Analysis III

Leon Auspurg - lauspurg@ethz.ch

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

$f(t)$	$F(s)$
$t^a, a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

1.1 Definitionen

Sei $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}, \quad t \to f(t)$:

$$\boxed{F(s) = \mathscr{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt}$$

wobei f := *inverse* Laplace Transformation von $F(s)$: $f(t) := \mathscr{L}^{-1}(F(s))$

1.2 Linearität

$$\boxed{\mathscr{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \cdot \mathscr{L}(f(t)) + \beta \cdot \mathscr{L}(g(t))}$$

wobei f, g Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Konstanten sind

Beispiel: Laplace Transform

- Sei $f(t) = 2t + e^t$

$$\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}\left(2 \cdot t + 1 \cdot e^t\right) = 2\mathscr{L}(t) + \mathscr{L}\left(e^t\right) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s-1}$$

- Sei $F(s) = \frac{4}{s^5}$

$$\mathscr{L}^{-1}(F) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{24}{s^5} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{24}{s^5}\right) = \frac{1}{6}t^4$$

- Sei $F(x) = \frac{a}{bs+c}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$$F(s) = \frac{a}{bs+c} = \frac{a/b}{s + c/b} = \frac{a/b}{s - (-c/b)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}(F) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\frac{a}{b}}{s - (-\frac{c}{b})}\right) = \frac{a}{b}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s - (-\frac{c}{b})}\right) = \frac{a}{b}e^{-\frac{c}{b}t}$$

1.3 Shifting Theorem (s-shifting)

Sei $\mathscr{L}(f)(s) = F(s)$, then: $\boxed{\mathscr{L}(e^{at} \cdot f(t)) = F(s-a)}$

1.4 LT von Ableitungen

Sei $f \in C^{n-1}$ (f ist $n-1$-mal stetig differenzierbar) und $f(n)$ stückweise stetig, dann gilt:

$$\boxed{\mathscr{L}(f^n)(s) = s^n \mathscr{L}(f) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^j(0)}$$

für alle $n \geq 1$:

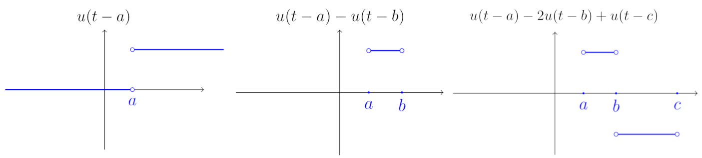
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(f'\right)(s) &= s\mathscr{L}(f) - f(0) \\
\mathscr{L}\left(f''\right)(s) &= s^2\mathscr{L}(f) - sf(0) - f'(0) \\
\mathscr{L}(f''')(s) &= s^3\mathscr{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)
\end{aligned}$$

1.5 Integration

$$\boxed{\mathscr{L}\int_0^t f(x)\, dx = \frac{1}{s}F(s)}$$

1.6 t-shifting, Heaviside Funktion

If $a \geq 0, \quad u(t-a) := \begin{cases} 1 & \text{if } t > a \\ 0 & \text{if } t < a \end{cases} \quad \mathscr{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s}$



$$\mathscr{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s)$$
$$\mathscr{L}(f(t)u(t-a)) = e^{-as}\mathscr{L}(f(t+a))$$

Beispiel: t-shifting

- Sei $f(t) = e^{2t} \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow a = 2$:

$$L(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \Rightarrow \mathscr{L}(f)(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2+\omega^2}$$

1.7 Dirac's delta funktion

Für $a \in [0, \infty)$ gilt:

$$\delta(t-a) := \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1$$

$$\int_0^\infty g(t)\delta(t-a)dt = g(a) \quad \text{und:} \quad \mathscr{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}$$

Beispiel:

- Sei die DGL $y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

$$\mathscr{L}\left(y'' - y' + y\right) = \mathscr{L}(0) = 0 = \mathscr{L}\left(y''\right) - \mathscr{L}\left(y'\right) + \mathscr{L}(y)$$
$$s^2\mathscr{L}(y) - \underbrace{sy(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=1} - (s\mathscr{L}(y) - \underbrace{y(0)}_{=0}) + \mathscr{L}(y) = 0$$

$$\mathscr{L}(y) = \frac{1}{s^2-s+1} = \frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}$$

$$y = \mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}(y)) = \sqrt{\frac{4}{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)$$

- Sei $f(t) = t^2$, dann ist $f(t-a) = (t-a)^2$, betrachte $u(t-a)f(t-a)$

$$\mathscr{L}(u(t-a)f(t-a)) = e^{-as}\mathscr{L}(f) = e^{-as}\frac{2}{s^3}$$

- Sei $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^4} = e^{-2s}\frac{1}{6}\underbrace{\frac{3}{s^4}}_{=\mathscr{L}(t^3)}$

$$\mathscr{L}^{-1}(F) = \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-2}\frac{1}{6}\frac{3}{s^4}\right) = \begin{cases} \frac{1}{6}(t-2)^3 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

1.8 Convolution (Faltung)

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Properties:

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $f * 0 = 0 * f = 0$
5. $f * 1 \neq f$
6. $f * f$ is not always ≥ 0

$$\boxed{\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f) \cdot \mathscr{L}(g)}$$

1.9 Ableitung der LT

Sei f stückweise stetig und beschränkt, dann gilt:

$$\mathscr{L}(tf(t)) = -\mathscr{L}'(f) = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}(f)$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left(F'(s)\right) = -tf(t)$$

1.10 Integral der LT

Existiert ferner $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$, so gilt:

$$\mathscr{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \mathscr{L}(f)(\sigma)d\sigma$$

1.11 Lösen von DGL mit LT

1. DGL finden und LT anwenden ($\mathscr{L}(y) = Y$)
   $\Rightarrow$ Anfangsbedingungen einsetzen
   $$y'' + ay' + by = r(t)$$
   $$\left(s^2Y - sy(0) - y'(0)\right) + a(sY - y(0)) + bY = R(s)$$
2. Nach Y lösen
   $$\left(s^2 + as + b\right) Y = R(s) + sy(0) + y'(0) + ay(0)$$
3. Inverse LT von $\mathscr{L}(y)$ berechnen
   Falls Anfangsbedingungen so gegeben $y(a), y'(a), \dots$:
   - Stubstituieren: $t = \tilde{t} + a$
   - $y''+ay'+by = r(t) \Rightarrow \tilde{y}''+a\tilde{y}'+b\tilde{y} = r(\tilde{t}+a)\ \tilde{y}(0) = y(a), \tilde{y}'(0) = y'(a), \dots$
   - Normal lösen $\Rightarrow \tilde{Y} \to \tilde{y}(\tilde{t})$
   - Rücksubstituieren: $\tilde{t} = t - a; \tilde{y}(\tilde{t}) \to y(t)$

1.11.1 Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen des Nenners finden $\to n_i$
2. $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \dots + \frac{Z}{x-x_i}$

$\Rightarrow$ Komplexe NS $z_i \& \bar{z}_i$ von $x^2 + p_i x + q_i$: $\quad \frac{Bx+C}{x^2+p_i x+q_i}$

4. Brüche so erweitern, dass alles wieder auf einem Bruchstrich Platz hat.
5. Bestimmen der Konstanten $A, B, C, \dots$ durch Koeffizientenvergleich

Beispiel: Convolution

- Sei $t * \sin(t) = \int_0^t \sin(\tau)(t-\tau)d\tau$
$= \int_0^t (t \cdot \sin(\tau) - \tau \cdot \sin(\tau))d\tau = -t\cos(\tau) - \sin(\tau) + \tau\cos(\tau)|_0^t$
$= -t\cos(t) - \sin(t) + t\cos(t) + t = t - \sin(t)$

Beispiel: Lösen von DGL mit LT

- Sei $y' + y = \delta(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin(t), \quad y(0) = 1$

LHS: $\mathscr{L}(y') + \mathscr{L}(y) = s\mathscr{L}(y) - 1 + \mathscr{L}(y) = \mathscr{L}(y)(s+1) - 1$
RHS: $= e^{-\pi s} + e^{1\pi s}\frac{1}{s^2+1}$

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s}\frac{1}{(s^2+1)(s+1)} + \frac{1}{s+1}\right)$$
$$= u(t-\pi)e^{-(t-\pi)} + u(t-2\pi)\frac{1}{2}(\sin(t-2\pi) - \cos(t-2\pi) + e^{-(t-2\pi)}) + e^{-t}$$
$$= e^{-t} + u(t-\pi)e^{\pi}e^{-t} + u(t-2\pi)\frac{1}{2}\left(\sin(t) - \cos(t) + e^{2\pi}e^{-t}\right)$$

Beispiel: Basic Laplace Transform

- Finde $\mathscr{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$, schreibe $f(t) = \sin(t)$

Prüfe: $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)}{1} = 1$
Dann folgt: $\mathscr{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \mathscr{L}(\sin)(\sigma)d\sigma = \int_s^\infty \frac{1}{\sigma^2+1}d\sigma$
$= \arctan(\sigma)|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$

$f(t)$	$\mathscr{L}f(t) = F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(1)
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	(2)
$\mathcal{U}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(3)
$f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	(4)
$\delta(t)$	1	(5)
$\delta(t-a)$	e^{-sa}	(6)
$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$	(7)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(8)
$f^n(t)$	$s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	(9)
$\int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(s)G(s)$	(10)
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(11)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$	(12)
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	(13)
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	(14)
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	(15)
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	(16)
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	(17)
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	(18)
$f(t)$	$\mathscr{L}f(t) = F(s)$	
$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	(19)
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	(20)
t^ne^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	(21)
$e^{at}\sin kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$	(22)
$e^{at}\cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	(23)
$e^{at}\sinh kt$	$\frac{k}{(s-a)^2-k^2}$	(24)
$e^{at}\cosh kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$	(25)
$t\sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$	(26)
$t\cos kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$	(27)
$t\sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$	(28)
$t\cosh kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2-k^2)^2}$	(29)
$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan\frac{a}{s}$	(30)
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(31)
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(32)

Convolution Product Formula:
$$e^{at} * e^{at} = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$$

2 Fourier

2.1 Periode p

Eine Funktion $f(x)$ ist *periodisch*, wenn
a) f für genügend viele $x \in \mathbb{R}$ definiert ist und
b) eine Periode $p \in \mathbb{R}, p > 0$ existiert, so dass $f(x) = f(x+p)$ für alle x.
Eigenschaften: Sei $f(x) = f(x+p) \quad \Rightarrow f(a \cdot x)$ ist $\frac{p}{a}$-periodisch

2.2 Dirichlet Theorem

Bei Unstetigkeiten $f\left(x^{-}\right) \neq f\left(x^{+}\right)$ konvergiert die Fourier Reihe zu:

$$\tfrac{1}{2}\left(f\left(x_0^{-}\right)+f\left(x_0^{+}\right)\right)=f\left(x_0\right)$$

2.3 Fourier-Reihe

Damit die Fourier-Reihe gegen $f(x)$ konvergiert, muss $f(x)$ auf dem ganzen Intervall definiert sein und für jede Unstetigkeit x_0 im Intervall muss das **Dirichlet Theorem (2.2)** gelten. Konst.: $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, Periode: $p = 2L$.

$$\boxed{f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]}$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad \text{wenn } n>0$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad \text{wenn } n>0$$

Beispiel: Fourier-Reihe

- Berechnen der Fourier-Reihe der Funktion $f(x) = \pi - x$ mit Periode 2π definiert auf $(-\pi, \pi) \quad \Rightarrow \quad 2\pi = p = 2L \rightarrow L = \pi$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi n}{\pi}x\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos(nx)dx$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos(nx)dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi x}{\pi}x\right)dx=\ldots=\frac{2\cos(n\pi)}{n}$$

$$\Rightarrow f(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos(n\pi)}{n}\sin(nx)$$

- Sei f 2-periodisch $\begin{cases} e^{1-\frac{1}{x^2}} & 0<x<1 \\ \frac{2}{x^2+1} & -1<x<0 \end{cases}$

$$f\left(1^{+}\right)=f\left(1^{-}\right)=1 \quad ; \quad f\left(-1^{+}\right)=f\left(-1^{-}\right)=1$$

$$f\left(0^{+}\right)=0, \quad f\left(0^{-}\right)=2 \Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}(0+2)=1$$

2.3.1 Gerade (even) Funktionen

Fourier-Reihe für **gerade** ($f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{D}$) Funktion f:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\right]$$

$$b_n=0, \quad a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

$$\text{Zusatz: } f(a\cdot x)=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}A\left(\frac{\omega}{a}\right)\cdot\cos(\omega x)\,d\omega$$

2.3.2 Ungerade (odd) Funktionen

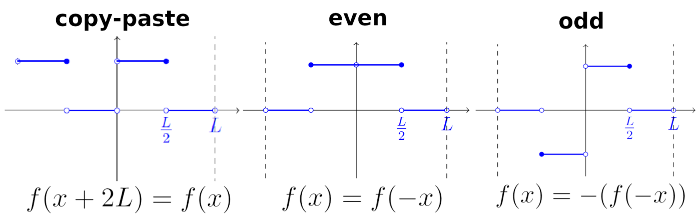
Fourier-Reihe für **ungerade** ($f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{D}$) Funktion f:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\right]$$

$$a_0=a_n=0, \quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

2.4 Expansion

Sei f definiert auf dem Intervall $(0, L)$ und $x \in \mathbb{R}$



Beispiel: Fourier-Reihe: Erweiterung gerade Funktion

- Erweitere $2x$ auf $(0, 1)$ zu einer geraden 2-periodischen Funktion und finde die Fourier-Reihe. Sei $f_g := \begin{cases} 2x & x \in (0,1) \\ -2x & x \in (-1,0 \end{cases}$

$$b_n=0 \quad ; \quad a_0=\int_0^1 2x\,dx=1$$

$$a_n=2\int_0^1 2x\cos(n\pi x)dx=4\left(x\frac{\sin(n\pi x)}{\pi n}\right)\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{\sin(\pi n x)}{n\pi}dx$$

$$=4\underbrace{\frac{\sin(\pi n)}{\pi n}}_{=0}+4\frac{\cos(\pi n x)}{\pi^2 n^2}\bigg|_0^1=4\frac{\cos(n\pi)-1}{\pi^2 n^1}=4\frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}$$

$$f(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^2}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)\pi x) \quad (n=2k-1)$$

2.5 Komplexe Fourier-Reihe

Sei f $2L$-periodisch, dann ist die komplexe Fourier-Reihe gegeben als:

$$\boxed{f(x)=c_0+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}c_n\cdot e^{\frac{i\pi n}{L}x}}$$

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\cdot e^{-\frac{i\pi n}{L}x}dx; \quad c_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx$$

$$a_0=c_0; \quad a_n=c_n+c_{-n}; \quad b_n=i\left(c_n-c_{-n}\right)$$

$$c_0=a_0; \quad c_n=1/2\cdot(a_n-ib_n); \quad c_{-n}=1/2\cdot(a_n+ib_n)$$

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos(x); \quad e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin(x)$$

Ergänzung: $e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \cdot \sin(x)$

2.6 Minimum square error

Der minimale quadratische Fehler eines trigonometrischen Polynomes N-ten Grades auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ist:

$$\boxed{E^*=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi\left(2a_0^2+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right)}$$

2.7 Absolut integrabel

Eine Funktion f ist **absolut integrabel**, wenn gilt: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$

2.8 Fourier Integral

Sei f stückweise stetig in jedem endlichen Interval, absolut integrabel und mit Links- und Rechtsableitungen an jeder Unstetigkeit.
Dann ist sein **Fourier-Integral**:

$$\boxed{f(x)=\int_0^{\infty}(A(\omega)\cos(\omega x)+B(\omega)\sin(\omega x))\,d\omega}$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos(\omega v)\,dv$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin(\omega v)\,dv$$

2.8.1 Gerade (even) Funktion

Ist f **gerade**, so gilt: $\quad f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(v)\cos(\omega v)\,dv \quad ; \quad B(\omega)=0$$

2.8.2 Ungerade (odd) Funktion

Ist f **ungerade**, so gilt: $\quad f(x)=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega$

$$A(\omega)=0 \quad ; \quad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(v)\sin(\omega v)\,dv$$

2.9 Fourier Transformation

Sei f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f :

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt}$$

Eigenschaften:

1. $\mathfrak{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathfrak{F}(f) + \beta\mathfrak{F}(g)$
2. Sei f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty}$ sowie f' (bzw. f'') absolut integrabel, so gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(f'(x)\right) &= i\omega\mathfrak{F}(f(x)) \\ \mathfrak{F}\left(f''(x)\right) &= -\omega^2\mathfrak{F}(f(x)) \\ \mathfrak{F}\left(x^2 f(x)\right) &= -\mathfrak{F}''(f(x)) \end{aligned}$$

3. Sei f, g stückweise stetig sowie beschränkt und absolut integrabel, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f * g) &= \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g) \\ \mathfrak{F}(f) * \mathfrak{F}(g) &= \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(f \cdot g) \end{aligned}$$

4. Weitere nützliche Transformationen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(u_t\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega, t) \\ \mathfrak{F}\left(t^2 u_x\right) &= t^2\mathfrak{F}\left(u_x\right) \\ \mathfrak{F}(x \cdot y(x))(\omega) &= i\mathfrak{F}\left(y'(x)\right)(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(xe^{-ax^2}\right)(\omega) &= \frac{i\omega}{(2a)^{3/2}} e^{\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)} \\ \mathfrak{F}^{-1}\left(i\omega e^{-b\omega^2}\right) &= \frac{x}{(2b)^{3/2}} e^{\left(-\frac{x^2}{4b}\right)} \end{aligned}$$

$$\hat{f}(\omega + a) = e^{-iax} \cdot \hat{f}(\omega)$$

2.9.1 Nützliche Integrale

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ak^2+bk+c\right)} dk = e^{\frac{b^2}{4a}-c}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

2.10 Inverse Fourier Transformation

Die **inverse** Fourier Transformation von g ist:

$$\boxed{\mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega}$$

Es gilt, wenn $g = \mathfrak{F}(f)$:

$$\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$$

Beispiel: Fourier Transformation

Sei $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} e^{-x}e^{-i\omega x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} e^{-(1+i\omega)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(1+i\omega)x}}{-(1+i\omega)}\bigg|_0^1 = \frac{1-e^{-(1+i\omega)}}{1+i\omega} \end{aligned}$$

Beispiel: Fourier Transformation

Sei $f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$f(x)$ ist gerade, also $B(\omega) = 0$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(v)\cos(\omega v) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{1} (1-v)\cos(\omega v) dv \\ &= \frac{2}{\pi} \underbrace{\frac{(1-v)\sin(\omega v)}{\omega}}_{=0} + \frac{2}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{\sin(\omega v)}{\omega} dv = \frac{-2}{\pi\omega^2}\cos(\omega v)\bigg|_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos(\omega)) \end{aligned}$$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos(\omega))\cos(\omega x) d\omega$$

3 PDEs

Eine partielle DGL (PDE) ist eine Gleichung, in welcher eine Funktion u sowie einige partielle Ableitung von u involviert sind.

- **Linear**: falls u und die partiellen Ableitungen mit Grad = 1 (Potenz) erscheinen. z.b. linear: $u_{xy} + u_z + u_t t = g(x, y, t)$
  z.b. non-linear: $u_{xy} \cdot u_z + u_t t = g(x, y, t)$
- **Homogen**: wenn sie linear ist und wenn jeder Term u oder eine partielle Ableitung enthält.
- **Ordung**: die maximale Ordnung aller involvierten Ableitungen.
- **Dimension**: number of space variables

3.1 Wichtige PDEs

- Eindimensionale Wellengleichung:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
(*linear, 2.Ordnung, homogen, hyperbolisch*)
- Eindimensionale Wärmegleichung:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
(*linear, 2.Ordnung, homogen, parabolisch*)
- Zweidimensionale Laplacegleichung:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
(*linear, 2. Ordnung, homogen, elliptisch*)
- Zweidimensionale Poissongleichung:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$
(*linear, 2.Ordnung, inhomogen, elliptisch*)
- Zweidimensionale Wellengleichung:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$
(*linear, 2.Ordnung, homogen, hyperbolisch*)
- Zweidimensionale Wärmegleichung:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$
(*linear, 2.Ordnung, homogen, parabolisch*)
- Dreidimensionale Laplacegleichung
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$
(*linear, 2.Ordnung, homogen, elliptisch*)

3.2 Lineare PDE 2.Ordnung

Eine lineare PDE 2.Ordnung kann man in die Form
$$Au_{xx} + \mathbf{2}Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$
Eine lineare PDE 2.Ordnung heisst

- **hyperbolisch**, falls $AC - B^2 < 0$
- **parabolisch**, falls $AC - B^2 = 0$
- **elliptisch**, falls $AC - B^2 > 0$
- **mixed type**, falls je nach Vorzeichen anders

Beispiel: PDE 2. Ordnung

- Sei $u(x, y) = x\sin(x + 2y)$, zeige: u löst $u + u_{xx} = \frac{1}{x}u_y$

$$\begin{aligned} u_x &= \sin(x + 2y) + x\cos(x + 2y) \\ u_{xx} &= \cos(x + 2y) + \cos(x + 2y) - x\sin(x + 2y) \\ u_y &= 2x\cos(x + 2y) \end{aligned}$$
$$\Rightarrow u + u_{xx} = 2\cos(x + 2y) \overset{!}{=} \frac{2x\cos(x + 2y)}{x} = \frac{u_y}{x}$$

3.3 Eindimensionale Wellengleichung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$
$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$
finden wir eine allgemeine Lösung:
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x \right) \tag{1}$$
$$\lambda_n = \frac{c n \pi}{L} \tag{2}$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) \tag{3}$$
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) \tag{4}$$
$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \tag{5}$$
$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \tag{6}$$

3.3.1 Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

3.3.2 Vorgehen 2: Separation der Variabeln

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$
$$u_{tt} = F\ddot{G}; \quad u_{xx} = F''G \quad \to F\ddot{G} = c^2 F''G$$
$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k; \quad \begin{cases} F'' = kF \\ \ddot{G} = c^2 kG \end{cases}$$
Randbedingungen finden:
$$\begin{aligned} u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \forall t \geq 0 &\Rightarrow \mathbf{F(0) = 0} \\ u(L, t) = F(L)G(t) = 0 \forall t \geq 0 &\Rightarrow \mathbf{F(L) = 0} \\ &\Rightarrow u(x, t) = F(x)G(t) \end{aligned}$$
Löse mit (1) Allgemeine Lösung: $\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = k$
$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} A_1 e^{\sqrt{k}x} + A_2 e^{-\sqrt{k}x} & k > 0 \\ A_1 \cos(\sqrt{|k|}x) + A_2 \sin(\sqrt{|k|}x) & k < 0 \\ A_1 x + A_2 & k = 0 \end{cases}$$
$$\mathrm{G(t)} = \begin{cases} B_1 e^{\sqrt{k}t} + B_2 e^{-\sqrt{k}t} & k < 0 \\ B_1 \cos(\sqrt{|k|}t) + B_2 \sin(\sqrt{|k|}t) & k > 0 \\ B_1 t + B_2 & k = 0 \end{cases}$$

Beispiel: Vorgehen 1: Eindimensionale Wellengleichung

- Löse für $L = \pi$: $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin(x) \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$

$c = 2$ & mit (2) $\lambda_n = 2n$. Mit (3) finden wir nichts ⇒ mit (5):
$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x)\sin(nx) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((1 - n)x) - \cos((1 + n)x))dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((1 - n)x)}{1 - n} - \frac{\sin((1 + n)x)}{1 + n} \right) \Bigg|_0^\pi = 0, \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$
Mit (3) folgt:
$$f(x) = \sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) = B_1 \sin(x) \quad \Rightarrow B_1 = 1$$
Aus (4) sehen wir direkt, dass $B_n^* = 0$
$$\Rightarrow u(x, t) = B_1 \cos(\lambda_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) = \cos(2t)\sin(x)$$

3.4 Eindimensionale Wellengleichung - d'Alembert

Sei $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Alembert-Lösung ist dann gegeben als:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

Beispiel: Eindimensionale Wellengleichung - d'Alembert

• Sei $u_{tt} = u_{xx}$ mit $u(x,0) = \frac{1}{x^2+1}$ und $u_t(x,0) = -1$
Die D'Alembertsche Lösung ist mit $c = 1$ dann

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+t)^2+1} + \frac{1}{(x-t)^2+1}\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}(-1)ds \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+t)^2+1} + \frac{1}{(x-t)^2+1}\right) - t \end{aligned}$$

Beispiel: Vorgehen 2: Separation der Variabeln

• Finde eine Lösung $u(x,t)$ der $\mathrm{PDF}\,\frac{1}{2}u_x + u_t = 0.$
Mit dem Ansatz $u(x,t) = F(x)G(t)$ folgt:

$$\frac{1}{2}F'(x)G(t) + F(x)\dot{G}(t) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{F'(x)}{F(x)} + \frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = 0$$

$$\forall x,t: \frac{F\prime(x)}{2F(x)} = \frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = \text{konst} = \lambda$$

$$\frac{1}{2F(x)}\frac{dF}{dx} = \lambda \Rightarrow \frac{dF}{F} = 2\lambda\, dx$$

$$\Rightarrow F(x) = e^{2\lambda x}C_1 \quad G(t) = C_2 e^{-\lambda t}$$

$$u(x,t) = F(x)G(t) = C_1 e^{2\lambda x} C_2 e^{-\lambda t} = Ce^{\lambda(2x-t)}$$

3.5 Normalform

Mit geeigneter Substitutionen kann eine PDE zweiter Ordnung in **Normalform** gebracht werden, d.h.:

$u_{vw} = F(v,w,u,u_v,u_w)$	hyperbolisch
$u_{vv} = F(v,w,u,u_v,u_w)$	parabolisch
$u_{vv} + u_{ww} = F(v,w,u,u_v,u_w)$	elliptisch

3.5.1 Vorgehen

Gegeben PDE zweiter Ordnung in $\{x,y\}$

- Bestimme A,B,C und die zwei Lösungen der charakteristischen Gleichung $A\left(y'\right)^2 - 2By' + C = 0$
- Fasse $y' = \frac{dy}{dx}$ als Steigung auf, integriere entsprechend und löse für die neue Integrationskonstanten C_1, C_2
- Substituiere $v = C_1, w = C_2$ und schreibe F sowie die Ableitungen der ursprünglichen Gleichung in v und w
- Setze alles in die PDE ein und erhalte die Normalform
- Integriere entsprechend und substituiere zurück, um die allgemeine Lösung zu erhalten

hyperbolisch:	$v = \varphi(x,y)$	$w = \psi(x,y)$
parablisch:	$v = x$	$w = \psi(x,y)$
elliptisch:	$v = \frac{1}{2}[\varphi(x,y) + \psi(x,y)]$	$w = \frac{1}{2}[\varphi(x,y) - \psi(x,y)]$

Beispiel: Normalform

Bringe $u_{xx} + 2u_{xy} = -4e^y$ in Normalform und gib die allgemeine Lösung an
$A = B = 1, \quad C = 0 \rightarrow$ charakteristische Gleichung $\left(y'\right)^2 - 2y' = 0$
Lösungen der char. Gleichung: $y_1' = 0$ und $y_2' = 2$
Fall $1: y' = 0 \rightarrow dy = 0dx \Rightarrow y = C_1$
Fall $2: y' = 2 \rightarrow dy = 2dx \Rightarrow y = 2x + C_2 \rightarrow C_2 = y - 2x$

$$v = C_1 = y \text{ und } w = C_2 = y - 2x$$

$$\text{Vorbereitung: } v_x = 0; v_y = 1; w_x = -2; w_y = 1$$

$$u_x = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dw}\frac{dw}{dx} = u_v v_x + u_w w_x = -2u_w$$

$$u_{xx} = -2u_{wv}v_x - 2u_{ww}w_x = 4u_{ww}$$

$$u_{xy} = -2u_{wv}v_y - 2u_{ww}w_y = -2u_{wv} - u_{ww}$$

$$F = -4e^y = -4e^v$$

$$u_{ww} + 2\left(-2u_{wv} - 2u_{ww}\right) = -4e^v \quad \Rightarrow u_{wv} = e^v \text{ (Normalform)}$$

$$u(v,w) = \iint u_{wv}\,dwdv = \iint e^v\,dwdv = \int \left[w \cdot e^v + \tilde{\varphi}(v)\right]dv$$

$$= w \cdot e^v + \varphi(v) + \psi(w)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = (y-2x)e^y + \underbrace{\varphi(y) + \psi(y-2x)}_{\text{min. 2x stetig diff'bar}}$$

3.6 Wärmeleitungsgleichung (Heat equation)

3.6.1 Vorgehen 1:

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit Randbedingungen $u(0,t) = u(L,t) = 0$ und $u(x,0) = f(x)$ auf $x \in [0,L]$. Via Fourier-Reihe erhalten wir die Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad ; \quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

⇒ Manchmal ist B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmbar!

3.6.2 Vorgehen 2:

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit Randbedingungen $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ und $u(x,0) = f(x)$ nur auf $x \in (0,L)$.

- Nimm den Ansatz $u(x,t) = F(x)G(t)$, separiere F und G, bestimme die Konditionen der Randbedingungen (der ODE für F und G) durch Betrachten von u_x.
- Löse die ODEs für F und G, setze sie zu u_n zusammen
- Verwende Superposition und schreibe

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

- Benutze weitere Randbedingungen und vergleiche Koeffizienten in u mit denjenigen der Fourier-Reihe der 2L-periodischen geraden Fortsetzung von f

Allgemeine Lösung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) e^{-c^2 n^2 t}$$

3.7 Zeitunabhängige n-dim Wärmeleitungsgleichung

Die zeitunabhängige n-dimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2\Delta u = c^2\nabla^2 u$ kann auf die n-dimensionale Laplacegleichung $\Delta u = 0$ reduziert werden. Für $n = 2$, Randbedingungen $u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0$ und $u(x,b) = f(x)$ mit $(x,y) \in [0,a][0,b]$ sprechen wir vom **Dirichlet-Problem**.
Dessen Lösung mit Separation und Superposition ist:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$A_n = \frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

⇒ Manchmal ist A_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmbar!

Beispiel: Zeitunabhängige n-dim Wärmeleitungsgleichung

- Sei $u_t = u_{xx}$ auf $x \in [0, 2\pi]$
mit $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, u(x,0) = x$ auf $0 < x < \pi$
Mit $u = F \cdot G$ erhalten wir $\begin{cases} F'' = \lambda F, & \dot{G} = \lambda G \\ F'(0) = F'(\pi) = 0 \end{cases}$

- $\lambda > 0$ allg. Lösung $F(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$
Randbedingungen ergeben: $A = B = 0 \to$ uninteressant
- $\lambda = 0$: erhalten wir $F(x) = 0 \to$ uninteressant
- $\lambda < 0$: allg. Lösung $F(x) = A\cos(px) + B\sin(px)$ wobei $p = \sqrt{-\lambda}$.

Mit $F'(0) = -Ap\sin(0) + Bp\cos(0) = 0$ finden wir $B = 0$ und mit $F'(\pi) = -\mathrm{Apsin}(p\pi) = 0 \Rightarrow p = p_n = n$
Unterdessen $\dot{G} = -p^2 G$ und $G(t) = C \cdot e^{-p^2 t} \to G_n(t) = C_n \cdot e^{-p_n^2 t}$

- $u_n(x,t) = F_n \cdot G_n = A_n\cos(p_n)G_n e^{-p_n^2 t} =: D_n\cos(nx)e^{-n^2 t}$ und $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$
- Weiter gilt $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\cos(nx) = x$. Koeffizienten der 2π-periodischen Funktion:

$$D_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$D_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & n = 2m \\ -4 & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2x+1)^2}\cos((2m+1)x)e^{(-2m+1)t}$$

3.8 Wärmeleitungsgleichung eines unendlichen Gebietes

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit $u(x,0) = f(x)$ auf einem unendlichen Gebiet ($x \in \mathbb{R}, t \geq 0$). Dann ist die Lösung:

Vorgehen mit Fourier-Integral

$$u(x,t) = \int_0^{\infty}(A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px))e^{-c^2p^2t}dp$$

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(pv)dv$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(pv)dv$$

Bemerkung: Achte auf gerade/ungerade Funktionen

Vorgehen mit Fourier-Transformation

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit $\mathcal{F}(u_{xx}) = -\omega^2$, $\mathcal{F}(u) = -\omega^2\hat{u}$ und $\mathcal{F}(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u) = \hat{u}_t$ können wir die Gleichung transformieren:

$$\hat{u}_t = -c^2\omega^2\hat{u}$$

dann diese ODE für $\hat{u}$ lösen, die transformierte Anfangsbedingung einsetzen und $u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})$ bestimmen.

Bemerkung: $\mathcal{F}$ ist immer in Bezug auf x.

Vorgehen mit Formel:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\exp\left[-\left(\frac{x-v}{2c\sqrt{t}}\right)^2\right]dv$$

Beispiel: Vorgehen mit Fourier-Integral

- Sei $u_t = u_{xx}$ mit $u(x,0) = \begin{cases} 2 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos(pv)dv = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(pv)}{p}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi p}\sin(p\pi)$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin(pv)dv = \frac{2}{\pi}\frac{-\cos(pv)}{p}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi p}(1 - \cos(\pi p))$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(p\pi)\cos(px) + (1 - \cos(p\pi)\sin(px))}{p}e^{-p^2t}dp$$

Beispiel: Vorgehen mit Fourier-Transformation/Formel

- Sei $u_t = 4u_{xx}$ und $u(x,0) = f(x) = \sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$
$\hat{u}_t = -4\omega^2\hat{u}$ und die allg. Lösung: $\hat{u} = C \cdot e^{-4\omega^2 t}$
Mit der Anfangsbedingung folgt $\hat{u} = \hat{u}(\omega,0)e^{-4\omega^2 t}$, nun $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f} = e^{-\omega^2}$, somit ist $\hat{u} = e^{-\omega^2(1+4t)}$ mit der Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ak^2+bk+c\right)}dk = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{4a}-c}$$

folgt dann

$$u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+4t)}}e^{\frac{-x^2}{4+16t}}$$

3.9 Dirichlet auf dem Kreis

Für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf der geschlossenen Kreisscheibe D mit Radius R und einer Randbedingung...

- ... $u(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D finden wir die Lösung

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)$$

Wir bestimmen A_n und B_n mit Koeffizientenvergleich oder sonst mit:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)d\xi$$

$$A_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)d\xi, \quad B_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin(n\xi)d\xi$$

- $\ldots u_r(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D gilt die Lösung

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)$$

mit $A_n = \dfrac{1}{nR^{n-1}\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)d\xi, \quad B_n = \dfrac{1}{nR^{n-1}\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin(n\xi)d\xi$

und A_0 ist eine nicht näher bestimmbare Konstante.

3.9.1 Bemerkungen

- Koordinatentransformationen

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

- Die Laplace-Gleichung (für $r \in [0,R)$, $\theta \in [0,2\pi)$)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{wird zu} \quad u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r = 0$$

Beispiel: Dirichlet auf dem Kreis (Lösung auf dem Rand)

• Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$. Finde die Lösung der Laplace-gleichung mit $u(x,y) = 2x^2 + y$ auf dem Rand (∂D)

$$u(x,y) = 2x^2 + y = 2r^2\cos^2(\theta) + r\sin(\theta) \overset{r\equiv 1}{=} 2\cos^2(\theta) + \sin(\theta)$$

$$= (\cos(\theta)+1)\sin(\theta)$$

$$u(1,\theta) = f(\theta) = 1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)$$

$$\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

$\to A_0 = 1, B_1 = 1, A_2 = 1$ alle andern $A_n, B_n = 0$

$$u(r,\theta) = 1 + r\sin(\theta) + r^2\cos(2\theta)$$

Beispiel: Dirichlet auf dem Kreis (Lösung auf dem Kreis)

• Finde die Lösung der Laplacegleichung auf dem Kreis D mit $R = 2$ und $u_r(2,\theta) = \cos(3\theta)$ auf ∂D.
Es gilt $u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$, also:

$$u_r(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

$$u_r(2,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right) \overset{!}{=} \cos(3\theta)$$

$\to B_n = 0, n = 3 \to \cos(3\theta) = 3\cdot 2^{3-1}A_3\cos(3\theta)$
$\Rightarrow A_3 = \frac{1}{12}, A_n$ sonst $= 0$

$$u(r,\theta) = A_0 + \frac{1}{12}r^3\cos(3\theta)$$

A_0 ist nicht bestimmbar

3.10 Poisson-Integral-Form

• Sei $\Delta u = 0$ und $u(R,\theta) = f(\theta)$ auf dem Kreis mit Radius R. Dann ist die Lösung mittels Poisson-Integral-Form gegeben als:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\theta,R,\varphi)f(\varphi)\,d\varphi$$

$$\text{Poisson-Integral-Kern} K(r,\theta,R,\varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\varphi) + r^2}$$

Beispiel: Poisson-Integral-Form

Sei $u(1,\theta) = f(\theta) = \cos(3\theta)$ auf dem Rand der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Finde den Funktionswert von u im Ursprung, ohne die Lösung u explizit zu berechen:
Es gilt $K(0,\theta,R,\varphi) = 1$. Poisson-Formel:

$$u(0,0) = u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(0,\theta,1,\varphi)f(\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(3\varphi)d\varphi = \frac{1}{6\pi}\sin(3\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

3.11 Harmonische Funktionen

Eine Funktion, die die Laplace-Gleichungs $\Delta u = 0$ auf D erfüllt, heisst *harmonisch* auf dem Gebiet D.
Maximumsprinzip: Nimmt auf dem Gebiet D die harmonische Funktion u ihr Maximum im Innern von D an, so ist sie konstant.
Somit genügt es, für eine harmonische Funktion auf D ihr Maximum nur auf dem Rand ∂D zu suchen.
Ist u harmonisch auf der Kreisscheibe mit Radius R, so gilt der Mittelwert-satz insbesondere in folgender Form:

$$f(0,0) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} f(R,\theta)d\theta$$

Beispiel: Harmonische Funktionen

• Finde das Maximum von $f(x,y) = x+y$ auf der Einheitskreisscheibe.

$$f(r,\theta) = r(\cos(\theta)+\sin(\theta)) \to \text{ harmonisch, Suche auf Rand:}$$
$$f(1,\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$$

Ort des Maximums: $\frac{\partial}{\partial\theta}f(1,\theta) = \cos(\theta) - \sin(\theta) = 0 \to \theta = \frac{\pi}{2}$ Das Maximum ist bei $(1, \frac{\pi}{2})$, respektive $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und der Funktionswert ist $\sqrt{2}$.
Randmaxima überprüfen! $\to$ wenn f auf (0, π) definiert ist muss man 0 und π anschauen.

3.12 Well-posed und ill-posed Probleme

Wir nennen ein Problem *well-posed*, falls:

- Das Problem hat eine Lösung. (Existence)
- Die Lösung ist eindeutig. (Uniqueness)
- Die Lösung ist von Anfangsbedingungen und Randbedingungen abhängig. (Stability)

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, ist das Problem *ill-posed*.

3.12.1 Das Neumann Problem auf Region D

$$\begin{cases} \Delta u = \nabla^2 u = f & \text{auf } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial D. \end{cases}$$

hat eine eindeutige Lösung wenn $\int_D f = \int_{\partial D} g$.

4 Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Separationsansatz: $u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{Tc^2} = \alpha$

4.1 $\alpha = 0$

4.1.1 $\alpha = 0 \Rightarrow X'' = 0$

$$X(x) = Ax + B$$

$$X'(x) = A$$

4.1.2 $\alpha = 0 \Rightarrow \ddot{T} = 0$

$$T(t) = Ct + D$$

$$\dot{T}(t) = C$$

4.2 $\alpha > 0$

4.2.1 $\alpha > 0 \Rightarrow X'' - \alpha X = 0$

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

$$X'(x) = \sqrt{\alpha}Ae^{\sqrt{\alpha}x} - \sqrt{\alpha}Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

4.2.2 $\alpha > 0 \Rightarrow \ddot{T} - \alpha c^2 T = 0$

$$T(t) = Ce^{c\sqrt{\alpha}t} + De^{-c\sqrt{\alpha}t}$$

$$\dot{T}(t) = c\sqrt{\alpha}Ce^{c\sqrt{\alpha}t} - c\sqrt{c\alpha}De^{-c\sqrt{\alpha}t}$$

4.3 $\alpha < 0$ (am besten $\alpha = -p^2, \quad p \in \mathbb{R}_+$ definieren)

4.3.1 $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -p^2, \quad X'' + p^2 X = 0$

$$X(x) = A\sin(px) + B\cos(px)$$

$$X'(x) = pA\cos(px) - pB\sin(px)$$

4.3.2 $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -p^2, \quad \ddot{T} + p^2c^2T = 0$

$$T(t) = C\sin(pct) + D\cos(pct)$$

$$\dot{T}(t) = pcC\cos(pct) - pcD\sin(pct)$$

5 Wärmeleitgleichung

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

Separationsansatz: $u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{\dot{T}}{Tc^2} = \alpha$

5.1 $\alpha = 0$

5.1.1 $\alpha = 0 \Rightarrow X'' = 0$

$$X(x) = Ax + B$$

$$X'(x) = A$$

5.1.2 $\alpha = 0 \Rightarrow \dot{T} = 0$

$$T(t) = C$$

$$\dot{T}(t) = 0$$

5.2 $\alpha > 0$

5.2.1 $\alpha > 0 \Rightarrow X'' - \alpha X = 0$

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

$$X'(x) = \sqrt{\alpha}Ae^{\sqrt{\alpha}x} - \sqrt{\alpha}Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

5.2.2 $\alpha > 0 \Rightarrow \dot{T} - \alpha c^2 T = 0$

$$T(t) = Ce^{c^2\alpha t}$$

$$\dot{T}(t) = Cc^2\alpha e^{c^2\alpha t}$$

5.3 $\alpha < 0$ (am besten $\alpha = -p^2, \quad p \in \mathbb{R}_+$ definieren)

5.3.1 $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -p^2, \quad X'' + p^2 X = 0$

$$X(x) = A\sin(px) + B\cos(px)$$

$$X'(x) = pA\cos(px) - pB\sin(px)$$

5.3.2 $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -p^2, \quad \dot{T} + \sqrt{p}c^2T = 0$

$$T(t) = Ce^{-c^2p^2t}$$

$$\dot{T}(t) = -Cc^2p^2e^{-c^2p^2t}$$

6 Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 u = \Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots$$

Seperationsansatz: $u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \alpha$

6.1 $\alpha = 0$

6.1.1 $\alpha = 0 \Rightarrow X'' = 0$

$$X(x) = Ax + B$$
$$X'(x) = A$$

6.1.2 $\alpha = 0 \Rightarrow Y'' = 0$

$$Y(y) = Cy + D$$
$$Y'(y) = C$$

6.2 $\alpha > 0$

6.2.1 $\alpha > 0 \Rightarrow X'' - \alpha X = 0$

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$
$$X'(x) = \sqrt{\alpha}Ae^{\sqrt{\alpha}x} - \sqrt{\alpha}Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

6.2.2 $\alpha > 0 \Rightarrow Y'' + \alpha Y = 0$

$$Y(y) = A\sin(\sqrt{\alpha}y) + B\cos(\sqrt{\alpha}y)$$
$$Y'(y) = \sqrt{\alpha}A\cos(\sqrt{\alpha}y) - \sqrt{\alpha}B\sin(\sqrt{\alpha}y)$$

6.3 $\alpha < 0$ (am besten $\alpha = -p^2, \quad p \in \mathbb{R}_+$ definieren)

6.3.1 $\alpha < 0 \Rightarrow X'' + p^2 X = 0$

$$X(x) = A\sin(px) + B\cos(px)$$
$$X'(x) = pA\cos(px) - pB\sin(px)$$

6.3.2 $\alpha < 0 \Rightarrow Y'' - p^2 Y = 0$

$$Y(y) = Ae^{py} + Be^{-py}$$
$$Y'(y) = pAe^{py} - pBe^{-py}$$

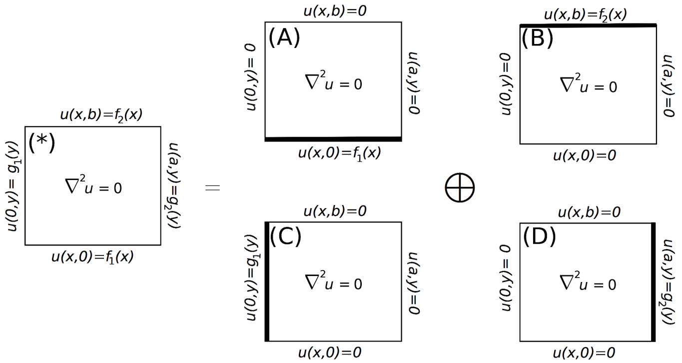
6.3.3 Anmerkung:

$$E_1e^{ay} - E_1e^{-ay} = E_2\sinh(ay)$$
$$E_1e^{ay} + E_1e^{-ay} = E_2\cosh(ay)$$

6.4 Allgemeine Lösung der PDE

$$u(x,y) = [C\cosh(kx) + D\sinh(kx)][A\cos(ky) + B\sin(ky)]$$

6.5 Superposition eines Dirichlet Problem



Lösung für A:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sinh(\frac{n\pi(b-y)}{a})$$

$$A_n = \frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})} \int_0^a f_1(x) \sin(\frac{n\pi x}{a}) \mathrm{d}x$$

Lösung für B:

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sinh(\frac{n\pi y}{a})$$

$$B_n = \frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})} \int_0^a f_2(x) \sin(\frac{n\pi x}{a}) \mathrm{d}x$$

Lösung für C:

$$u_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(\frac{n\pi(a-x)}{a}) \sin(\frac{n\pi y}{b})$$

$$C_n = \frac{2}{b\sinh(\frac{n\pi a}{b})} \int_0^b g_1(y) \sin(\frac{n\pi y}{b}) \mathrm{d}y$$

Lösung für D:

$$u_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh(\frac{n\pi x}{b}) \sin(\frac{n\pi y}{b})$$

$$D_n = \frac{2}{b\sinh(\frac{n\pi a}{b})} \int_0^b g_2(y) \sin(\frac{n\pi y}{b}) \mathrm{d}y$$

Lösung für A+B+C+D=(*):

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

7 Quellen für die ZF

Diese Zusammenfassung beruht auf der Zusammenfassung von **Benno Kaeslin, Linard Furck, Sandro Christen, Markus Fuchs, Andre Jauch**.
Ausserdem enthält sie einige kleine Zusätze oder Änderungen, die meistens aus der Vorlesung Analysis III für Maschineningenieurswissenschaften (HS 2022) oder aus der Übungsstunde von **Chantal Woodtli** stammen.
Die Übersicht über PDEs habe ich mit kleinen Änderungen von **Steivan Claglüna** kopiert.
Die Zusammenfassung enthält bewusst im Kapitel Laplace Trasformation genau die Tabelle, die in den letzten Jahren an der Prüfung mitgegeben wurde. Danach gibt es noch mehr Transformationen, diese darf man jedoch nicht immer direkt verwenden (bzw. nur zur Kontrolle).
Die Grundlage für das Template habe ich von der Amiv-ZF "Signal und Systemtheorie II" von **Adrian Hartmann** (FS 2019).
Bei Verbesserungsvorschlägen oder Fehlern bitte eine mail an mich (lauspurg@ethz.ch) schreiben. Viel Erfolg bei den Prüfungen.