Analysis Übungsstunde 13

gtuerler@student.ethz.ch

12.12.24

Dirichlet auf einem Kreis (→ Symmetrien)

Problem in form:

D = im Kreis, ∂D = "auf Rand"

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & , (x,y) \in D \\ u(R,\theta) = f(\theta) & (x,y) \in \partial D \end{cases}$$

↑ Rand von Kreis

- ... $u(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D finden wir die Lösung

$$\Rightarrow \quad u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n cos(n\theta) + B_n sin(n\theta))$$

Wir bestimmen A_n und B_n mit Koeffizientenvergleich oder sonst mit:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi$$

$$A_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) cos(n\xi) d\xi$$

$$B_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) sin(n\xi) d\xi$$

$$\begin{cases} \Delta u \\ u_r(R,\theta) = f(\theta) \end{cases}$$

↑ Ableitung

- ... $u_r(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D gilt die Lösung

$$\Rightarrow \quad u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n cos(n\theta) + B_n sin(n\theta))$$

mit

$$A_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) cos(n\xi) d\xi$$

$$B_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) sin(n\xi) d\xi$$

⇒ verwechsle r und R nicht!

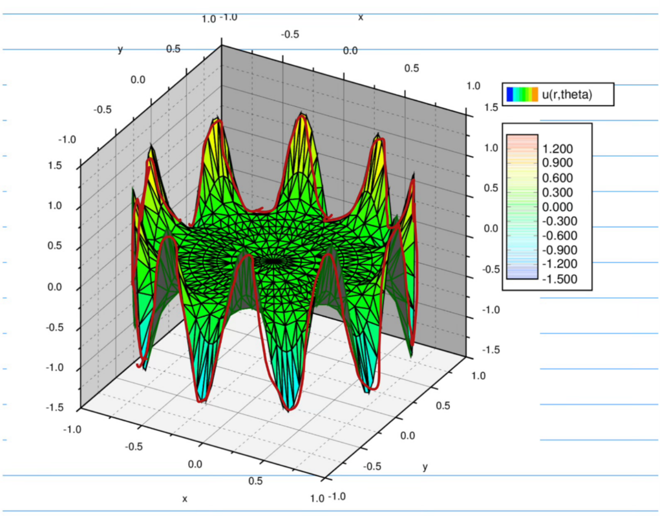
Koordinatentransformation

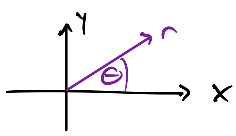
Karth.	polar
$x = r\cos(\theta)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\sin(\theta)$	$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Laplace Operator (Δ)

Karth: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

polar: $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$





Rezept: 1) falls nötig $x,y \to r,\Theta$

2) Lösen, am besten mit koeff vgl

↳ cos/sin Potenzen umschreiben!

3) falls nötig, Rücktransformation in (x,y)

↳ schreibe dann ausdruck nur von $\underline{r, \cos^k(\theta), \sin^k(\theta)}$

Bsp $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(R,\theta) = \sin^2(\theta) = f(\theta) \end{cases}$ // $\sin^2(\theta) =$

$$u(R,\Theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[A_n \cos(n\Theta) + B_n \sin(n\Theta)\right] =$$

$\Rightarrow B_n =$

$\Rightarrow$

$u(r,\Theta) =$

Herleitung mit Sep. of Var

Karthesische Koordinaten

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2+y^2 \in R^2 \\ u = f & x^2+y^2 \in R^2 \end{cases}$$

Transform $\Leftrightarrow$ to polar

Polarkoordinaten

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\Theta\Theta} + \frac{1}{r} u_r = 0 & r \in [0,R] \\ u(R,\theta) = f(\Theta) & \Theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

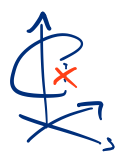
1 Ansatz: $u(r,\Theta) = F(r) \cdot G(\Theta)$

2 Einsetzen $F''G + \frac{1}{r^2} FG'' + \frac{1}{r} F'G = 0$ $\quad F''G + \frac{F'G}{r} = -\frac{1}{r^2} FG''$

3 Separiere :

$$\boxed{\_\_\_\_\_\_ = - \_\_\_ := k}$$

4 Nutze RB: $\begin{matrix} G(\;\;) = G(\;\;) \\ G'(\;\;) = G'(\;\;) \end{matrix}$ } Kreis Bedingung : Rand muss geschlossen und kontinuierlich sein



⑤ Lösen von DGL mit Fallunterscheidung: für welches k gilt was?

-> gleiches Vorgehen wie bei 1D Welle

Löse zuerst $G(\theta)$ fall, da einfacher

Skript Seite 30 →

$K=0 \quad u=0$

$K<0 \quad u=0$

$K>0 \rightarrow G_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(\theta)$ und $\sqrt{K}=n \rightarrow k=n^2$

⑥ Löse nach $F(r)$

$$r^2F'' + rF' - KF = 0$$

$$F_n(r) = P_n r^n + Q_n r^{-n}$$

-> RB für $r \to 0$! Bounded by domain

$$P_n r^n + \cancel{Q_n r^{-n}}$$

⑦ Zusammensetzen

$$u(r,\theta) = F_n(r) \cdot G_n(\theta) = P_n r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(\theta))$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right]$$

Dirichlet auf einem Kreis – Mit Poisson Integral lösen

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(R,\theta) = f(\theta) \end{cases}$$

↑ Rand

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r,\theta,R,\varphi) f(\varphi) d\varphi$$

$$K(r,\theta,R,\varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\varphi) + r^2}$$

$K(r,\theta,R,\varphi)$ ist der Poisson-Integral-Kern.

→ Grosse Abkürzung!

"∂D" ↗ u_{rand} : $u(r,\theta)$ eingesetzt in $\Delta u := 0 \ \forall x,y$

⇒ dann ist u_{rand} die Allgemeine Lösung des Problems!

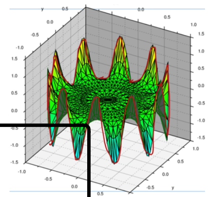
Bsp $u(x,y) = xy + 2x + y \qquad (x,y) \in \partial D$ (rand)

→

⇒ $u(x,y) = xy + 2x + y \quad ,(x,y) \in$

Minimums- & Maximumsprinzip Harmonischer Funktionen

→ Wenn eine Funktion die $\overset{\text{Laplace Gleichung}}{\Delta u = 0}$ auf D erfüllt, ist sie harmonisch



Maximum oder Minimum einer funktion ist immer auf dem Rand ∂D ausser sie ist konstant, dann kann max/min auch innerhalb D sein

Fallunterscheidung Min/Max?

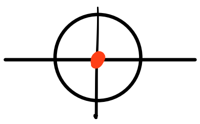
→ Min $\frac{d}{d\theta} f(\theta) = 0$ und $\frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) \bigcirc$

→ Max $\frac{d}{d\theta} f(\theta) = 0$ und $\frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) \bigcirc$

und $r = R$ ↙ gross R = Rand

für Kreis mit Radius = R

Mittelwertsatz



Funktionswert einer harmonischen funktion auf D im Punkt (x_0,y_0) entspricht dem Mittelwert der Funktionswerte einer beliebigen Kreisscheibe um (x_0,y_0)

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R,\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad \left(\text{folgt aus } K(r=0,\theta,R,\varphi) = 1\right)$$

Bsp W2020 A5

5. Laplace Equation (*8 Points*)
Consider the following Laplace equation on a centered disk of radius R:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & D_R \quad \text{Kreis} \\ u(x,y) = \frac{\pi}{R(R^2+\pi^2)}(x^2+2xy+y^2). & \partial D_R \quad \text{Rand} \end{cases} \tag{4}$$

a) (*3 Points*) Find the value in the center of the disk:

$$u(0,0) = ?$$

b) (*3 Points*) Find the maximum on the whole disk:

$$\max_{(x,y)\in D_R} u(x,y) = ?$$

c) (*2 Points*) Find the unique $R > 0$ for which this maximum is equal to 1.

von oben:

Rezept: 1) falls nötig $x,y \to r,\theta$
2) Lösen, am besten mit koeff vgl
↳ cos/sin Potenzen umschreiben!
3) falls nötig, Rücktransformation in (x,y)
↳ schreibe dann ausdruck nur von $r, \cos^k(\theta), \sin^k(\theta)$

$x = r\cos(\theta)$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$
$y = r\sin(\theta)$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Karth: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$
polar: $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$

a) $u(0,0) = ?$ Mittelwertsatz! Zuerst aber von Karth zu Polar umwandeln

1) $$u(x,y) = \frac{\pi}{R(R^2+\pi^2)}(x^2+2xy+y^2) = \frac{\pi}{R(R^2+\pi^2)}$$

$$= \frac{\pi}{R(R^2+\pi^2)} R^2\left(\cos(\theta)+\sin(\theta)\right)^2$$

$$\underset{\uparrow}{u(R,\theta)} =$$
u_{Rand}

$$\to \text{MWS}: \quad u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi R}{(R^2+\pi^2)} \underbrace{\int_0^{2\pi} 1+\sin(2\theta)\,d\theta}$$

$u(0,0) =$

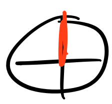
$=$

$=$

$=$

b) find max:
Mittels Maximumprizip wissen wir dass Max. auf dem Rand erreicht werden muss

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} u_{Rand} \overset{a)}{=} \frac{R\pi}{(R^2+\pi^2)}\left(1+\sin(2\theta)\right)$$



$$u_{Rand,\,max} = \frac{R\pi}{R^2+\pi^2}\left(\quad \right) =$$

c) R so dass $\max u_{Rand} = 1$ $\quad 1 =$

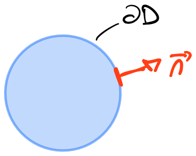
Neumann Problem

Gibt es eine Lösung?

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial D \text{ (Rand)} \end{cases}$$

oft $= 0$

Neumann Bedingung auf Rand



n = normalisierter Einheitsvektor auf dem Rand

Gauss-Divergenz Theorem

Allgemein: $\displaystyle\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, d^{(n)}V = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d^{(n-1)}S$

1D: $\displaystyle\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}(x))\, dA \overset{*}{=} \int_{\partial\Omega} \vec{F}(x) \cdot n \, dx$

Mittels Gauss von $\int_{\partial D} g \, ds \leftrightarrow \int_D f \, dA$

$$\int_{\partial D} g \, dx = \int_{\partial D} \frac{du}{dn} \, dx = \int_{\partial D} \underbrace{\nabla(u(x))}_{=F(x)} \cdot n \, dx \overset{*}{=} \int_D \operatorname{div}(\nabla(u(x)))\, dA = \int_D \underbrace{\nabla^2 u}_{f} \, dA$$

(I) Es gibt eine eindeutige Lösung (unique solution)

$$\int_D f = \int_{\partial D} g$$

(II) wenn

$$\int_D f \neq \int_{\partial D} g \rightarrow \text{keine Lösung}$$

Well posed / ill posed

Wir nennen ein Problem *well-posed*, falls:

- Das Problem hat eine Lösung. (Existence)
- Die Lösung ist eindeutig. (Uniqueness)
- Die Lösung ist von Anfangsbedingungen und Randbedingungen abhängig. (Stability)

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, ist das Problem *ill-posed*.

Bsp W2024

1.MC9 [3 Points] Consider the following Neumann problem (Laplace equation with fixed normal derivative on the boundary):

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & \text{in } D_R \\ \partial_n u(R,\theta) = \theta(2\pi - \theta), & 0 \le \theta \le 2\pi \ \big(\text{parametrising } \partial D_R\big) \end{cases}$$

with D_R the disk center in the origin and radius R and ∂D_R is the boundary of D_R. Which of the following is true:

(A) There is no solution.
(B) There are two solutions.
(C) There are infinitely many solutions.
(D) We cannot conclude that (A), (B), or (C) are true.

$$\int_D f \overset{!}{=} \int_{\partial D} g$$

$$\int_{\partial D} g \, ds =$$

Bsp

3. Consider the Neumann problem for the following PDE,

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f, & \text{in } D_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{on } \partial D_2, \end{cases}$$

with D_2 the disk of radius 2 centred at 0 and f and g are two given functions such that

$$\int_{D_2} f(x)\, dx = 3, \quad \text{and} \quad \int_{\partial D_2} g(x)\, dx = 2.$$

Is there a solution? ?