Analysis Übungsstunde 11

gtuerler@student.ethz.ch

28.11.24

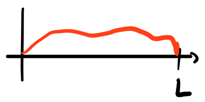
1D - Wärmeleitgleichung Fourier Lösung

$c = \frac{k}{\rho\sigma}$ — leitfähigkeit, spez. Wärme, dichte

Wenn
$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & x \in [0,L] \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(L,t) = 0 & \\ u(x,0) = f(x) & \end{cases}$$

Temp bei $x=0$, $x=L$

Anfangstemp



allg. Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\lambda_n^2 t}$

aus aufgabe

$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$; $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$

$\Rightarrow$ ~~Manchmal~~ kann man B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmen!

Probiere immer zuerst den Coeff vgl!

1D - Wärmeleitgleichung Allgemeiner Ansatz: ("show your work" "separation of variables")

$\Rightarrow$ wie bei Wellengleichung, einfach $\begin{cases} u_t = F\dot{G} \\ u_{xx} = F''G \end{cases}$

5. Heat Equation with Inhomogeneous Boundary Conditions *(12 Points)*
We consider the following boundary value problem:

rechnen mit L für die Herleitung im Bsp normalerweise direkt einsetzen!

$$\begin{cases} u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & 0 \le x \le \pi, t \ge 0, \\ u(0,t) = 2, & t \ge 0 \\ u(\pi,t) = 3, & t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{cases} \quad (1)$$

$0 \le x \le L$

where
$$f(x) = x(\pi - x) + \frac{x}{\pi} + 2.$$

The boundary conditions are not homogeneous, therefore one cannot directly apply the method of separation of variables.

You should argue as follows:

i) Construct a function $w(x)$ with $w(0) = 2$, $w(\pi) = 3$ and $w'' = 0$.
ii) Let u be a solution of the above boundary value problem (1). State the boundary value problem for the function $v(x,t) := u(x,t) - w(x)$.
iii) Solve the boundary value problem for v by using the method of separation of variables. Please show the steps of the method of separation of variables.
iv) Find the solution u of the original boundary value problem (1) .

i) siehe Woche 9: Inhomogene RB

$w'' = 0 \rightarrow w(x) = Ax + B$

$w(0) = 2 \rightarrow B = 2$

$w(\pi) = 3 \rightarrow A = \frac{1}{\pi}$

$\Rightarrow w(x) = \frac{x}{\pi} + 2$

ii) neu: $v(x,t) = u(x,t) - w(x)$

$$\begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} & x \in [0,L] \\ v(0,t) = 0 & t > 0 \\ v(L,t) = 0 & \\ v(x,0) = x(\pi - x) & \end{cases}$$

1) Ansatz $v(x,t) = F(x) \cdot G(t)$ $\begin{cases} v_t = F\dot{G} \\ v_{xx} = F''G \end{cases}$

2) Einsetzen: $v_t = c^2 v_{xx}$

$F(x)\dot{G}(t) = c^2 F''(x)G(t)$

$\hookrightarrow$ $\boxed{}$ $k \in \mathbb{R}$

3) Separieren $\frac{F''(x)}{F(x)} = k$

4) Nutze Randbedingungen

$$v(0,t) = F(0)\cdot G(t) = 0 \rightarrow F(0)=0$$
$$v(\pi,t) = F(L)\cdot G(t) = 0 \rightarrow F(L)=0$$
$$v(x,0) = F(x)\cdot G(0) = x(\pi - x) \rightarrow ??$$

es können auch andere Randbedingungen sein mit Ableitungen bsp: $u_x(0,t), u_x(L,t)$

5) Lösen von DGL mit Fallunterscheidung: für welches k gilt was?

k = 0

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = 0 \qquad F''(x) = 0 \longrightarrow F(x) \mathrel{\hat{=}} Ax + B$$

$$\text{RB}\begin{cases} F(0) = 0 = 0x + B & \rightarrow B = 0 \\ F(L) = 0 = AL + 0 & \rightarrow A = 0 \end{cases} \Big\} \text{ trivial}$$

$$\underline{F(x) = 0}$$

k > 0

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = k \qquad F'' - kF = 0 \xrightarrow{\text{Ansatz}} \lambda^2 - k = 0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{k}$$

$$F(x) = Ce^{+\sqrt{k}x} + De^{-\sqrt{k}x}$$

$$\text{RB}\begin{cases} F(0) = 0 = Ce^0 + De^0 \longrightarrow D = -C \\ F(L) = 0 = Ce^{\sqrt{k}L} - Ce^{-\sqrt{k}L} \end{cases}$$

$\nearrow$ $\cancel{\sqrt{k}L \stackrel{!}{=} -\sqrt{k}L}$ $k > 0$

$\searrow$ $C \stackrel{!}{=} 0$ triv. Lsg

$$\underline{F(x) = 0}$$

k < 0

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = k \qquad F'' - kF = 0 \qquad // \; k := -\alpha$$

$$F'' + \alpha F = 0 \quad \rightarrow \lambda^2 + \alpha = 0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{-\alpha} = \pm i\sqrt{\alpha}$$

$$\rightarrow F(x) = \underbrace{e^{0x}}_{=1}\left(A\sin(\sqrt{\alpha}x) + B\cos(\sqrt{\alpha}x)\right)$$

$$\text{RB}\begin{cases} F(0) = 0 = A\cdot 0 + B\cdot 1 & B = 0 \\ F(L) = 0 = A\sin(\sqrt{\alpha}L) + 0 \end{cases}$$

$\nearrow$ $\cancel{A = 0}$ brauchen eine nicht triviale Lsg

$\searrow$ $\sin(\;) = 0 \rightarrow \sqrt{\alpha}L = n\cdot\pi$

$$\sqrt{\alpha} = \frac{n\pi}{L}$$

$$F(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

6) Löse noch G(t)

$F(x)\cdot G(t) := v(x,t)$

$\boxed{\text{Weil für Fälle } k=0, k>0 \; F(x)=0 \text{ gilt, muss } G(t) \text{ für diese nicht mehr berechnet werden!}}$

dh für G(t) gilt

$$\dot{G} = kc^2 G \xrightarrow{k=-\alpha}$$

(k<0)

7) Zusammensetzen $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$, $\sqrt{\alpha} = \frac{n\pi}{L}$

$$v(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot D_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad // \; A_n \cdot D_n = B_n$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

8) letzte RB: Coeff vgl? sonst Fourier Koeffizient

$t=0$:

$$v(x,0) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t} \quad // \text{ kein Koeff vgl möglich}$$

Fourier:

$$f(x) = x(\pi - x)$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Wenn $\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$ $x \in [0,L]$, $t > 0$	allg. Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(\frac{n\pi}{L}x) e^{-\lambda_n^2 t}$	$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$; $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$

⇒ Manchmal kann man B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmen!

aus Aufgabe $L = \pi$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\, dx = \dots \quad \left(\int \mathbf{x \sin(nx)} = -\frac{x}{n}cos(nx) + \frac{1}{n}\int cos(nx)dx = -\frac{x}{n}cos(nx) + \frac{1}{n^2}sin(nx) = \frac{sin(nx) - nx\,cos(nx)}{n^2} \right)$$

$\vdots$

$B_n =$

9) Zusammensetzen & falls inhomogen: Rückersetzung

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x) \quad // \; w(x) = \quad \lambda_n = \frac{n\pi c}{L} =$$

$u(x,t) =$

Bsp Koeff vgl mit WLG

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & x \in [0,\pi] \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos^2(x) \end{cases}$$

(nach lösen der Aufg)

allgemeine Lsg:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(nx)\, e^{-n^2c^2t}$$

bei trigonometrischen Funktionen immer Koeff vgl

nutze hier trigonom. Identität: $\cos^2 =$

RB mit $t=0$:

Spezifische Lösung:

Hinweis: Aufpassen beim DGL lösen bei RB

wenn zB: $\dot{G}(t) = -2\underline{t}^2 \alpha G(t)$

2D Zeitunabhängige Wärmeleitgleichung $\to$ Laplace Gleichung

Zeitunabhängig: steady state der WLG

$u_t = c^2 u_{xx} \quad // \; \cancel{u = u(t)} \to u_t = 0$

$= \Delta u$

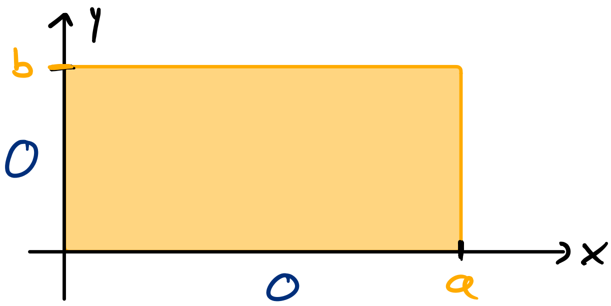
$\uparrow$ Laplace Operator: $\frac{d^2}{d()^2}$

Verschiedene Lösungen

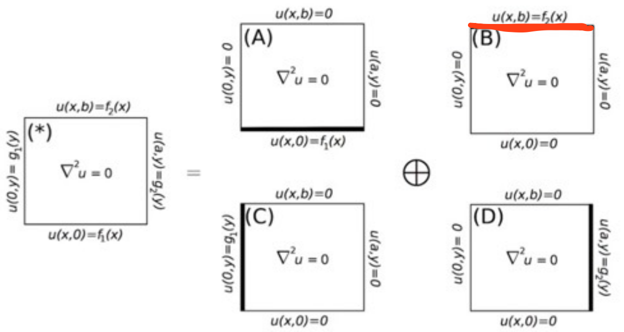
- Dirichlet Problem : Randwerte bekannt $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u = f(\partial G) \text{ auf } \partial G \end{cases}$ Rand
- Neumann Problem : Partielle Ableitungen auf dem Rand bekannt $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ auf } G \\ \frac{du}{d\vec{n}} = \vec{g}(x) \text{ auf } \partial G \end{cases}$
- Robin Problem : Mischung aus beiden

Dirichlet Problem auf einem Rechteck

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in [0,a] \\ u(0,y) = 0 & y \in [0,b] \\ u(a,y) = 0 & \\ u(x,0) = 0 & \\ u(x,b) = f(x) & \end{cases}$$



$\to$ "An einer Kante beheizte Metallplatte"



Lösung für B:

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Tipps

- B_n immer zuerst mit Coeff. Vgl probieren
- falls $u(a,y) = g(y)$, statt $u(x,b) = f(x)$ $\to$ transformiere $u \to v$
  $v(x,y) = u(y,x)$
  $\hookrightarrow$ a & b vertauschen & in $g(y)$ einsetzen $\to$ oder direkt Lösung für (D) suchen (ZF)
- fall mehrere RB $\neq 0$: superposition von einzelnen Lsg (ZF)

Herleitung von Dirichlet auf Rechteck Lösung

$u(x,y) = F(x) \cdot G(y)$ $\quad \Delta u = 0$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

1) Lösen von $F'' = kF$ mit RB $u(0,y) = u(a,y) = 0$

$k > 0 \ldots \; k = 0 \ldots \; k < 0 \quad k = -\alpha$

$\vdots$

$F_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad // \sqrt{\alpha} = \frac{n\pi}{a}$ $\quad$ (alles gleich wie bei WG & WLG)

2) Löse die "Y-Dimension" / G-Case

$-\frac{G''}{G} = k = \quad \rightarrow \quad G'' = \alpha G$ & RB $u(x,0) = 0 = F(x) \cdot G(0) = 0$

DGL lösen:

$G(y) =$

$G(0) =$

$G(y) =$

$=$

3) Zusammensetzen: $u(x,y) = F(x) \cdot G(y)$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \quad // A_n = B_n \cdot H_n$$

4) Letzte RB: $u(x,b) = f(x)$

$$u(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n}_{\text{Konstante}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot \underbrace{\sinh\left(\frac{n\pi}{L} b\right)}$$

$A_n \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{L} b\right)$ = Fourier Koeffizient der ungeraden Fortsetzung der Funktion $f(x)$ mit Periode $2a$

oder finde über:

$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Bsp MC9 W2023

1.MC9 [3 Points] Consider the Dirichlet problem for the Laplace equation,

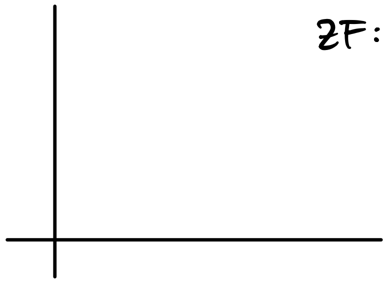
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\},$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in R, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & 0 \leq y \leq 2, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(x,2) = f(x) & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

where f is a continuous function.

(A) There are infinitely many solutions.
(B) We cannot say anything.
(C) There is a unique solution.
(D) There is no solution.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in [0,a] \\ u(0,y) = 0 & y \in [0,b] \\ u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,b) = f(x) \end{cases}$$



ZF:

Lösung für B:

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x$$