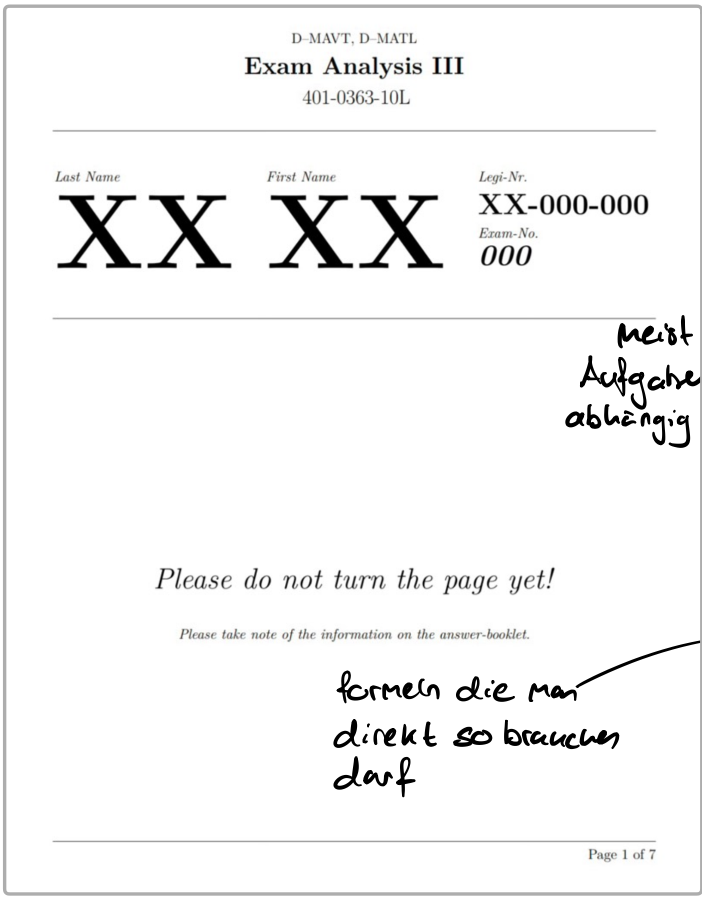
Analysis Übungsstunde 14

gtuerler@student.ethz.ch 19.12.24

Prüfung: Cheatsheet 10 Blätter doppelseitig oder 20 Blätter einseitig
→ fügt alle zusammen!

Aufbau: 3 × 9 = 27 Pkt 9 Single choice Aufgaben – Achtung negativpunkte!

15 + 10 = 25 Pkt 2 Grosse, offene Aufgaben



D-MAVT, D-MATL

Exam Analysis III

401-0363-10L

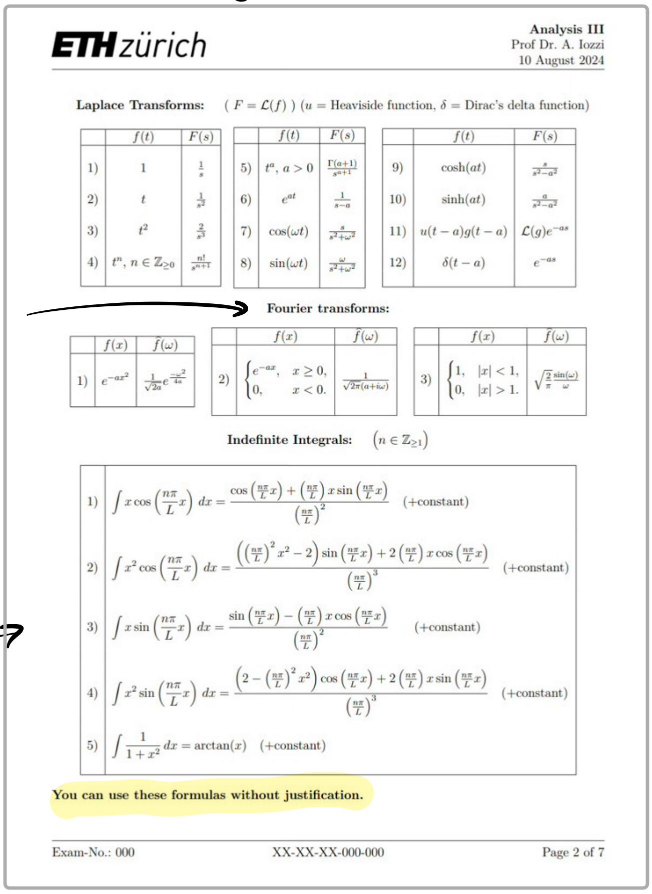
Last Name XX *First Name* XX *Legi-Nr.* XX-000-000 *Exam-No.* 000

Please do not turn the page yet!

Please take note of the information on the answer-booklet.

Page 1 of 7

meist Aufgaben abhängig



ETH zürich

Analysis III
Prof Dr. A. Iozzi
10 August 2024

Laplace Transforms: ($F = \mathcal{L}(f)$) (u = Heaviside function, δ = Dirac's delta function)

	$f(t)$	$F(s)$
1)	1	$\frac{1}{s}$
2)	t	$\frac{1}{s^2}$
3)	t^2	$\frac{2}{s^3}$
4)	$t^n,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5)	$t^a,\ a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
6)	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
7)	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8)	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9)	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
10)	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
11)	$u(t-a)g(t-a)$	$\mathcal{L}(g)e^{-as}$
12)	$\delta(t-a)$	e^{-as}

Fourier transforms:

	$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
1)	e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$
2)	$\begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}$
3)	$\begin{cases} 1, & \lvert x\rvert < 1, \\ 0, & \lvert x\rvert > 1. \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}$

Indefinite Integrals: $\left(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\right)$

1) $\displaystyle\int x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ (+constant)

2) $\displaystyle\int x^2\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2x^2 - 2\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + 2\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3}$ (+constant)

3) $\displaystyle\int x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ (+constant)

4) $\displaystyle\int x^2\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{\left(2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2x^2\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + 2\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3}$ (+constant)

5) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)$ (+constant)

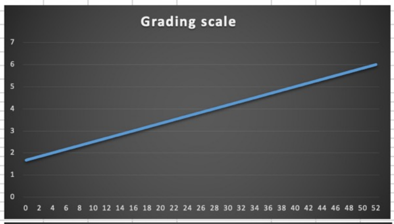
You can use these formulas without justification.

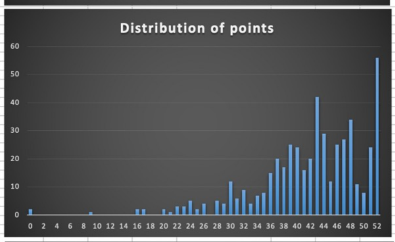
Exam-No.: 000 XX-XX-XX-000-000 Page 2 of 7

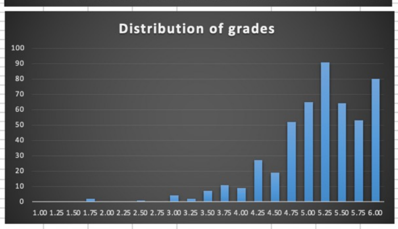
formeln die man direkt so brauchen darf

Statistiken 2024

Punkte	Note	Note Gerundet	Tendenz	Anzahl	Anzahl<=
0	1.67	1.75	-	2	2
1	1.75	1.75		0	2
2	1.83	1.75	+	0	2
3	1.92	2.00	-	0	2
4	2.00	2.00		0	2
5	2.08	2.00	+	0	2
6	2.17	2.25	-	0	2
7	2.25	2.25		0	2
8	2.33	2.25	+	0	2
9	2.42	2.50	-	1	3
10	2.50	2.50		0	3
11	2.58	2.50	+	0	3
12	2.67	2.75	-	0	3
13	2.75	2.75		0	3
14	2.83	2.75	+	0	3
15	2.92	3.00	-	0	3
16	3.00	3.00		2	5
17	3.08	3.00	+	2	7
18	3.17	3.25	-	0	7
19	3.25	3.25		0	7
20	3.33	3.25	+	2	9
21	3.42	3.50	-	1	10
22	3.50	3.50		3	13
23	3.58	3.50	+	3	16
24	3.67	3.75	-	5	21
25	3.75	3.75		2	23
26	3.83	3.75	+	4	27
27	3.92	4.00	-	0	27
28	4.00	4.00		5	32
29	4.08	4.00	+	4	36
30	4.17	4.25	-	12	48
31	4.25	4.25		6	54
32	4.33	4.25	+	9	63
33	4.42	4.50	-	4	67
34	4.50	4.50		7	74
35	4.58	4.50	+	8	82
36	4.67	4.75	-	15	97
37	4.75	4.75		20	117
38	4.83	4.75	+	17	134
39	4.92	5.00	-	25	159
40	5.00	5.00		24	183
41	5.08	5.00	+	16	199
42	5.17	5.25	-	20	219
43	5.25	5.25		42	261
44	5.33	5.25	+	29	290
45	5.42	5.50	-	12	302
46	5.50	5.50		25	327
47	5.58	5.50	+	27	354
48	5.67	5.75	-	34	388
49	5.75	5.75		11	399
50	5.83	5.75	+	8	407
51	5.92	6.00	-	24	431
52	6.00	6.00		56	487







❗ Keine Serie diese Woche :)

Mock Exam 2025 kommt im Januar raus

Prüfungssammlung

Partial Differential Equations

Wave equation

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Sep. of variables
Direkte Methode
D'Alembert

$u(x,t)$ = Auslenkung einer Welle an Position x und Zeit t

$x \in [0,L]$ $t \geq 0$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

T — Kraft
μ — Massenverteilung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n cos(\lambda_n t) + B_n^* sin(\lambda_n t)\right) sin(\frac{\pi n}{L} x) \quad (1)$$

$$\lambda_n = \frac{c\, n\, \pi}{L} \quad (2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(\frac{n\, \pi}{L} x) \quad (3)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n sin(\frac{n\, \pi}{L} x) \quad (4)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sin(\frac{n\, \pi}{L} x) dx \quad (5)$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) sin(\frac{n\, \pi}{L} x) dx \quad (6)$$

RB: $u(0,t)$, $u(L,t)$
$u(x,0)$, $u_t(x,0)$

Heat equation

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

Sep. of variables
Direkte Methode

$u(x,t)$ = Temperaturverteilung an Position x und Zeit t

$x \in [0,L]$ $t \geq 0$

$$c = \frac{K}{\rho \sigma}$$

K — Leitfähigkeit
σ — spez. Wärme
ρ — dichte

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Anfangstemp

allg. Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(\frac{n\pi}{L} x) e^{-\lambda_n^2 t}$

aus aufgabe

$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$; $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sin(\frac{n\pi}{L} x) dx$

⇒ Manchmal kann man B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmen!

Probiere immer zuerst den Coeff vgl!

RB: $u(0,t)$, $u(L,t)$
$u(x,0)$

Laplace equation

$$\Delta u = 0$$

Laplace Operator: $\Delta = \nabla^2 = \frac{d^2}{d\xi^2}$

Dirichlet Problem

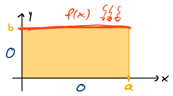
steadystate (zeitunabh.)
Temperaturverteilung an Koordinaten

Rechteck

$u(x,y)$
$x \in [0,a]$
$y \in [0,b]$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \in D \\ u(x,b) = f(x) & \in \partial D \end{cases}$$

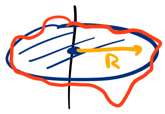
(zb)



Kreis

$u(r,\theta)$
$r \in [0,R]$
$\theta \in [0,2\pi]$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(R,\theta) = f(\theta) & \in \partial D \end{cases}$$



Neumann Problem

$\Delta u = 0 \quad \in D$

$\frac{du}{dn} = g(x) \quad \in \partial D$

$$\int_D f \stackrel{!}{=} \int_{\partial D} g$$

Wenn inhomogene RB: korrigiere mit $w(x)$: $w''(x) = 0$
$V(x,t) = u(x,t) - w(x)$
$w(0) = u(0,t)$
$w(L) = u(L,t)$

Woche 1

Laplace Transformation

Definition

$$f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \mathcal{L}(f)(s) = F(s) \quad ; \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

Regeln:

→ Linearität: Konstanten, Addition / Subtraktion

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}(a \cdot f(t)) &= a \cdot \mathcal{L}(f(t)) \\ \mathcal{L}(f+g) &= \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) \end{aligned}}$$

→ Multiplikation !

$$\mathcal{L}(f \cdot g) \neq \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

→ S-Shifting

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{at} \cdot f(t)) = F(s-a)}$$

→ t-shifting

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t-a) \cdot u(t-a)) &= e^{-as} F(s) \\ \mathcal{L}(f(t)\, u(t-a)) &= e^{-as} \mathcal{L}(f(t+a)) \end{aligned}}$$

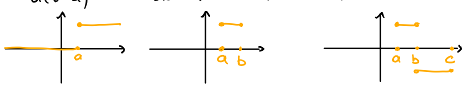
→ Was ist u?

Heavyside function: $u(t)$ (step function)

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

step bei a (nicht stetig)

$u(t-a)$ $\quad u(t-a) - u(t-b)$ $\quad u(t-a) - 2u(t-b) + u(t-c)$



Woche 2

Ableitungen der Laplacetransformation

Zeitbereich

#ableitungen

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n \mathcal{L}(f) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} \cdot f^{(j)}(0)$$

oft gebraucht:

F(s) = freq. Bereich $\quad$ Zeitbereich

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s^1 \mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f''(t))(s) = s^2 \mathcal{L}(f) - s f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}(f'''(t))(s) = s^3 \mathcal{L}(f) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$$

Frequenzbereich

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \cdot F(s) \quad , n = 1,2,3 \ldots$$

Integration der Laplacetransformation

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\, dx \right) = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

⇒ Rezept Lösen DGL

1) DGL finden (eigentlich immer gegeben)
2) Beide Seiten Transformieren $f(t) \to \mathcal{L}$
3) Nach $Y(s)$ auflösen
4) Inverse Laplacetransformation $\mathcal{L}^{-1} \to f(t)$

Woche 3

Faltung / Convolution

Remember? $\mathcal{L}(f \cdot g) \neq \mathcal{L}(g \cdot f)$ $\quad$ neu: Faltung

kombinieren von funkt: $f \pm g$, $f \cdot / g$

neu dritte operation $f * g$

$$\text{Def:} \quad f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

Convolution

Eigenschaften

(I) $f * g = g * f$ (kommutiert!)

(II) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (assoziativ)

(III) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ (distributiv)

(IV) $f * 0 = 0$

(V) $f * 1 \neq f$

Beweis:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$u = t - \tau \quad du = -d\tau \quad \tau = 0 \;\; u = t \quad \tau = t \;\; u = 0$

$$-\int_t^0 f(t-u)\, g(u)\, du$$

$$+\int_0^t f(t-u) \cdot g(u)\, du$$

$$= \int_0^t g(u) \cdot f(t-u)\, du$$

$$= g(t) * f(t)$$

Dirac Funktion $\delta(t-a)$

$$f(t) = \delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Regeln:

I) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) = 1$

II) $\int_0^{\infty} g(t) \cdot \delta(t-a) = g(a)$

$\int_0^{\infty} \mathcal{L}(f(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \delta(t-a) \cdot e^{-st} dt$

(II) $= e^{-sa}$

III) $\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-sa}$

$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \quad = \cancel{e^{-s \cdot 0}}\ 1$

Wie in Laplace anwenden?

inverse

- $\mathcal{L}(f * g) = \underbrace{\mathcal{L}(f(t))}_{F(s)} \cdot \underbrace{\mathcal{L}(g(t))}_{G(s)}$
- $\mathcal{L}^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = (f * g) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$
- $\mathcal{L}(f * 1) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$

Woche 4

Periodische Funktionen

$f(x)$ ist p-periodisch, wenn $\boxed{f(x) = f(x+p)}$

Eigenschaften

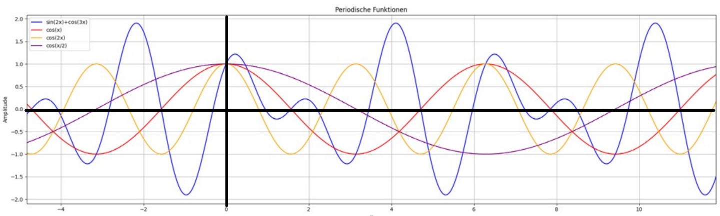
gleiche Periodizität p

def: $f(x) = f(x+p)$ $h(x) = h(x+p)$ $g(x) = g(x+d)$

- $f(ax)$ ist $\frac{p}{a}$ - periodisch
- $a \cdot f(x) + b \cdot h(x)$ p-periodisch (beide p-periodisch)
- f und h sind beide $n \cdot p$ -periodisch, $n \in \mathbb{Z}$
- $a \cdot f(x) + c \cdot g(x)$ sind periodisch, falls $\frac{p}{d} \in \mathbb{Q}$

  ↳ Mit Periode $p^* = \text{kgV}(p, d)$

$$\boxed{\text{bei } \sin(kx) \text{ oder } \cos(kx) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{k}}$$



Woche 5

Komplexe Fourier Reihe

normale Fourier-Reihe: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$

ersetze durch cplx Schreibweise $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2}(e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) + b_n \frac{1}{2i}(e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x})$$

$\boxed{\frac{1}{i} = -i}$ $\left(\frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1}\right)$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_n - ib_n}{2}}_{c_n} e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \underbrace{\frac{a_n + ib_n}{2}}_{c_{-n}} e^{-i\frac{n\pi}{L}x}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} + c_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{L}x}$$

passe einfach auf dass $c_n \; \forall n \in \mathbb{Z}$ geht

bsp: $\frac{1}{n} \to c_0$ separ

$$= c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{in\pi}{L}x} \quad \text{oder} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

(I) ⟷ (II)

$$f(x) = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{i\pi n}{L}x}$$

! Wie immer, $f(x)$ muss $2L$-Periodisch sein!

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-\frac{i\pi n}{L}x} \; ; \quad c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

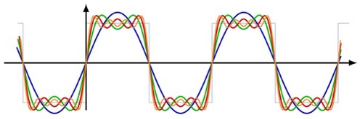
$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$

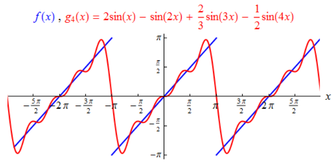
$a_0 = c_0$; $a_n = c_n + c_{-n}$; $b_n = i(c_n - c_{-n})$

$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$

$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$; $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$

Fourier-Reihe

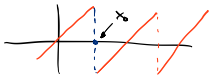




Ziel: Eine funktion $f(x)$ welche $2L$ periodisch ist, als Summe von Sinus & Cosinus schreiben

$f(x)$ kann unstetig sein, muss aber das Drichlet Theorem erfüllen

Drichlet Theorem: $\boxed{\frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right) = f(x_0)}$



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

$\cos(\frac{n\pi}{L}x)$ & $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ sind beide $2L$-Periodisch

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Woche 6

Fourier Integral

Periodische funktionen → Fourier-Reihe

Nicht-Periodische funktionen → Fourier-Integral

Form:

$$f(x) = \int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\right)d\omega$$

$$A(\omega) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(\omega v)dv$$

$$B(\omega) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(\omega v)dv$$

Fourier Transformation

$$\mathcal{F}(f(t)) = \hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}dt$$

können auch x sein

$$\mathcal{F}^{-1}(g(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \cdot e^{+i\omega t}d\omega$$

t ist ersetzbar: bsp $t^* = 4a + \frac{t^2}{2}$ oder auch mit x!

- $f(x) \underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftarrows}} \mathcal{F}(f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega)$
- $\mathcal{F}^{-1} \cdot \mathcal{F} = \mathbb{I}$
- $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(t))) = f(t)$

! Falls $\omega = 0$ nicht def: → $\hat{f}(0)$ separat berechnen (siehe bsp)

Eigenschaften (2F)

- Linearität: $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$
- Convolution: $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$
- Ableitungen im Zeitbereich: $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega\mathcal{F}(f(t))$

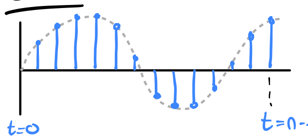
  $\mathcal{F}\left(\frac{df^2}{dt^2}\right) = -\omega^2\mathcal{F}(f(t))$ } pro weitere Ableitung je mal $i\omega$ dazu

  ⋮
- Ableitungen im Frequenzbereich: $\frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} = -i\mathcal{F}(t \cdot f(t))$ → Allg: $\mathcal{F}(x^k f) = i^k \frac{d^k \hat{f}(\omega)}{d\omega^k}$
- shifts: $\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{-ia\omega} \cdot \mathcal{F}(f(t))$

  $\mathcal{F}(\omega - b) = \mathcal{F}(e^{ib\omega} f(t))$

Woche 7

DFT



$F := \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$ $\quad C := \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$

Vektor von Datenpunkten

endliche fourier Serie

$f(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + \dots + c_{n-1} e^{(n-1)it} =$

für jeden sample Punkt t_j : $f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{kit_j}$ $\quad \boxed{t_j = j\frac{2\pi}{n}}$

$\triangleright\ f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot e^{kit_j} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot \omega_n^{kj} \quad \forall j \in [0, n-1]$ $\quad \omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ $\quad \mathcal{M}_n$

$\boxed{\triangleright\ \omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}}$

$\triangleright\ c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-kit_j} \cdot f_j = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{-kj} \cdot f_j \quad \forall k \in [0, n-1] \Rightarrow$ schreibe als Matrix $\quad = \mathcal{M}_n^{-1}$

(inverse)

$$\boxed{F = \mathcal{M}_n C \quad \Longleftrightarrow \quad C = \mathcal{M}_n^{-1} F}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_{n-1} \end{pmatrix}}_{F} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}_n = (\omega_n^{kj})_{k,j=0,\dots,n-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}}_{C}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^{-2} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-4} & \cdots & \omega_n^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{-(n-1)} & \omega_n^{-2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)^2} \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}_n^{-1} = \frac{1}{n}(\omega_n^{-kj})_{k,j=0,\dots,n-1}} \begin{pmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_{n-1} \end{pmatrix}$$

normalisation

Vgl:		
continous time	$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega$
discrete time	$f_j = \sum_{n=0}^{n-1} c_k \cdot e^{kit_j}$ (k-te frequenz coeff)	$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-kit_j} \cdot f_j$

Woche 8

Klassifizierung Lineare PDE zweiter Ordnung

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = F(x, y, z, u, u_x, u_y)$$

- hyperbolisch $\quad AC - B^2 < 0$
- parabolisch $\quad AC - B^2 = 0$
- elliptisch $\quad AC - B^2 > 0$
- gemischt $\quad$ Vorzeichen von $(AC - B^2)$ ändert sich mit x & y

DGL mit Fourier

PDE's mit Fourier lösen $\Rightarrow$ geht genau gleich wie bei $\mathcal{L}$!

(Woche 2

Rezept Lösen DGL

1) DGL finden (eigentlich immer gegeben)
2) Beide Seiten Transformieren $f(t) \to \cancel{\mathcal{L}}\ \mathcal{F}$
3) Nach $Y(s)$ auflösen $\quad \mathcal{F}^{-1}$
4) Inverse ~~Laplace~~ Fourier transformation $\cancel{\mathcal{L}^{-1}} \to f(t)$

Bsp: Winter 23

1.MC3 [3 Points] Let f be a continuous function such that $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Solve the following differential equation using the Fourier transform

$$f(x) + f'(x) + 4f''(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\pi x^2}.$$

(A) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x}\, d\omega.$

(B) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega+4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x}\, d\omega.$

(C) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x}\, d\omega.$

(D) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega+4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x}\, d\omega.$

$$\underbrace{\mathcal{F}(f + f' + 4f'')}_{\text{I}} = \underbrace{\mathcal{F}(\sqrt{2\pi} e^{-\pi x^2})}_{\text{II}}$$

(I) $\quad \hat{f} + i\omega\hat{f} - 4\omega^2\hat{f}$

(II) $\quad \mathcal{F}(\sqrt{2\pi} e^{-\pi x^2}) = \cancel{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$

$$(\text{I}) = (\text{II})$$

$$\hat{f} + i\omega\hat{f} - 4\omega^2\hat{f} = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

$$\hat{f}(1 + i\omega - 4\omega^2) = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

$$\hat{f} = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}}{(1 + i\omega - 4\omega^2)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}}{(1 + i\omega - 4\omega^2)} \cdot e^{+i\omega x} d\omega$$

ZF:

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}}_{\hat{f}}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega \mathcal{F}(f(t))$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{df^2}{dt^2}\right) = -\omega^2 \mathcal{F}(f(t))$$

pro weitere Ableitung je mal $i\omega$ dazu

Fourier Transformation

Sei Funktion f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f:

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Eigenschaften:

1. $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$
2. Sei f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty}$ sowie f' absolut integrabel, so gilt:

$$\mathcal{F}(f') = i\omega\mathcal{F}(f)$$

Inverse Fourier Transformation

Die inverse Fourier Transformation von g ist:

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Es gilt: $\quad \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$

$g(\omega) = \hat{f}$

Woche 9

1D Wellengleichung

Allgemeiner Ansatz: "show your work" "separation of variables"

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \to u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin(\frac{\pi}{L}x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

RB

1) Ansatz $\quad u(x,t) = F(x)G(t) \qquad u_{tt} := F(x)\ddot{G}(t)$

2) Einsetzen $\quad u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad u_{xx} := F''(x)G(t)$

$$F\ddot{G} = c^2 F'' G$$

$\rightarrow$ bringe in verhältnis: $\quad \boxed{\frac{F''}{F} = \frac{\ddot{G}}{c^2 G} := k} \quad k \in \mathbb{R}$

3) Separieren

$$\frac{F''}{F} = k \qquad \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = k$$

$\vdots$

1D Wellengleichung festige Lösung mit Fourier

$\left(c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)$ Kraft, Massenverteilung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n cos(\lambda_n t) + B_n^* sin(\lambda_n t))\, sin(\frac{\pi n}{L} x) \tag{1}$$

$$\lambda_n = \frac{c\, n\, \pi}{L} \tag{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(\frac{n\,\pi}{L} x) \tag{3}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n sin(\frac{n\,\pi}{L} x) \tag{4}$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sin(\frac{n\,\pi}{L} x) dx \tag{5}$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) sin(\frac{n\,\pi}{L} x) dx \tag{6}$$

Woche 10

1-Dimensionale Wellengleichung – Dalambert

Problem in Form: $\qquad$ Herleitung in der VL (Skript S.70)

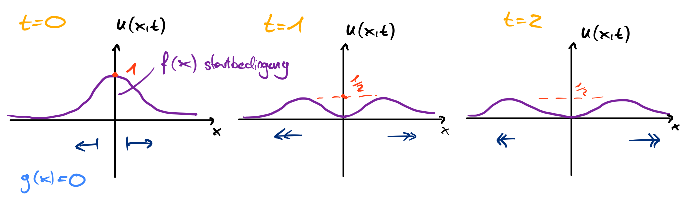
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(s) \end{cases}$$

$x \in [-\infty, \infty]$ oder $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

Man kann damit direkt die Lösung finden oder den Wert an einer bestimmten Stelle $x = a$, $t = b$ …

Lösung der PDE via Dalambert:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds}$$



Woche 11

1D - Wärmeleitgleichung

Allgemeiner Ansatz: ("show your work" 'separation of variables')

⇒ wie bei Wellengleichung, einfach $\begin{cases} u_t = F\dot{G} \\ u_{xx} = F''G \end{cases}$

i) siehe Woche 9: Inhomogene RB

ii) neu: $v(x,t) = u(x,t) - w(x)$

$$\begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} & x \in [0,L] \\ v(0,t) = 0 & t > 0 \\ v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = x(\pi - x) \end{cases}$$

1) Ansatz $v(x,t) = F(x)\cdot G(t) \to v_t = F\dot{G}$, $v_{xx} = F''G$

2) Einsetzen: $v_t = c^2 v_{xx}$

$F(x)\dot{G}(t) = c^2 F''(x) G(t)$

$\hookrightarrow \boxed{\frac{F''}{F} = \frac{\dot{G}}{c^2 G} := k}$ $k \in \mathbb{R}$

3) Separieren

$\frac{F''(x)}{F(x)} = k$ $\frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = k$

⋮

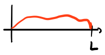
1D - Wärmeleitgleichung Fourier Lösung

$c = \frac{k}{\delta c_s}$ — Leitfähigkeit, spez. Wärme, dichte

Wenn $\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & x \in [0,L] \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

Temp bei $x=0$, $x=L$

Anfangsbedingung



allg. Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) e^{-\lambda_n^2 t}$

aus aufgabe

$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$; $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$

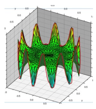
⇒ Manchmal kann man B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmen!

Probiere immer zuerst den Coeff vgl!

Woche 13

Dirichlet auf einem Kreis

(→ Symmetrien)



Problem in form:

D = im Kreis, ∂D = "auf Rand"

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & ,(x,y) \in D \\ u(R,\theta) = f(\theta) & (x,y) \in \partial D \end{cases}$$

Rand von Kreis

- ... $u(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D finden wir die Lösung

⇒ $u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$

Wir bestimmen A_n und B_n mit Koeffizientenvergleich oder sonst mit:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)d\xi$$

$$A_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)d\xi$$

$$B_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin(n\xi)d\xi$$

$$\begin{cases} \Delta u \\ u_r(R,\theta) = f(\theta) \end{cases}$$

Ableitung

- ... $u_r(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D gilt die Lösung

⇒ $u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$

mit

$$A_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)d\xi$$

$$B_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin(n\xi)d\xi$$

⇒ verwechsle r und R nicht!

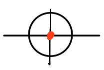
Minimums- & Maximumsprinzip Harmonischer Funktionen

→ Wenn eine Funktion die $\Delta u = 0$ (Laplace Gleichung) auf D erfüllt, ist sie harmonisch

Maximum oder Minimum einer funktion ist immer auf dem Rand ∂D ausser sie ist konstant, dann kann max / min auch innerhalb D sein

Mittelwertsatz

Funktionswert einer harmonischen funktion auf D im Punkt (x_0, y_0) entspricht dem Mittelwert der Funktionswerte einer beliebigen Kreisscheibe um (x_0, y_0)



$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

(folgt aus $K(r=0,\theta,R,\varphi) = 1$)

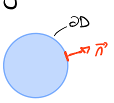
Neumann Problem

Gibt es eine Lösung?

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial D \text{ (Rand)} \end{cases}$$

oft = 0

Neumann Bedingung auf Rand



n = normalisierter Einheitsvektor auf dem Rand

Es gibt eine eindeutige Lösung (unique solution)

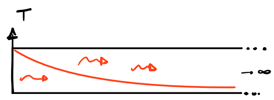
$$\int_D f = \int_{\partial D} g$$

Woche 12

Wärmeleitgleichung auf einem unendlichen Stab

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{cases}$$

neu: keine RB in x $[u(0,t) = u(L,t)]$ $L \to \infty$, $u(\infty,t) = ??$



Herleitung: Skript S.81

(1) $u(x,t) = \int_0^{\infty} (A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px))e^{-c^2p^2t}dp$

(2) $A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(pv)dv$ ‖ $A(p) = 0$, falls $f(x)$ ungerade

(3) $B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(pv)dv$ ‖ $B(p) = 0$, falls $f(x)$ gerade

→ wenn man (2)&(3) in (1) einsetzt, erhält man: (Herleitung Skript S.82)

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\exp\left[-\left(\frac{x-v}{2c\sqrt{t}}\right)^2\right]dv$$

WLG auf unendlicher Stab - Via Fourier Transformation

Gleiche Ausgangslage:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{cases}$$

Idee: $u(x,t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}(\omega,t)$

Remember: Woche 6: Fourier Transformation

Fourier Transformation

(I) $\mathcal{F}(f(t)) = \hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$ — können auch x sein

$\mathcal{F}^{-1}(g(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)\cdot e^{+i\omega t}d\omega$ — t ist ersetzbar, bsp $t^* = 4a + \frac{x^2}{2}$ oder auch mit x!

- $f(x) \underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftarrows}} \mathcal{F}(f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega)$
- $\mathcal{F}^{-1}\cdot\mathcal{F} = \mathbb{I}$
- $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(t))) = f(t)$

! Falls $\omega = 0$ nicht def: → $\hat{f}(0)$ separat berechnen (siehe bsp)

Eigenschaften (ZF)

- Linearität $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$
- Convolution $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$
- (II) Ableitungen im Zeitbereich $\mathcal{F}(\frac{df}{dt}) = i\omega\mathcal{F}(f(t))$, $\mathcal{F}(\frac{df^2}{dt^2}) = -\omega^2\mathcal{F}(f(t))$ } pro weitere Ableitung je mal $i\omega$ dazu ⋮
- Ableitungen im Frequenzbereich $\frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} = -i\mathcal{F}(t\cdot f(t))$ → Allg: $\mathcal{F}(x^k f) = i^k \frac{d^k\hat{f}(\omega)}{d\omega^k}$
- shifts $\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{-ia\omega}\cdot\mathcal{F}(f(t))$, $\mathcal{F}(\omega - b) = \mathcal{F}(e^{ib\omega}f(t))$

(1) Fourier Transform. nach x

$u_t = c^2 u_{xx}$ // Fourier-Transform

$\mathcal{F}(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\cdot\hat{u}(\omega,t)$

$\mathcal{F}(u_{xx}) \overset{(II)}{=} -\omega^2\hat{u}(\omega,t)$

$\mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(\omega)$

schreibe Problem neu:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t) = -c^2\omega^2\hat{u}(\omega,t) \\ \hat{u}(\omega,0) = \mathcal{F}(f(x)) \end{cases}$$

⇒ haben "normale" DGL!

(2) Löse mit sep. of var.

$\frac{d\hat{u}}{dt} = -c^2\omega^2\hat{u} \to \int\frac{1}{\hat{u}}d\hat{u} = \int -c^2\omega^2 dt$

$$\boxed{\hat{u}(\omega,t) = C(\omega)\cdot e^{-c^2\omega^2 t}}$$

(3) Nutze Transformierte RB

$\hat{u}(\omega,0) = C(\omega)\cdot e^0 = \mathcal{F}(f(x))$ → finde so $C(\omega)$

(4) Rücktransformation

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}(f(x))\cdot e^{-c^2\omega^2 t}\right]$$