei $x=0$, $x=L$

Anfangstemp



allg. Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) e^{-\lambda_n^2 t}$

aus aufgabe

$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$; $\quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$

$\Rightarrow$ ~~Manchmal~~ kann man B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmen!

Probiere immer zuerst den Coeff vgl!

1D - Wärmeleitgleichung Allgemeiner Ansatz: ("show your work" "separation of variables")

$\Rightarrow$ wie bei Wellengleichung, einfach $\begin{cases} u_t = F\dot{G} \\ u_{xx} = F''G \end{cases}$

5. Heat Equation with Inhomogeneous Boundary Conditions *(12 Points)*
We consider the following boundary value problem:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & 0 \le x \le \pi, t \ge 0, \\ u(0,t) = 2, & t \ge 0 \\ u(\pi,t) = 3, & t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{cases} \quad (1)$$

$0 \le x \le L$ ← rechnen mit L für die Herleitung im Bsp normalerweise direkt einsetzen!

where

$$f(x) = x(\pi - x) + \frac{x}{\pi} + 2.$$

The boundary conditions are not homogeneous, therefore one cannot directly apply the method of separation of variables.

You should argue as follows:

i) Construct a function $w(x)$ with $w(0) = 2$, $w(\pi) = 3$ and $w'' = 0$.
ii) Let u be a solution of the above boundary value problem (1). State the boundary value problem for the function $v(x,t) := u(x,t) - w(x)$.
iii) Solve the boundary value problem for v by using the method of separation of variables. Please show the steps of the method of separation of variables.
iv) Find the solution u of the original boundary value problem (1) .

i) siehe Woche 9: Inhomogene RB

$w'' = 0 \to w(x) = Ax + B$

$w(0) = 2 \to B = 2$

$w(\pi) = 3 \to A = \frac{1}{\pi}$

$\Rightarrow w(x) = \frac{x}{\pi} + 2$

ii) neu: $v(x,t) = u(x,t) - w(x)$

$$\begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} \\ v(0,t) = 0 \\ v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = x(\pi - x) \end{cases} \quad x \in [0,L], \; t > 0$$

1) Ansatz $v(x,t) = F(x)\cdot G(t) \to v_t = F\dot{G}$, $v_{xx} = F''G$

2) Einsetzen: $v_t = c^2 v_{xx}$

$F(x)\dot{G}(t) = c^2 F''(x) G(t)$

$\hookrightarrow \boxed{\frac{F''}{F} = \frac{\dot{G}}{c^2 G} := k}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

3) Separieren $\quad \frac{F''(x)}{F(x)} = k \qquad \frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = k$

4) Nutze Randbedingungen

$$V(0,t) = F(0)\cdot G(t) = 0 \rightarrow F(0)=0$$
$$V(\pi,t) = F(L)\cdot G(t) = 0 \rightarrow F(L)=0$$
$$V(x,0) = F(x)\cdot G(0) = x(\pi-x) \rightarrow ??$$

es können auch andere Randbedingungen sein mit Ableitungen bsp: $U_x(0,t), U_x(L,t)$

5) Lösen von DGL mit Fallunterscheidung: für welches k gilt was?

$k=0$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = 0 \qquad F''(x) = 0 \rightarrow F(x) \mathrel{\hat=} Ax+B$$

$$\text{RB}\begin{cases} F(0) = 0 = 0x+B \rightarrow B=0 \\ F(L) = 0 = AL+0 \rightarrow A=0 \end{cases} \Big\} \text{trivial}$$

$$\underline{F(x) = 0}$$

$k>0$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = k \qquad F''-kF = 0 \xrightarrow{\text{Ansatz}} \lambda^2-k=0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{k}$$

$$F(x) = Ce^{+\sqrt{k}x} + De^{-\sqrt{k}x}$$

$$\text{RB}\begin{cases} F(0) = 0 = Ce^0+De^0 \rightarrow D=-C \\ F(L) = 0 = Ce^{\sqrt{k}L} - Ce^{-\sqrt{k}L} \end{cases}$$

$\nearrow \cancel{\sqrt{k}L \overset{!}{=} -\sqrt{k}L}$ $k>0$

$\searrow C \overset{!}{=} 0$ triv. Lsg

$$\underline{F(x) = 0}$$

$k<0$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = k \qquad F''-kF = 0 \quad // \quad k := -\alpha$$

$$F''+\alpha F = 0 \rightarrow \lambda^2+\alpha = 0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{-\alpha} = \pm i\sqrt{\alpha}$$

$$\rightarrow F(x) = \underbrace{e^{0x}}_{=1}\left(A\sin(\sqrt{\alpha}x) + B\cos(\sqrt{\alpha}x)\right)$$

$$\text{RB}\begin{cases} F(0) = 0 = A\cdot 0 + B\cdot 1 \qquad B=0 \\ F(L) = 0 = A\sin(\sqrt{\alpha}L) + 0 \end{cases}$$

$\nearrow \cancel{A=0}$ brauchen eine nicht triviale Lsg

$\searrow \sin(\ ) = 0 \rightarrow \sqrt{\alpha}L = n\cdot\pi$

$$\underline{\sqrt{\alpha} = \frac{n\pi}{L}}$$

$$F(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

6) Löse noch G(t)

$F(x)\cdot G(t) := v(x,t)$

$$\boxed{\text{Weil für Fälle } k=0, k>0 \ F(x)=0 \text{ gilt, muss } G(t) \text{ für diese nicht mehr berechnet werden!}}$$

dh für G(t) gilt

$(k<0)$

$$\dot{G} = kc^2G \xrightarrow{k=-\alpha} \dot{G} + \alpha c^2 G = 0 \qquad \begin{matrix}\sqrt{\alpha} = \frac{n\pi}{L} \\ \alpha = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\end{matrix} \rightarrow \dot{G} + \underbrace{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2}_{\lambda_n} G = 0$$

$$\rightarrow \dot{G} = -\lambda_n^2 G \xRightarrow{\text{Ansatz oder sep. of var}} \underline{G(t) = D_n e^{-\lambda_n^2 t}}$$

7) Zusammensetzen $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$, $\sqrt{\alpha} = \frac{n\pi}{L}$

$$v(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot D_n e^{-\lambda_n^2 t} \qquad // \; A_n \cdot D_n = B_n$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

8) letzte RB: Coeff vgl? sonst Fourier Koeffizient

$t=0$:

$$v(x,0) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cancel{e^{0}} \to 1 \qquad // \text{ kein Koeff vgl möglich}$$

Fourier:

Wenn $\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$	$x \in [0,L]$, $t > 0$	allg. Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\lambda_n^2 t}$ $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$; $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$ $\Rightarrow$ Manchmal kann man B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmen!

$$f(x) = x(\pi - x)$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

aus Aufgabe $L = \pi$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \dots$$

$$\int \mathbf{x\,sin(nx)} = -\frac{x}{n}cos(nx) + \frac{1}{n}\int cos(nx)dx$$
$$= -\frac{x}{n}cos(nx) + \frac{1}{n^2}sin(nx) = \frac{sin(nx) - nx\,cos(nx)}{n^2}$$

$\vdots$

$$B_n = \frac{4}{n^3\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

9) Zusammensetzen & falls inhomogen: Rückersetzung

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x) \qquad // \; w(x) = \frac{x}{\pi} + 2$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi c}{L} \overset{L=\pi}{=} nc$$

$$u(x,t) = \frac{x}{\pi} + 2 + \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3\pi}\left(1 - (-1)^n\right) \cdot \sin(nx) \cdot e^{-(nc)^2 t}}$$

Bsp Koeff vgl mit WLG

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & x \in [0,\pi] \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 & \\ u(x,0) = \cos^2(x) & \end{cases}$$

(nach lösen der Aufg)

allgemeine Lsg:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(nx)\, e^{-n^2c^2t}$$

bei trigonometrischen Funktionen immer Koeff vgl

nutze hier trigonom. Identität: $\cos^2 = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$

RB mit $t=0$: $u(x,0) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(nx)\, \underbrace{e^{-n^2c^2 0}}_{1}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = B_0 \cos(0) + B_1 \cos(1x) + B_2 \cos(2x) + \ldots$$

$+ 0 \cdot \cos(1x) +$

$B_0 = 0$
$B_1 = 0$
$B_2 = 0$

Spezifische Lösung: $u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \cdot e^{-4c^2t}$

Hinweis: Aufpassen beim DGL lösen bei RB

wenn zB: $\dot{G}(t) = -2t^2 \alpha G(t)$

$$\frac{dG}{dt} = -2t^2\alpha G \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{G}\, dG = -2\alpha \cdot \int t^2 dt$$

$$\ln(G) = -2\alpha \frac{1}{3} t^3 + c \quad \rightarrow \quad G(t) = c \cdot e^{-\frac{2}{3}\alpha t^3}$$

2D Zeitunabhängige Wärmeleitgleichung → Laplace Gleichung

Zeitunabhängig: steady state der WLG

$u_t = c^2 u_{xx}$ // $\cancel{u = u(t)} \to u_t = 0$ $0 = \nabla^2 u = \Delta u$

1D: $u_{xx} = 0$

2D: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

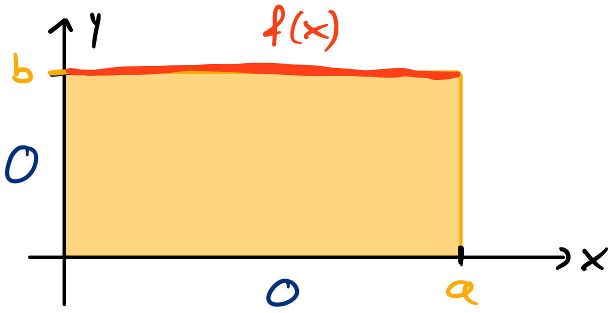
Laplace Operator: $\frac{d^2}{d()^2}$

Verschiedene Lösungen

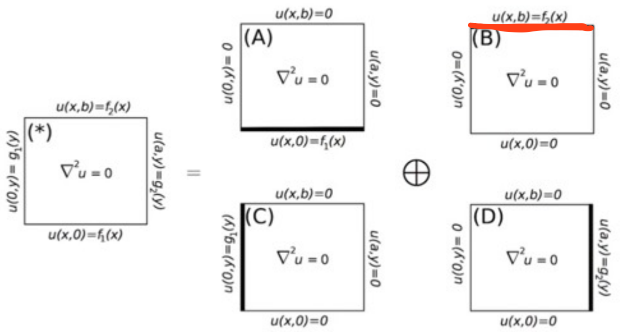
- Dirichlet Problem : Randwerte bekannt $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u = f(\partial G) \text{ auf } \partial G \end{cases}$ Rand
- Neumann Problem : Partielle Ableitungen auf dem Rand bekannt $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ auf } G \\ \frac{du}{d\vec{n}} = \vec{g}(x) \text{ auf } \partial G \end{cases}$
- Robin Problem : Mischung aus beiden

Dirichlet Problem auf einem Rechteck

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in [0,a] \\ u(0,y) = 0 & y \in [0,b] \\ u(a,y) = 0 & \\ u(x,0) = 0 & \\ u(x,b) = f(x) & \end{cases}$$



→ "An einer Kante beheizte Metallplatte"



Lösung für B:

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Tipps

- B_n immer zuerst mit Coeff. Vgl probieren
- falls $u(a,y) = g(y)$, statt $u(x,b) = f(x)$ → transformiere $u \to v$: $v(x,y) = u(y,x)$
  ↳ a & b vertauschen & in $g(y)$ einsetzen → oder direkt Lösung für (D) suchen (ZF)
- fall mehrere RB $\neq 0$: superposition von einzelnen Lsg (ZF)

Herleitung von Dirichlet auf Rechteck Lösung

$u(x,y) = F(x)\cdot G(y) \qquad \Delta u = 0$

$$\left.\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ F''G + FG'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{(-1)\frac{G''}{G} = \frac{F''}{F} := k}$$

1) Lösen von $F'' = kF$ mit RB $u(0,y) = u(a,y) = 0$

$k>0 \ldots \; k=0 \ldots \; k<0 \quad k = -\alpha$

$\vdots$

$F_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad // \sqrt{\alpha} = \frac{n\pi}{a}$ (alles gleich wie bei WG & WLG)

2) Löse die "Y-Dimension" / G-Case

$-\frac{G''}{G} = k = -\alpha \rightarrow \quad G'' = \alpha G \quad$ & RB $u(x,0) = 0 = F(x)\cdot G(0) = 0$

achtung vorzeichen!

DGL lösen: $\lambda^2 = \alpha \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\alpha}$

$G(y) = Ce^{\sqrt{\alpha}y} + De^{-\sqrt{\alpha}y} \quad // RB$

$G(0) = 0 = C + D \quad \rightarrow D = -C$

$G(y) = Ce^{\sqrt{\alpha}y} - Ce^{-\sqrt{\alpha}y} = C\left(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}\right) \quad // \; C = \frac{H}{2}, \sqrt{\alpha} = \frac{n\pi}{a}$

$= H \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\alpha}y} - e^{-\sqrt{\alpha}y}\right) = \underline{H_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$

3) Zusammensetzen: $u(x,y) = F(x)\cdot G(y)$

$$\underline{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} \quad // A_n = B_n \cdot H_n$$

4) Letzte RB: $u(x,b) = f(x)$

$$u(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right)}_{\text{konstante}}$$

$A_n \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{L}b\right) =$ Fourier koeffizient der ungeraden Fortsetzung der Funktion $f(x)$ mit Periode $2a$

oder finde über:

$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$

$B_n = \frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f_2(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$

Bsp MC9 W2023

1.MC9 [3 Points] Consider the Dirichlet problem for the Laplace equation,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\},$$

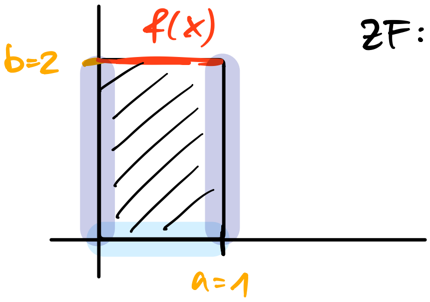
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in R, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & 0 \le y \le 2, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(x,2) = f(x) & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

where f is a continuous function.

$a=1$
$b=2$

(A) There are infinitely many solutions.
(B) We cannot say anything.
(C) There is a unique solution.
(D) There is no solution.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in [0,a] \\ u(0,y) = 0 & y \in [0,b] \\ u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,b) = f(x) \end{cases}$$



ZF:

Lösung für B:

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x \quad // \quad a=1,\ b=2 \ \checkmark$$

B_n bestimmbar: es gibt eine spezifische Lsg.