Analysis Übungsstunde 13

gtuerler@student.ethz.ch 12.12.24

Dirichlet auf einem Kreis (→ Symmetrien)

Problem in form: ∂D = "auf Rand"

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & ,(x,y) \in D \\ u(R,\theta) = f(\theta) & (x,y) \in \partial D \end{cases}$$

Rand von Kreis

- ... $u(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D finden wir die Lösung

$$\Rightarrow \quad u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n cos(n\theta) + B_n sin(n\theta))$$

Wir bestimmen A_n und B_n mit Koeffizientenvergleich oder sonst mit:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi$$

$$A_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) cos(n\xi) d\xi$$

$$B_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) sin(n\xi) d\xi$$

$$\begin{cases} \Delta u \\ u_r(R,\theta) = f(\theta) \end{cases}$$

Ableitung

- ...$u_r(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D gilt die Lösung

$$\Rightarrow \quad u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n cos(n\theta) + B_n sin(n\theta))$$

mit

$$A_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) cos(n\xi) d\xi$$

$$B_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) sin(n\xi) d\xi$$

⇒ verwechsle r und R nicht!

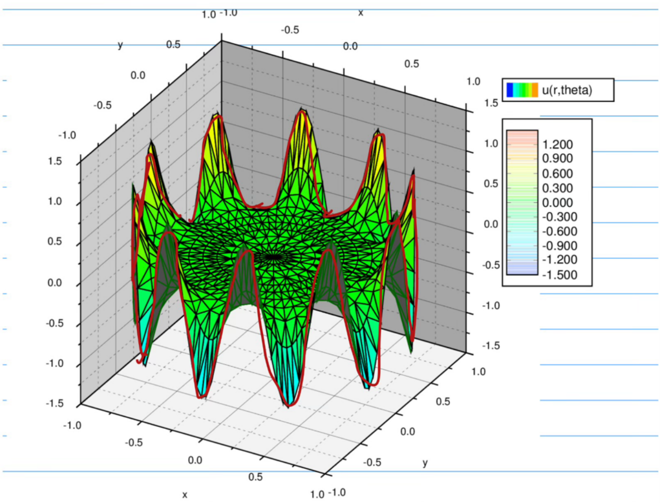
Koordinatentransformation

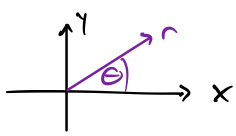
Karth.	polar
$x = r\cos(\theta)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\sin(\theta)$	$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Laplace Operator (Δ)

Karth.: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

polar: $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$





Rezept: 1) falls nötig $x,y \to r,\theta$

2) Lösen, am besten mit koeff vgl

↳ cos/sin Potenzen umschreiben!

3) falls nötig, Rücktransformation in (x,y)

↳ schreibe dann ausdruck nur von $\underline{r, \cos^k(\theta), \sin^k(\theta)}$

Bsp $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(R,\theta) = \sin^2(\theta) = f(\theta) \end{cases}$ // $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$

$$u(R,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

$\Rightarrow B_n = 0 \ \forall n$

$\Rightarrow A_0 = \frac{1}{2}, \ A_2 = -\frac{1}{2R^2}$, else 0

$R^2 A_2 \cancel{\cos(2\theta)} = -\frac{1}{2}\cancel{\cos(2\theta)}$

$A_2 = -\frac{1}{2R^2}$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2} - r^2\left(\frac{1}{2R^2}\right)\cos(2\theta)$$

Herleitung mit Sep. of Var

Karthesische Koordinaten

$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2+y^2 \in R^2 \\ u = f & x^2+y^2 \in R^2 \end{cases}$

Transform $\Leftrightarrow$ to polar

Polarkoordinaten

$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r = 0 & r \in [0,R] \\ u(R,\theta) = f(\theta) & \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$

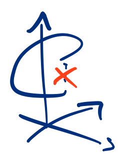
1 Ansatz: $u(r,\theta) = F(r) \cdot G(\theta)$

2 Einsetzen $F''G + \frac{1}{r^2} FG'' + \frac{1}{r} F'G = 0$ $\quad F''G + \frac{F'G}{r} = -\frac{1}{r^2} FG''$

3 Separiere :

$$\boxed{\frac{r^2 F''(r) + rF'(r)}{F} = -\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} := k}$$

4 Nutze RB: $\left.\begin{array}{l} G(0) = G(2\pi) \\ G'(0) = G'(2\pi) \end{array}\right\}$ Kreis Bedingung : Rand muss geschlossen und kontinuierlich sein



⑤ Lösen von DGL mit Fallunterscheidung: für welches k gilt was?

-> gleiches Vorgehen wie bei 1D Welle

Löse zuerst $G(\theta)$ Fall, da einfacher

Skript Seite 30 ->

$K=0 \quad u=0$

$K<0 \quad u=0$

$K>0 \rightarrow G_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(\theta)$ und $\sqrt{K} = n \rightarrow k = n^2$

⑥ Löse nach $F(r)$

$r^2F'' + rF' - KF = 0$ // Euler DGL!, $k = n^2$

$F_n(r) = P_n r^n + Q_n r^{-n}$

-> RB für $r \to 0$! Bounded by domain

$P_n r^n + Q_n \underbrace{r^{-n}}_{\to\infty} \Rightarrow Q_n \overset{!}{=} 0 \qquad F_n(r) = P_n r^n$

⑦ Zusammensetzen

$u(r,\theta) = F_n(r)\cdot G_n(\theta) = P_n r^n (A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(\theta))$ //

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right]$$

Dirichlet auf einem Kreis – Mit Poisson Integral lösen

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(R,\theta) = f(\theta) \end{cases}$$

↑ Rand

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(r,\theta,R,\varphi) f(\varphi)\, d\varphi$$

$$K(r,\theta,R,\varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\varphi) + r^2}$$

$K(r,\theta,R,\varphi)$ ist der Poisson-Integral-Kern.

→ Grosse Abkürzung!

"∂D" → U_{rand} : $u(r,\theta)$ eingesetzt in $\Delta u := 0 \;\; \forall x,y$

⇒ dann ist U_{rand} die Allgemeine Lösung des Problems!

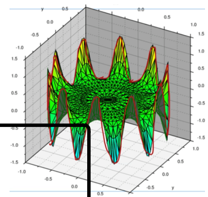
Bsp $u(x,y) = xy + 2x + y \qquad (x,y) \in \partial D$ (rand)

$\rightarrow \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 + 0 = 0$ ✓

⇒ $u(x,y) = xy + 2x + y \;, (x,y) \in D$ (ganzer Kreis)

Minimums- & Maximumsprinzip Harmonischer Funktionen

→ Wenn eine Funktion die $\Delta u = 0$ (Laplace Gleichung) auf D erfüllt, ist sie harmonisch



Maximum oder Minimum einer funktion ist immer auf dem Rand ∂D ausser sie ist konstant, dann kann max / min auch innerhalb D sein

Fallunterscheidung Min / Max?

→ Min $\quad \frac{d}{d\theta} f(\theta) = 0$ und $\frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) > 0$

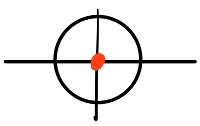
→ Max $\quad \frac{d}{d\theta} f(\theta) = 0$ und $\frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) < 0$

und $r = R$ (gross R = Rand)

für Kreis mit Radius = R

Mittelwertsatz

Funktionswert einer harmonischen funktion auf D im Punkt (x_0, y_0) entspricht dem Mittelwert der Funktionswerte einer beliebigen Kreisscheibe um (x_0, y_0)



$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$$

(folgt aus $K(r=0,\theta,R,\varphi) = 1$)

Bsp W2020 A5

5. Laplace Equation (*8 Points*)
Consider the following Laplace equation on a centered disk of radius R:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & D_R \quad \text{Kreis} \\ u(x,y) = \frac{\pi}{R(R^2+\pi^2)}(x^2+2xy+y^2). & \partial D_R \quad \text{Rand} \end{cases} \qquad (4)$$

a) (*3 Points*) Find the value in the center of the disk:

$$u(0,0) = ?$$

b) (*3 Points*) Find the maximum on the whole disk:

$$\max_{(x,y)\in D_R} u(x,y) = ?$$

c) (*2 Points*) Find the unique $R > 0$ for which this maximum is equal to 1.

von oben:

Rezept: 1) falls nötig $x,y \to r,\theta$

2) Lösen, am besten mit koeff vgl

↳ cos/sin Potenzen umschreiben!

3) falls nötig, Rücktransformation in (x,y)

↳ schreibe dann ausdruck nur von $r, \cos^k(\theta), \sin^k(\theta)$

$x = r\cos(\theta)$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\sin(\theta)$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Karth: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

polar: $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$

a) $u(0,0) = ?$ Mittelwertsatz! Zuerst aber von Karth zu Polar umwandeln

1) $$u(x,y) = \frac{\pi}{R(R^2+\pi^2)}(x^2+2xy+y^2) = \frac{\pi}{R(R^2+\pi^2)}(x+y)^2 \quad // \quad x = R\cos, \ y = R\sin$$

R weil u_{Rand}

$$= \frac{\pi}{\cancel{R}(R^2+\pi^2)} R^{\cancel{2}} (\cos(\theta)+\sin(\theta))^2$$

$\cos^2 + 2\sin\cos + \sin^2$, $\cos^2+\sin^2 = 1$

$= 1 + 2\sin\cos$

$= 1 + \sin(2\theta)$

$$u(R,\theta) = \frac{R\pi}{(R^2+\pi^2)}(1+\sin(2\theta)) \quad \text{auf } \partial D$$

u_{Rand}

$$\to \text{MWS}: \ u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\cancel{\pi}}\frac{\cancel{\pi}R}{(R^2+\pi^2)}\underbrace{\int_0^{2\pi} 1+\sin(2\theta)\,d\theta}$$

$$= \left[\theta - \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi - \frac{1}{2}\cos(4\pi) - 0 + \frac{1}{2}\cos(0)$$

$$= 2\pi$$

$$u(0,0) = \frac{2\pi R}{2(R^2+\pi^2)} = \underline{\underline{\frac{R\pi}{R^2+\pi^2}}}$$

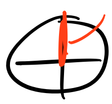
b) find max:

mittels Maximumprizip wissen wir dass max. auf dem Rand erreicht werden muss

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} u_{Rand} \overset{a)}{=} \frac{R\pi}{(R^2+\pi^2)}(1+\sin(2\theta))$$

→ max 1

sinus max 1



$$u_{Rand\,max} = \frac{R\pi}{R^2+\pi^2}(1+1) = \frac{2R\pi}{R^2+\pi^2}$$

c) R so dass $\max u_{Rand} = 1$

$$1 = \frac{2R\pi}{R^2+\pi^2} \qquad R^2 - 2R\pi + \pi^2 = 0$$

$$(R-\pi)^2 = 0 \quad \to \underline{\underline{R = \pi}}$$

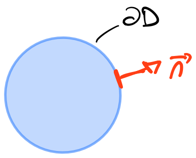
Neumann Problem

Gibt es eine Lösung?

oft $=0$

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial D \text{ (Rand)} \end{cases}$$

Neumann Bedingung auf Rand



n = normalisierter Einheitsvektor auf dem Rand

Gauss-Divergenz Theorem

Allgemein: $\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, d^{(n)}V = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d^{(n-1)}S$

1D: $\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}(\vec{F}(x))\,dA \overset{*}{=} \int_{\partial\Omega} \vec{F}(x)\cdot n\,dx$

Mittels Gauss von $\int_{\partial D} g\,ds \leftrightarrow \int_D f\,dA$

$$\int_{\partial D} g\,dx = \int_{\partial D} \frac{du}{dn}\,dx = \int_{\partial D} \underbrace{\nabla(u(x))}_{=\vec{F}(x)}\cdot n\,dx \overset{*}{=} \int_D \operatorname{div}(\nabla(u(x)))\,dA = \int_D \underbrace{\nabla^2 u}_{f}\,dA$$

Well posed / ill posed

Wir nennen ein Problem *well-posed*, falls:

- Das Problem hat eine Lösung. (Existence)
- Die Lösung ist eindeutig. (Uniqueness)
- Die Lösung ist von Anfangsbedingungen und Randbedingungen abhängig. (Stability)

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, ist das Problem *ill-posed*.

(I) Es gibt eine eindeutige Lösung (unique solution)

$$\int_D f = \int_{\partial D} g$$

(II) wenn

$$\int_D f \neq \int_{\partial D} g \to \text{keine Lösung}$$

Bsp W2024

1.MC9 [3 Points] Consider the following Neumann problem (Laplace equation with fixed normal derivative on the boundary):

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \; = f & \text{in } D_R \\ \partial_n u(R,\theta) = \theta(2\pi-\theta), \; = g & 0 \le \theta \le 2\pi \;\big(\text{parametrising } \partial D_R\big) \end{cases}$$

with D_R the disk center in the origin and radius R and ∂D_R is the boundary of D_R.
Which of the following is true:

(A) There is no solution.
(B) There are two solutions.
(C) There are infinitely many solutions.
(D) We cannot conclude that (A), (B), or (C) are true.

$$\int_D f \overset{!}{=} \int_{\partial D} g$$

$$\int 0\,dA = \int g\,ds$$

$$0 = \int g\,ds$$

$$\int_{\partial D} g\,ds = \int_0^{2\pi} \theta(2\pi-\theta)\,d\theta = \left[\pi\theta^2 - \frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi} = 2\pi^3 - \frac{8}{3}\pi^3 \neq 0$$

Bsp

3. Consider the Neumann problem for the following PDE,

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f, & \text{in } D_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{on } \partial D_2, \end{cases}$$

with D_2 the disk of radius 2 centred at 0 and f and g are two given functions such that

$$\int_{D_2} f(x)\,dx = 3, \quad \text{and} \quad \int_{\partial D_2} g(x)\,dx = 2.$$

Is there a solution? ?

$$\int_D f \overset{!}{=} \int_{\partial D} g$$

$$3 = 2$$

$\longrightarrow$ no solution