Laplace Transformation

Definitionen

Sei $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}, t \to f(t)$:

$$\boxed{F(s) = \mathscr{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt}$$

Inverse Laplace Transformation:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$$

Linearität

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und Funktionen f, g gilt:

$$\mathscr{L}(af(t) + bg(t)) = a\mathscr{L}(f(t)) + b\mathscr{L}(g(t))$$

Beispiele

Sei $f(t) = 2t + e^t$, dann ist

$$\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(2 \cdot t + 1 \cdot e^t) = 2\mathscr{L}(t) + \mathscr{L}(e^t) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s-1}$$

Sei $F(s) = \frac{4}{s^5}$

$$\mathscr{L}^{-1}(F) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{24}{s^5} \cdot \frac{1}{6}) = \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}(\frac{24}{s^5}) = \frac{1}{6}t^4$$

Sei $F(x) = \frac{a}{bs+c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$F(s) = \frac{a}{bs+c} = \frac{a/b}{s + c/b} = \frac{a/b}{s-(-c/b)}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}(F) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{\frac{a}{b}}{s-(-\frac{c}{b})}) = \frac{a}{b}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s-(-\frac{c}{b})}) = \frac{a}{b}e^{-\frac{c}{b}t}$$

s-shifting (Verschiebung im Bildbereich)

Sei $\mathscr{L}(f)(s) = F(s)$, dann gilt:

$$\mathscr{L}(e^{at} \cdot f(t)) = F(s-a)$$

LT von Ableitungen

Sei $f \in C^{n-1}$ (f ist $n-1$-mal stetig diferenzierbar) und $f(n)$ stückweise stetig, dann gilt:

$$\mathscr{L}(f^{(n)})(s) = s^n \cdot \mathscr{L}(f)(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} \cdot f^{(j)}(0)$$

für alle $n \geq 1$

$\mathscr{L}(f') = s\mathscr{L}(f) - f(0)$
$\mathscr{L}(f'') = s^2\mathscr{L}(f) - sf(0) - f'(0)$
$\mathscr{L}(f^n) = s^n\mathscr{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$

LT von Intergralen

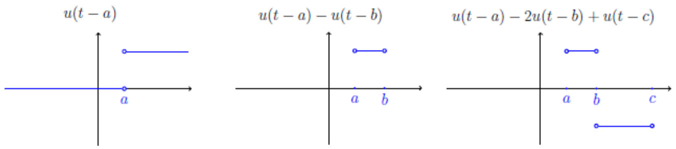
Sei f stückweise stetig, beschränkt. Dann gilt:

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right) = F(s) \cdot \frac{1}{s}$$

t-shifting, Heaviside function

$$\text{If } a \geq 0, \quad u(t-a) := \begin{cases} 1 & \text{if } t > a \\ 0 & \text{if } t < a \end{cases}$$

$$\mathscr{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s}$$



$$\mathscr{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s)$$

$$\mathscr{L}(f(t)u(t-a)) = e^{-as}\mathscr{L}(f(t+a))$$

Dirac's delta function

Für $a \in [0, \infty)$ gilt:

$$\delta(t-a) := \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1$$

$$\int_0^\infty g(t)\delta(t-a)dt = g(a)$$

Beispiele

Sei $f(t) = e^{2t} \cdot cos(\omega t) \Rightarrow a = 2$ (t-shifting)

$$L(cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \mathscr{L}(f)(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + \omega^2}$$

Sei die DGL $y'' - y' + y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$

$$\mathscr{L}(y'' - y' + y) = \mathscr{L}(0) = 0 = \mathscr{L}(y'') - \mathscr{L}(y') + \mathscr{L}(y)$$

$$s^2\mathscr{L}(y) - \underbrace{sy(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=1} - (s\mathscr{L}(y) - \underbrace{y(0)}_{=0}) + \mathscr{L}(y) = 0$$

$$\mathscr{L}(y) = \frac{1}{s^2 - s + 1} = \frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{(s-\frac{1}{2})^2 + (\sqrt{\frac{3}{4}})^2}$$

$$y = \mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}(y)) = \sqrt{\frac{4}{3}} e^{\frac{1}{2}t} sin(\sqrt{\frac{3}{4}}t)$$

Sei $f(t) = t^2$, dann ist $f(t-a) = (t-a)^2$, betrachte $u(t-a)f(t-a)$

$$\mathscr{L}(u(t-a)f(t-a)) = e^{-as}\mathscr{L}(f) = e^{-as}\frac{2}{s^3}$$

Sei $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^4} = e^{-2s}\frac{1}{6}\underbrace{\frac{3}{s^4}}_{=\mathscr{L}(t^3)}$

$$\mathscr{L}^{-1}(F) = \mathscr{L}^{-1}(e^{-2}\frac{1}{6}\frac{3}{s^4}) = \begin{cases} \frac{1}{6}(t-2)^3 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

Convolution (Faltung)

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Eigenschaften:

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $f * 0 = 0 * f = 0$
5. $f * 1 \neq f$
6. $f * f$ ist nicht zwingend ≥ 0

$$\boxed{\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f) \cdot \mathscr{L}(g)}$$

Ableitung der LT

Sei f stückweise stetig und beschränkt, dann gilt:

$$\mathscr{L}(tf(t)) = -\mathscr{L}'(f) = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}(f)$$

$$\mathscr{L}^{-1}(F'(s)) = -tf(t)$$

Integral der LT

Existiert ferner $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$, so gilt:

$$\mathscr{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \mathscr{L}(f)(\sigma)d\sigma$$

Lösen von DGL mit LT

1. DGL finden und LT anwenden ($\mathscr{L}(y) = Y$)
   $\Rightarrow$ Anfangsbedingungen einsetzen
   $y'' + ay' + by = r(t)$
   $(s^2Y - sy(0) - y'(0)) + a(sY - y(0)) + bY = R(s)$
2. Nach Y lösen
   $(s^2 + as + b)Y = R(s) + sy(0) + y'(0) + ay(0)$
3. Inverse LT von $\mathscr{L}(y)$ berechnen

Falls Anfangsbedingungen so gegeben $y(a), y'(a), ...$:

- Stubstituieren: $t = \tilde{t} + a$
- $y'' + ay' + by = r(t) \Rightarrow \tilde{y}'' + a\tilde{y}' + b\tilde{y} = r(\tilde{t} + a)$
  $\tilde{y}(0) = y(a), \tilde{y}'(0) = y'(a), ...$
- Normal lösen $\Rightarrow \tilde{Y} \to \tilde{y}(\tilde{t})$
- Rücksubstituieren: $\tilde{t} = t - a$; $\tilde{y}(\tilde{t}) \to y(t)$

Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen des Nenners finden $\to n_i$
2. $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + ... + \frac{Z}{x-x_i}$
   $\Rightarrow$ Komplexe NS z_i & $\bar{z}_i$ von $x^2 + p_i x + q_i$: $\frac{Bx+C}{x^2+p_ix+q_i}$
3. Brüche so erweitern, dass alles wieder auf einem Bruchstrich Platz hat.
4. Bestimmen der Konstanten $A, B, C, ...$ durch Koeffizientenvergleich

Beispiele

Sei $t * sin(t) = \int_0^t sin(\tau)(t-\tau)d\tau$

$$= \int_0^t \big(t \cdot sin(\tau) - \tau \cdot sin(\tau)\big)d\tau = -t\ cos(\tau) - sin(\tau) + \tau\ cos(\tau)\Big|_0^t$$

$$= -t\ cos(t) - sin(t) + t\ cos(t) + t = t - sin(t)$$

Sei $y' + y = \delta(t-\pi) + u(t-2\pi)sin(t), \quad y(0) = 1$

$$LHS: \qquad \mathscr{L}(y') + \mathscr{L}(y) = s\mathscr{L}(y) - 1 + \mathscr{L}(y) = \mathscr{L}(y)(s+1) - 1$$

$$RHS: \qquad = e^{-\pi s} + e^{1\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

$$y = \mathscr{L}^{-1}(e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s}\frac{1}{(s^2+1)(s+1)} + \frac{1}{s+1})$$

$$= u(t-\pi)e^{-(t-\pi)} + u(t-2\pi)\frac{1}{2}(sin(t-2\pi) - cos(t-2\pi) + e^{-(t-2\pi)}) + e^{-t}$$

$$= e^{-t} + u(t-\pi)e^{\pi}e^{-t} + u(t-2\pi)\frac{1}{2}(sin(t) - cos(t) + e^{2\pi}e^{-t})$$

Finde $\mathscr{L}\left(\frac{sin(t)}{t}\right)$, schreibe $f(t) = sin(t)$

Prüfe: $\lim_{t\to 0}\frac{sin(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{cos(t)}{1} = 1$

Dann folgt: $\mathscr{L}\left(\frac{sin(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \mathscr{L}(sin)(\sigma)d\sigma = \int_s^\infty \frac{1}{\sigma^2+1}d\sigma$

$$= arctan(\sigma)\big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - arctan(s)$$

Transformationen

$f(t)$	$\mathscr{L}(f(t)) = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	s^n
$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f^n(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - ... - f^{n-1}(0)$
$f * g(t)$	$F(s) \cdot G(s)$
$t^n \quad (n = 0, 1, 2, ...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
$sin^2(kt)$	$\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
$cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$cos^2(kt)$	$\frac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$ln(at)$	$-\frac{1}{s}\left(ln\left(\frac{s}{a}\right) + \gamma\right)$
$sinh(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
$cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{ae^{at}-be^{at}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
t^ne^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$-tf(t)$	$F'(s)$
$t^2f(t)$	$F''(s)$
$(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s}F(s)$
$\int_0^t \frac{(t-q)^{n-1}f(q)}{(n-1)!}dq, \ {\scriptstyle n \leq 1}$	$\frac{1}{s^n}F(s), \ n \geq 1$
$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)du$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$e^{at}sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at}cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at}sinh(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2-k^2}$
$e^{at}cosh(kt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2-k^2}$
$tsin(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
$tcos(kt)$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
$tsin(t)cos(t)$	$\frac{2s}{(s^2+4)^2}$
$tsinh(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
$tcosh(kt)$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2-k^2)^2}$
$sin(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2i} \cdot (F(s-ia) - F(s+ia))$
$cos(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-ia) + F(s+ia))$
$sinh(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-a) - F(s+a))$
$cosh(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-a) + F(s+a))$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}e^{-a^2/4t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$

Fourier

Periode

Eine Funktion $f(x)$ ist **periodisch**, wenn a) f für genügend viele $x \in \mathbb{R}$ definiert ist und b) ein $p \in \mathbb{R}, p > 0$ existiert, so dass $f(x) = f(x+p)$ definiert sind. p heisst dann **Periode**.

Fourier-Reihe

Damit die Fourier Reihe gegen $f(x)$ konvergiert, muss $f(x)$ auf dem ganzen Intervall definiert sein und für jede Unstetigkeit x_0 im Intervall muss das **Dirichlet Theorem** gelten. Konstanten $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und Periode $p = 2L$.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\tfrac{n\pi}{L}x\right) + b_n sin\left(\tfrac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Dirichlet Theorem

Bei Unstetigkeiten $f(x^-) \neq f(x^+)$ konvergiert die Fourier Reihe zu:

$$\frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+)) = f(x_0)$$

Beispiele

Berechnen die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion $f(x) = \pi - x$ definiert auf $(-\pi, \pi)$

$$2\pi = p = 2L \quad \rightarrow L = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\ cos\left(\frac{\pi n}{\pi}x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\ cos(nx)dx$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\ cos(nx)dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\ cos\left(\frac{\pi x}{\pi}x\right)dx = ... = \frac{2\ cos(n\pi)}{n}$$

$$\Rightarrow f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\ cos(n\pi)}{n}sin(nx)$$

Sei f 2-periodisch $\begin{cases} e^{1-\frac{1}{x^2}} & 0 < x < 1 \\ \frac{2}{x^2+1} & -1 < x < 0 \end{cases}$

$$f(1^+) = f(1^-) = 1 \qquad ; \qquad f(-1^+) = f(-1^-) = 1$$

$$f(0^+) = 0, \quad f(0^-) = 2 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}(0+2) = 1$$

gerade (even) Funktionen

Ein Funktion f ist **gerade**, wenn für alle x im Definitionsbereich gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

Fourier-Reihe für gerade Funktion:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\tfrac{\pi n}{L}x\right)\right]$$

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

Zusatz: $f(a \cdot x) = \frac{1}{a}\int_0^\infty A(\frac{\omega}{a}) \cdot cos(\omega x)d\omega$

ungerade (odd) Funktionen

Ein Funktion f ist **ungerade**, wenn für alle x im Definitionsbereich gilt:

$$f(x) = -f(-x)$$

Fourier-Reihe für ungerade Funktion:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n sin\left(\tfrac{\pi n}{L}x\right)\right]$$

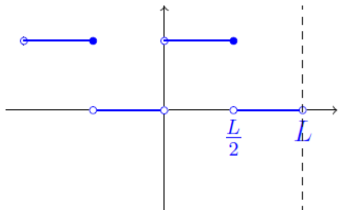
$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

Expansion

Sei f definiert auf dem Intervall $(0, L)$

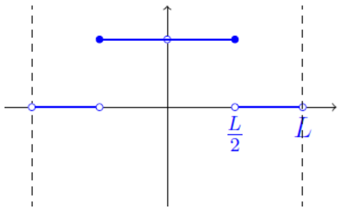
copy-paste expansion

$f(x+2L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$



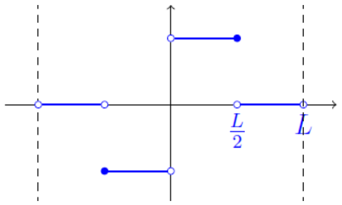
even expansion

$f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$



odd expansion

$f(x) = -(f(-x))$ für alle $x \in (R)$



Komplexe Fourier-Reihe

Sei f $2L-$periodisch, dann ist die komplexe Fourier-Reihe gegeben als:

$$f(x) = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{i\pi n}{L}x}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot e^{-\frac{i\pi n}{L}x} \quad ; \quad c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_0 = c_0 \ ; \quad a_n = c_n + c_{-n} \ ; \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2cos(x); \qquad e^{ix} - e^{-ix} = 2isin(x)$$

Ergänzung: $e^{\pm ix} = cos(x) \pm i \cdot sin(x)$

Minimum square error

Der minimale quadratische Fehler eines trigonometrischen Polynomes N-ten Grades auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ ist:

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left(2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right)$$

Beispiele

Erweitere $2x$ auf $(0,1)$ zu einer geraden 2-periodischen Funktion und finde die Fourier-Reihe. Sei $f_g := \begin{cases} 2x & x\in(0,1) \\ -2x & x\in(-1,0)\end{cases}$

$$b_n = 0 \quad ; \qquad a_0 = \int_0^1 2x dx = 1$$

$$a_n = 2\int_0^1 2x cos(n\pi x)dx = 4\left(x\frac{sin(n\pi x)}{\pi n}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{sin(\pi n x)}{n\pi}dx$$

$$= 4\underbrace{\frac{sin(\pi n)}{\pi n}}_{=0} + 4\frac{cos(\pi n x)}{\pi^2 n^2}\Big|_0^1 = 4\frac{cos(n\pi)-1}{\pi^2 n^1} = 4\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^2}\frac{1}{(2k-1)^2}cos((2k-1)\pi x) \qquad (n = 2k-1)$$

Absolut integrabel

Eine Funktion f ist absolut integrabel, wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$$

Fourier Integral

Sei f stückweise stetig in jedem endlichen Interval, absolut integrabel und mit Links- und Rechtsableitungen an jeder Unstetigkeit. Dann ist sein Fourier-Integral:

$$f(x) = \int_0^{\infty}(A(\omega)cos(\omega x) + B(\omega)sin(\omega x))\, d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)cos(\omega v)\, dv$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)sin(\omega v)\, dv$$

Gerade (even) Funktion

Ist f gerade, so gilt:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)cos(\omega v)\, dv \quad ; \qquad B(\omega) = 0$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega)cos(\omega x)\, d\omega$$

Ungerade (odd) Funktion

Ist f ungerade, so gilt:

$$A(\omega) = 0 \quad ; \qquad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)sin(\omega v)\, dv$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega)sin(\omega x)\, d\omega$$

Fourier Transformation

Sei Funktion f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f:

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Eigenschaften:

1. $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$
2. Sei f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to\infty}$ sowie f' absolut integrabel, so gilt:

$$\mathcal{F}(f') = i\omega\mathcal{F}(f)$$

3. Sei f, g stückweise stetig sowie beschränkt und absolut integrabel, so ist:

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$$

$$\mathcal{F}(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega, t)$$

$$\mathcal{F}(t^2 u_x) = t^2\mathcal{F}(u_x)$$

$$\mathcal{F}(x\cdot y(x))(\omega) = i\mathcal{F}(y'(x))(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left(xe^{-ax^2}\right)(\omega) = \frac{i\omega}{(2a)^{3/2}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(i\omega e^{-b\omega^2}\right) = \frac{x}{(2b)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4b}}$$

$$\hat{f}(\omega + a) = e^{-iax}\cdot\hat{f}(\omega)$$

Inverse Fourier Transformation

Die inverse Fourier Transformation von g ist:

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Es gilt:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$$

Beispiele

Sei $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x\in(0,1) \\ 0 & sonst\end{cases}$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-x}e^{-i\omega x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-(1+i\omega)x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-(1+i\omega)x}}{-(1+i\omega)}\Big|_0^1 = \frac{1-e^{-(1+i\omega)}}{1+i\omega}$$

Sei $f(x) = \begin{cases} 1+x & -1\le x\le 0 \\ 1-x & 0\le x\le 1 \\ 0 & sonst\end{cases}$

$f(x)$ ist gerade, also $B(\omega) = 0$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)cos(\omega v) = \frac{2}{\pi}\int_0^1(1-v)cos(\omega v)dv$$

$$= \frac{2}{\pi}\underbrace{\frac{(1-v)sin(\omega v)}{\omega}}_{=0} + \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{sin(\omega v)}{\omega}dv = \frac{-2}{\pi\omega^2}cos(\omega v)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi\omega^2}(1-cos(\omega))$$

$$f(x) = \int_0^{\infty}\frac{2}{\pi\omega^2}(1-cos(\omega))cos(\omega x)d\omega$$

PDE

Eine partielle DGL (PDE) ist eine Gleichung, in welcher eine Funktion u sowie einige partielle Ableitung von u involviert sind.

- **Linear**: Sie sind linear, falls u und die partielle Ableitung mit Grad 1 erscheinen.
- **Homogen**: Sie sind homogen, wenn sie linear ist und wenn jeder Term u oder eine partielle Ableitung enthält.
- **Ordung**: Die Ordnung einer PDE ist die maximale Ordnung aller involvierten Ableitung.

Wichtige PDEs

- Eindimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u}{\partial x^2}$$

(*linear, 2.Ordnung, homogen, hyperbolisch*)

- Eindimensionale Wärmegleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(*linear, 2.Ordnung, homogen, parabolisch*)

- Zweidimensionale Laplacegleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(*linear, 2.Ordnung, homogen, elliptisch*)

- Zweidimensionale Poissongleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

(*linear, 2.Ordnung, inhomogen, elliptisch*)

- Zweidimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

(*linear, 2.Ordnung, homogen, hyperbolisch*)

- Zweidimensionale Wärmegleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

(*linear, 2.Ordnung, homogen, parabolisch*)

- Dreidimensionale Laplacegleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(*linear, 2.Ordnung, homogen, elliptisch*)

Lineare PDE 2.Ordnung

Eine lineare PDE 2.Ordnung kann man in die Form

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$$

Eine lineare PDE 2.Ordnung heisst

- **hyperbolisch**, falls $AC - B^2 < 0$
- **parabolisch**, falls $AC - B^2 = 0$
- **elliptisch**, falls $AC - B^2 > 0$

Beispiele

Sei $u(x,y) = xsin(x+2y)$, zeige: u löst $u + u_{xx} = \frac{1}{x}u_y$

$$\begin{aligned} u_x &= sin(x+2y) + xcos(x+2y) \\ u_{xx} &= cos(x+2y) + cos(x+2y) - xsin(x+2y) \\ u_y &= 2xcos(x+2y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u + u_{xx} = 2cos(x+2y) \stackrel{!}{=} \frac{2xcos(x+2y)}{x} = \frac{u_y}{x}$$

Eindimensionale Wellengleichung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0,L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n cos(\lambda_n t) + B_n^* sin(\lambda_n t)\right) sin(\frac{\pi n}{L}x) \tag{1}$$

$$\lambda_n = \frac{c\,n\,\pi}{L} \tag{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(\frac{n\,\pi}{L}x) \tag{3}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n sin(\frac{n\,\pi}{L}x) \tag{4}$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sin(\frac{n\,\pi}{L}x)dx \tag{5}$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x) sin(\frac{n\,\pi}{L}x)dx \tag{6}$$

Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

Vorgehen 2: Separation der Variabeln

Separation der Variablen

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$u_{tt} = F\ddot{G}; \qquad u_{xx} = F''G \qquad \rightarrow F\ddot{G} = c^2 F''G$$

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k \;; \qquad \begin{cases} F'' = kF \\ \ddot{G} = c^2 kG \end{cases}$$

Randbedingungen finden:

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \;\forall\, t \geq 0 \Rightarrow \mathbf{F(0) = 0}$$

$$u(L,t) = F(L)G(t) = 0 \;\forall\, t \geq 0 \Rightarrow \mathbf{F(L) = 0}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = F(x)G(t)$$

Löse mit (1)

Allgemeine Lösung:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = k$$

$$\text{F(x)} = \begin{cases} A_1 e^{\sqrt{k}x} + A_2 e^{-\sqrt{k}x} & k > 0 \\ A_1 cos(\sqrt{|k|}x) + A_2 sin(\sqrt{|k|}x) & k < 0 \\ A_1 x + A_2 & k = 0 \end{cases}$$

$$\text{G(t)} = \begin{cases} B_1 e^{\sqrt{k}t} + B_2 e^{-\sqrt{k}t} & k < 0 \\ B_1 cos(\sqrt{|k|}t) + B_2 sin(\sqrt{|k|}t) & k > 0 \\ B_1 t + B_2 & k = 0 \end{cases}$$

Beispiele

Löse für $L = \pi$ $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = sin(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$

$$c = 2 \text{ und mit } (2) : \lambda_n = 2n$$

Mit (3) finden wir nichts, also mit (5)

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi sin(x)sin(nx) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (cos((1-n)x) - cos((1+n)x))\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{sin((1-n)x)}{1-n} - \frac{sin((1+n)x)}{1+n}\right)\Bigg|_0^\pi = 0, \quad f\ddot{u}r\ n \geq 2$$

Mit (3) folgt

$$f(x) = sin(x) = \sum_{n=1}^\infty B_n sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = B_1 sin(x) \qquad \Rightarrow B_1 = 1$$

Aus (4) sehen wir direkt, dass $B_n^* = 0$

$$\Rightarrow u(x,t) = B_1 cos(\lambda_n t) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = cos(2t)sin(x)$$

Finde eine Lösung $u(x,t)$ der PDF $\frac{1}{2}u_x + u_t = 0$. Mit dem Ansatz $u(x,t) = F(x)G(t)$ folgt

$$\frac{1}{2}F'(x)G(t) + F(x)\dot{G}(t) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{F'(x)}{F(x)} + \frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = 0$$

$$\forall x,t: \ \frac{F'(x)}{2F(x)} = -\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = konst = \lambda$$

$$\frac{1}{2F(x)}\frac{dF}{dx} = \lambda \ \Rightarrow \ \frac{dF}{F} = 2\lambda dx$$

$$\Rightarrow F(x) = e^{2\lambda x}C_1 \qquad G(t) = C_2 e^{-\lambda t}$$

$$u(x,t) = F(x)G(t) = C_1 e^{2\lambda x} C_2 e^{-\lambda t} = Ce^{\lambda(2x-t)}$$

Eindimensionale Wellengleichung - D'Alembert

Sei $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit Nebenbedingung $u(x,0) = f(x)$ und $u_t(x,0) = g(x)$, $x \in (-\infty,\infty)$, $t > 0$.
Die Alembert-Lösung ist gegeben als

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

Normalform

Mit geeigneter Substitutionen kann eine PDE zweiter Ordnung in **Normalform** gebracht werden, d.h.:

$$u_{vw} = F(v,w,u,u_v,u_w) \quad , \quad \text{hyperbolisch}$$

$$u_{vv} = F(v,w,u,u_v,u_w) \quad , \quad \text{parabolisch}$$

$$u_{vv} + u_{ww} = F(v,w,u,u_v,u_w) \quad , \quad \text{elliptisch}$$

Vorgehen

Gegeben PDE zweiter Ordnung in $\{x,y\}$

- Bestimme A,B,C und die zwei Lösungen der **charakteristischen Gleichung** $A(y')^2 - 2By' + C = 0$
- Fasse $y' = \frac{dy}{dx}$ als Steigung auf, integriere entsprechend und löse für die neue Integrationskonstanten C_1, C_2
- Substituiere $v = C_1$, $w = C_2$ und schreibe F sowie die Ableitungen der ursprünglichen Gleichung in v und w
- Setze alles in die PDE ein und erhalte die Normalform
- Integriere entsprechend und substituiere zurück, um die allgemeine Lösung zu erhalten

---

hyperbolisch:	$v = \varphi(x,y)$	$w = \psi(x,y)$
parablisch:	$v = x$	$w = \psi(x,y)$
elliptisch:	$v = \frac{1}{2}[\varphi(x,y) + \psi(x,y)]$	$w = \frac{1}{2}[\varphi(x,y) - \psi(x,y)]$

Beispiele

Sei $u_{tt} = u_{xx}$ mit $u(x,0) = \frac{1}{x^2+1}$ und $u_t(x,0) = -1$
Die D'Alembertsche Lösung ist mit $c = 1$ dann

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+t)^2+1} + \frac{1}{(x-t)^2+1}\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}(-1)ds$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+t)^2+1} + \frac{1}{(x-t)^2+1}\right) - t$$

Bringe $u_{xx} + 2u_{xy} = -4e^y$ in Normalform und gib die allgemeine Lösung an

$A = B = 1, \quad C = 0 \rightarrow$ charakteristische Gleichung $(y')^2 - 2y' = 0$

Lösungen der char. Gleichung: $y_1' = 0$ und $y_2' = 2$

$$Fall\ 1: y' = 0 \rightarrow dy = 0dx \Rightarrow y = C_1$$
$$Fall\ 2: y' = 2 \rightarrow dy = 2dx \Rightarrow y = 2x + C_2 \rightarrow C_2 = y - 2x$$

$$v = C_1 = y \text{ und } w = C_2 = y - 2x$$

$\boxed{\text{Vorbereitung: } v_x = 0;\ v_y = 1;\ w_x = -2;\ w_y = 1}$

$$u_x = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dw}\frac{dw}{dx} = u_v v_x + u_w w_x = -2u_w$$
$$u_{xx} = -2u_{wv}v_x - 2u_{ww}w_x = 4u_{ww}$$
$$u_{xy} = -2u_{wv}v_y - 2u_{ww}w_y = -2u_{wv} - u_{ww}$$
$$F = -4e^y = -4e^v$$

$$u_{ww} + 2(-2u_{wv} - 2u_{ww}) = -4e^v \quad \Rightarrow u_{wv} = e^v \text{ (Normalform)}$$

$$u(v,w) = \iint u_{wv}dwdv = \iint e^v dwdv = \int [w \cdot e^v + \tilde{\varphi}(v)]dv$$
$$= w \cdot e^v + \varphi(v) + \psi(w)$$
$$\Rightarrow u(x,y) = (y-2x)e^y + \underbrace{\varphi(y) + \psi(y-2x)}_{\text{min. 2x stetig diff'bar}}$$

Wärmeleitungsgleichung (Heat equation)

Vorgehen 1:
Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit Randbediungungen $u(0,t) = u(L,t) = 0$ und $u(x,0) = f(x)$ auf $x \in [0,L]$. Via Fourier-Reihe erhalten wir die Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty B_n sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad ; \qquad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

$\Rightarrow$ Manchmal kann man B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmen!

Vorgehen 2:
Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit Randbedingungen $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ und $u(x,0) = f(x)$ **nur** auf $x \in (0,L)$

- Nimm den Ansatz $u(x,t) = F(x)G(t)$, separiere F und G, bestimme die Konditionen der Randbedingungen (der ODE für F und G) durch Betrachten von u_x.
- Löse die ODEs für F und G, setze sie zu u_n zusammen
- Verwende Superposition und schreibe

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

- Benutze weitere Randbedingungen und vergleiche Koeffizienten in u mit denjenigen der Fourier-Reihe der 2L-periodischen geraden Fortsetzung von f

---

Allgemeine Lösung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n cos(nx)e^{-c^2n^2t}$$

Zeitunabhängige n-dim Wärmeleitungsgleichung

Die zeitunabhängige n-dimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2\Delta u = c^2\nabla^2 u$ kann auf die n-dimensionale Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ reduziert werden. Für $n = 2$, Randbedingungen $u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0$ und $u(x,b) = f(x)$ mit $(x,y) \in [0,a][0,b]$ sprechen wir vom **Dirichlet-Problem**.
Dessen Lösung mit Separation und Superposition ist:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(\frac{n\pi}{a}x)sinh(\frac{n\pi}{a}y)$$

$$A_n = \frac{2}{a\ sinh(\frac{n\pi}{a}b)}\int_0^a f(x)sin(\frac{n\pi}{a}x)dx$$

$\Rightarrow$ Manchmal kann man A_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmen!

Beispiele

Sei $u_t = u_{xx}$ auf $x \in [0,2\pi]$ mit $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = x$ auf $0 < x < \pi$

Mit $u = F \cdot G$ erhalten wir $\begin{cases} F'' = \lambda F, & \dot{G} = \lambda G \\ F'(0) = F'(\pi) = 0 \end{cases}$

- Für $\lambda > 0$ ist die allgemeine Lösung $F(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ Randbedingungen ergeben: $A = B = 0 \rightarrow$ uninteressant
- Für $\lambda = 0$ erhalten wird $F(x) = 0 \rightarrow$ uninteressant
- Für $\lambda < 0$ ist die allg. Lösung $F(x) = Acos(px) + Bsin(px)$ wobei $p = \sqrt{-\lambda}$.
  Mit $F'(0) = -Apsin(0) + Bpcos(0) = 0$ finden wir $B = 0$ und mit $F'(\pi) = -Apsin(p\pi) = 0 \Rightarrow p = p_n = n$
  Unterdessen $\dot{G} = -p^2 G$ und somit $G(t) = C \cdot e^{-p^2t}$
  $\rightarrow G_n(t) = C_n \cdot e^{-p_n^2 t}$
- $u_n(x,t) = F_n \cdot G_n = A_n cos(p_n)G_n e^{-p_n^2t} =: D_n cos(nx)e^{-n^2t}$ und $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$
- Weiter gilt $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n cos(nx) = x$. Koeffizienten der 2π-periodischen Funktion:

$$D_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$D_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xcos(nx)dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & n = 2m \\ \frac{-4}{\pi n^2} & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^2} cos((2m+1)x)e^{(-2m+1)t}$$

Wärmeleitungsgleichung eines unendlichen Gebietes

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit $u(x,0) = f(x)$ auf einem unendlichen Gebiet ($x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$). Dann ist die Lösung:
Vorgehen mit Fourier-Integral

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} (A(p)cos(px) + B(p)sin(px))e^{-c^2p^2t}dp$$

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)cos(pv)dv$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)sin(pv)dv$$

Bemerkung: Achte auf gerade/ungerade Funktionen

Vorgehen mit Fourier-Transformation
Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit $\mathcal{F}(u_{xx}) = -\omega^2\mathcal{F}(u) = -\omega^2\hat{u}$ und $\mathcal{F}(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u) = \hat{u}_t$ können wir die Gleichung transformieren:

$$\hat{u}_t = -c^2\omega^2\hat{u}$$

dann diese ODE für $\hat{u}$ lösen, die transformierte Anfangsbedingung einsetzen und $u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})$ bestimmen.
Bemerkung: $\mathcal{F}$ ist immer in Bezug auf x.

Beispiele

Sei $u_t = u_{xx}$ mit $u(x,0) = \begin{cases} 2 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & sonst \end{cases}$

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2cos(pv)dv = \frac{2}{\pi}\frac{sin(pv)}{p}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi p}sin(p\pi)$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2sin(pv)dv = \frac{2}{\pi}\frac{-cos(pv)}{p}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi p}(1 - cos(\pi p)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{sin(p\pi)cos(px) + (1 - cos(p\pi)sin(px)}{p}e^{-p^2t}dp$$

Sei $u_t = 4u_{xx}$ und $u(x,0) = f(x) = \sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$
$\hat{u}_t = -4\omega^2\hat{u}$ und die allg. Lösung: $\hat{u} = C \cdot e^{-4\omega^2t}$
Mit der Anfangsbedingung folgt $\hat{u} = \hat{u}(\omega,0)e^{-4\omega^2t}$, nun $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f} = e^{-\omega^2}$, somit ist $\hat{u} = e^{-\omega^2(1+4t)}$ mit der Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ak^2+bk+c)}dk = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{4a}-c}$$

folgt dann

$$u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+4t)}}e^{\frac{-x^2}{4+16t}}$$

Dirichlet auf dem Kreis

Für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf der geschlossenen Kreisscheibe D mit Radius R und einer Randbedingung...

- ... $u(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D finden wir die Lösung

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n cos(n\theta) + B_n sin(n\theta))$$

Wir bestimmen A_n und B_n mit Koeffizientenvergleich oder sonst mit:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi$$

$$A_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) cos(n\xi) d\xi$$

$$B_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) sin(n\xi) d\xi$$

- ...$u_r(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D gilt die Lösung

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n cos(n\theta) + B_n sin(n\theta))$$

mit

$$A_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) cos(n\xi) d\xi$$

$$B_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) sin(n\xi) d\xi$$

und A_0 ist eine nicht näher bestimmbare Konstante.

Bemerkung:

- Koordinatentransformation

$$\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

- Die Laplace-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

wird zu

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r = 0$$

Beispiele

Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Finde die Lösung der Laplacegleichung mit $u(x,y) = 2x^2 + y$ auf dem Rand (∂D)

$$u(x,y) = 2x^2 + y = 2r^2 cos^2(\theta) + rsin(\theta) \overset{r=1}{=} 2cos^2(\theta) + sin(\theta)$$

$$= (cos(\theta)+1)sin(\theta)$$

$$u(1,\theta) = f(\theta) = 1 + cos(\theta) + sin(\theta)$$

$$\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n cos(n\theta) + B_n sin(n\theta))$$

$\to A_0 = 1,\ B_1 = 1,\ A_2 = 1$ alle andern $A_n, B_n = 0$

$$u(r,\theta) = 1 + rsin(\theta) + r^2 cos(2\theta)$$

Finde die Lösung der Laplacegleichung auf dem Kreis D mit $R = 2$ und $u_r(2,\theta) = cos(3\theta)$ auf ∂D. Es gilt $u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n cos(n\theta) + B_n sin(n\theta))$, also:

$$u_r(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} (A_n cos(n\theta) + B_n sin(n\theta))$$

$$u_r(2,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1} (A_n cos(n\theta) + B_n sin(n\theta)) \overset{!}{=} cos(3\theta)$$

$\to B_n = 0,\ n = 3 \to cos(3\theta) = 3 \cdot 2^{3-1} A_3 cos(3\theta) \Rightarrow A_3 = \frac{1}{12},\ A_n$ sonst $= 0$

$$u(r,\theta) = A_0 + \frac{1}{12} r^3 cos(3\theta)$$

A_0 ist nicht bestimmbar

Poisson-Integral-Form

Sei $\Delta u = 0$ und $u(R,\theta) = f(\theta)$ auf dem Kreis mit Radius R. Dann ist die Lösung mittels Poisson-Integral-Form gegeben als:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r,\theta,R,\varphi) f(\varphi) d\varphi$$

$$K(r,\theta,R,\varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rRcos(\theta-\varphi) + r^2}$$

$K(r,\theta,R,\varphi)$ ist der Poisson-Integral-Kern.

Harmonische Funktionen

Eine Funktion, die die Laplace-Gleichungs $\Delta u = 0$ auf D erfüllt, heisst *harmonisch* auf D.

Maximumsprinzip: Nimmt auf dem D die harmonische Funktion u ihr Maximum im Innern von D an, so ist sie konstant.
Somit genügt es, für eine harmonische Funktion auf D ihr Maximum nur auf dem Rand ∂D zu suchen.
Ist u harmonisch auf der Kreissscheibe mit Radius R, so gilt der Mittelwertsatz insbesondere in folgender Form:

$$f(0,0) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(R,\theta) d\theta$$

Beispiele

Sei $u(1,\theta) = f(\theta) = cos(3\theta)$ auf dem Rand der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Finde den Funktionswert von u im Ursprung, ohne die Lösung u explizit zu berechen:
Es gilt $K(0,\theta,R,\varphi) = 1$. Poisson-Formel:

$$u(0,0) = u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(0,\theta,1,\varphi) f(\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} cos(3\varphi) d\varphi = \frac{1}{6\pi} sin(3\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Finde das Maximum von $f(x,y) = x + y$ auf der Einheitskreisscheibe.

$$f(r,\theta) = r(cos(\theta) + sin(\theta)) \to \text{harmonisch, Suche auf Rand:}$$

$$f(1,\theta) = cos(\theta) + sin(\theta)$$

Ort des Maximums: $\frac{\partial}{\partial\theta} f(1,\theta) = cos(\theta) - sin(\theta) = 0 \to \theta = \frac{\pi}{2}$
Das Maximum ist bei $(1, \frac{\pi}{2})$, respektive $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und der Funktionswert ist $\sqrt{2}$.

Anhang

Umwandlungen

Gegeben: $n \in \mathbb{N}$

$$sin(\pi n) = 0 \quad ; \quad cos(\pi n) = (-1)^n$$

$$cos(\frac{\pi}{2}n) = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)(-1)^{\frac{n}{2}} = \begin{cases} 0, & n = 2j+1 \\ (-1)^j, & n = 2j \end{cases}$$

$$sin(\frac{\pi}{2}n) = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)(-1)^{\frac{n+2}{2}} = \begin{cases} 0, & n = 2j \\ (-1)^j, & n = 2j+1 \end{cases}$$

$$sin(x)\,sin(nx) = \frac{1}{2}\left(cos((1-n)x) - cos((n+1)x)\right)$$

$$cos(x)\,cos(nx) = \frac{1}{2}\left(cos((n+1)x) + cos((n-1)x)\right)$$

$$sin\left((n\pm1)\frac{\pi}{2}\right) = \pm cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$cos\left((n\pm1)\frac{\pi}{2}\right) = \mp sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x)^2 - sin(x)^2 = cos(2x)$$

$$cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(2x)$$

Identitäten

$$(-1)^n + (-1)^{-n} = e^{in\pi} + e^{-in\pi} = 2cos(\pi n)$$

$$(-1)^n - (-1)^{-n} = e^{in\pi} - e^{-in\pi} = 2isin(\pi n)$$

$$\nabla^2 = \Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

even - odd

$$even \cdot even \mathrel{\widehat{=}} odd \cdot odd \mathrel{\widehat{=}} even$$

$$even \cdot odd \mathrel{\widehat{=}} odd$$

$$\int_{-L}^{L} even = 2\int_{0}^{L} even$$

$$\int_{-L}^{L} odd = 0$$

Jede Funktion ist aufteilbar in *even* & *odd* Teil:

$$f = f_{even} + f_{odd} = \left(\frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}\right)$$

Vorgelöste Integrale

$$\int \mathbf{sin^2(nx)dx} = \int \left[-\frac{1}{2}cos(2nx) + \frac{1}{2}\right]dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int cos(2nx)dx + \int \frac{1}{2}dx = -\frac{1}{4n}sin(2nx) + \frac{x}{2}$$

$$\int \mathbf{cos^2(nx)dx} = \int \left[\frac{1}{2}cos(2nx) + \frac{1}{2}\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int cos(2nx)dx + \int \frac{1}{2}dx = \frac{1}{4n}sin(2nx) + \frac{x}{2}$$

$$\int \mathbf{tan^2(nx)dx} = \int \left[sec^2(nx) - 1\right]dx$$
$$= \frac{sin(nx)}{n\,cos(nx)} - x = \frac{1}{n}tan(nx) - x$$

$$\int \mathbf{x\,sin(nx)} = -\frac{x}{n}cos(nx) + \frac{1}{n}\int cos(nx)dx$$
$$= -\frac{x}{n}cos(nx) + \frac{1}{n^2}sin(nx) = \frac{sin(nx) - nx\,cos(nx)}{n^2}$$

$$\int \mathbf{x\,cos(nx)} = \frac{x}{n}sin(nx) - \frac{1}{n}\int sin(nx)dx$$
$$= \frac{x}{n}sin(nx) + \frac{1}{n^2}cos(nx) = \frac{nx\,sin(nx) + cos(nx)}{n^2}$$

$$\int \mathbf{x\,sin^2(nx)dx} = \int \frac{x}{2}\left[-cos(2nx) + 1\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int xdx - \frac{1}{2}\int x\,cos(2nx)dx$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2n}sin(2nx) - \int \frac{1}{2n}sin(2nx)\right]$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4n}sin(2nx) - \frac{1}{8n^2}cos(2nx)$$

$$\int \mathbf{x\,cos^2(nx)dx} = \int \frac{x}{2}\left[cos(2nx) + 1\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int xdx + \frac{1}{2}\int x\,cos(2nx)dx$$
$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2n}sin(2nx) - \int \frac{1}{2n}sin(2nx)dx\right]$$
$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4n}sin(2nx) + \frac{1}{8n^2}cos(2nx)$$

$$\int \mathbf{sin(kx)cos(nx)} = \frac{1}{2}\int \left[sin(x(k-n)) + sin(x(k+n))\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int sin(xk - xn)dx + \int sin(xk + nx)dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{cos(xk - xn)}{k-n} - \frac{cos(xk + xn)}{k+n}\right]$$

$$\int \mathbf{sin(kx)sin(nx)dx} = \int \left[\frac{1}{2}cos(kx - nx) - \frac{1}{2}cos(kx + nx)\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{sin(kx - nx)}{k-n} - \frac{sin(kx + nx)}{k+n}\right]$$

$$\int \mathbf{cos(kx)cos(nx)dx} = \int \left[\frac{1}{2}cos(kx - nx) + \frac{1}{2}cos(kx + nx)\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{sin(kx - nx)}{k-n} + \frac{sin(kx + nx)}{k+n}\right]$$

$$\int \mathbf{cos(kx)cos^2(nx)dx} = \int \frac{1}{2}\left[cos(2nx) + 1\right]cos(kx)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[cos(kx)cos(2nx)dx + \int cos(kx)\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}cos(kx - 2nx) + \frac{1}{2}cos(kx + 2nx)\right]dx + \frac{1}{2}\int cos(kx)dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{sin(x(k+2n))}{k+2n} + \frac{sin(x(k-2n))}{k-2n}\right] + \frac{1}{2k}sin(kx)$$

$$\int \mathbf{sin(kx)sin^2(nx)dx} = \int \frac{1}{2}\left[1 - cos(2nx)\right]sin(kx)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\int sin(kx)cos(2nx)dx + \int sin(kx)dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}sin(kx - 2nx) + \frac{1}{2}sin(kx + 2nx)\right]dx + \frac{1}{2}\int sin(kx)dx$$
$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{cos(kx + 2nx)}{k+2n} + \frac{cos(kx - 2nx)}{k-2n}\right] - \frac{1}{2k}cos(kx)$$

$$\int \mathbf{sin(kx)cos^2(nx)dx} = \int \frac{1}{2}\left[cos(2nx) + 1\right]sin(kx)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[sin(kx)cos(2nx) + sin(kx)\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}sin(kx - 2nx) + \frac{1}{2}sin(kx + 2nx)\right]dx + \frac{1}{2}\int sin(kx)dx$$
$$= \frac{-1}{4}\left[\frac{cos(x(k+2n))}{k+2n} + \frac{cos(x(k-2n))}{k-2n}\right] - \frac{1}{2k}cos(kx)$$

$$\int \mathbf{cos(kx)sin^2(nx)dx} = \int \frac{1}{2}\left[1 - cos(2nx)\right]cos(kx)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[-cos(kx)cos(2nx) + cos(kx)\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}cos(kx - 2nx) + \frac{1}{2}cos(kx + 2nx)\right]dx + \frac{1}{2}\int cos(kx)dx$$
$$= \frac{-1}{4}\left[\frac{sin(x(k+2n))}{k+2n} + \frac{sin(x(k-2n))}{k-2n}\right] + \frac{1}{2k}sin(kx)$$

Allegmein Integral

$$\int_{-L}^{L} cos(\frac{n\pi x}{L}) \cdot cos(\frac{m\pi x}{L})dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ L & \text{für } n = m \\ 2L & \text{für } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} sin(\frac{n\pi x}{L}) \cdot sin(\frac{m\pi x}{L})dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ L & \text{für } n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} sin(\frac{n\pi x}{L}) \cdot cos(\frac{m\pi x}{L})dx = 0 \ \forall \ n, m$$

Nach Integral:

$$sin(nx)\Big|_0^{2\pi} = 0 \quad ; \qquad cos(nx)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$xsin(nx)\Big|_0^{2\pi} = 0 \quad ; \qquad xcos(nx)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \neq 0$$

Ableitungen

$$(\log_a |x|)' = (\log_a e)\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(a^{cx})' = (c \ln a)a^{cx}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Integraltafel

Integrale ($\sqrt{\cdots}$, etc. . .)

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}, \ (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$$

$$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$$

$$\int \frac{ax+b}{px+q}dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2} \ln |px+q|$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a} \ln |\frac{a+x}{a-x}|$$

Integrale ($\sin(ax)$, $\cos(ax)$, $\tan(ax)$)

$$\int \sin(ax)^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

$$\int x \cdot \sin(ax)dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a}$$

$$\int \cos(ax)^2 dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

$$\int x \cdot \cos(ax)dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a}$$

$$\int \sin(ax) \cdot \cos(ax)dx = -\frac{\cos(ax)^2}{2a}$$

$$\int \sin(x) \cdot e^x \mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x))$$

$$\int \cos(x) \cdot e^x \mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\sin(x) + \cos(x))$$

$$\int x^2 \cdot \sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}[-a^2x^2\cos(ax) + 2 \cdot \cos(ax) + 2ax\sin(ax)]$$

$$\int x^2 \cdot \cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}[a^2x^2\sin(ax) - 2 \cdot \sin(ax) + 2ax\cos(ax)]$$

$$\int \tan(ax)dx = -\frac{1}{a} \cdot \ln |\cos(ax)|$$

$$\int \arcsin(x)dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arccos(x)dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arctan(x)dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2)$$

Integrale (e^{ax} *und* $\ln(x)$)

$$\int x \cdot e^{ax}dx = (\frac{ax-1}{a^2}) \cdot e^{ax}$$

$$\int x \cdot \ln(x)dx = \frac{1}{2} \cdot x^2(\ln(x) - \frac{1}{2})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx}\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \text{für } j = 0 \\ 0 & \text{für } j \neq 0 \end{cases}$$

Integrale Fota

$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}ln|ax+b| + C$

$\int (ax^p+b)^s x^{p-1}dx = \frac{(ax^p+b)^{s+1}}{ap(s+1)} + C, \quad s \neq -1, \ a \neq 0, \ p \neq 0$

$\int (ax^p+b)^{-1}x^{p-1}dx = \frac{1}{ap}ln|ax^p+b| + C, \quad a \neq 0, \ p \neq 0$

$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}ln|cx+d| + C$

$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{|a|} + C$

$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

$\int \frac{2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin\frac{x}{|a|} + C$

$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$

$\int a^{kx}dx = \frac{1}{k \cdot ln(a)}a^{kx} + C$

$\int e^{kx}sin(ax+b)dx = \frac{e^{kx}}{a^2+k^2}\left(k\ sin(ax+b) - a\ cos(ax+b)\right) + C$

$\int e^{kx}cos(ax+b)dx = \frac{e^{kx}}{a^2+k^2}\left(k\ cos(ax+b) + a\ sin(ax+b)\right) + C$

$\int ln|x|dx = x(ln|x| - 1) + C$

$\int log_a|x|dx = x(log_a|x| - log_a e) + C$

$\int x^k ln\ x\ dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\left(ln\ x - \frac{1}{k+1}\right) + C, \quad k \neq -1$

$\int x^{-1} ln\ x\ dx = \frac{1}{2}(ln\ x)^2 + C$

$\int tan\ x\ dx = -ln|cos\ x| + C$

$\int sin^2x\ dx = \frac{1}{2}(x - sin\ x\ cos\ x) + C$

$\int cos^2x\ dx = \frac{1}{2}(x + sin\ x\ cos\ x) + C$

$\int tan^2x\ dx = tan\ x - x + C$

$\int \frac{1}{sin\ x} dx = ln\left|tan\frac{x}{2}\right| + C$

$\int \frac{1}{cos\ x} dx = ln\left|tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

$\int \frac{2}{tan\ x} dx = ln|sin\ x| + C$

$\int sin^n x\ dx = -\frac{1}{n} sin^{n-1}x\ cos\ x + \frac{n-1}{n} \int sin^{n-2}x\ dx, \quad n \geq 2$

$\int cos^n x\ dx = \frac{1}{n} sin\ x\ cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n} \int cos^{n-2}x\ dx, \quad n \geq 2$

$\int arcsin\ x\ dx = x\ arcsin\ x + \sqrt{1-x^2} + C$

$\int arccos\ x\ dx = x\ arccos\ x - \sqrt{1-x^2} + C$

$\int arctan\ x\ dx = x\ arctan\ x - \frac{1}{2} ln(1+x^2) + C$

$\int sinh\ x\ dx = cosh\ x + C$

$\int cosh\ x\ dx = sinh\ x + C$

$\int tanh\ x\ dx = ln\ cosh\ x + C$

$\int arsinh\ x\ dx = x\ arsinh\ x - \sqrt{x^2+1} + C$

$\int arcosh\ x\ dx = x\ arcosh\ x - \sqrt{x^2-1} + C$

$\int artanh\ x\ dx = x\ artanh\ x + \frac{1}{2} ln(1-x^2) + C$

$\int_0^\infty \frac{sin\ ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0$

$\int_0^\infty sin(x^2) dx = \int_0^\infty cos(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad a > 0$

$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$

Trigonometrische Identitäten

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$$

$$\sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(180^\circ \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$$

$$\cos(90^\circ \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ \pm \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

Euler-Beziehungen

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\tan(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})}$$

$$\sinh(0) = 0, \quad \cosh(0) = 1$$

$$e^{k\pi i} = \{1 \text{für } k = 0, \pm 2, \cdots -1 \qquad \text{für } k = \pm 1, \pm 3, \cdots$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\cdot\sin(x)$$

Logarithmen

$$\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v)$$

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$$

$$\ln\left(\frac{1}{v}\right) = -\ln(v)$$

$$\ln(u^r) = r \cdot \ln(u)$$

$$\ln|y| \cdot C = \ln|y^C|$$

$$-\ln|r| = \ln|r^{-1}|$$

$$\ln(1) = \log(1) = 0$$

Geometrie

$$\text{Kugelvolumen } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{Kugeloberfläche } A = 4\pi r^2$$

Periodizität

$e^{i\sqrt{x}}$ ist nicht periodisch.

$e^{\sqrt{2}ix}$ ist periodisch.

Partialbruchzerlegung - Ergänzung

PBZ bei doppelter Nullstelle

$$\frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)} \Rightarrow \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1}$$

oder

$$\frac{s-5}{(s-2)^2} \Rightarrow \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2}$$

Dann Koeffizientenvergleich

Komplexe Zahlen

Normalform: $z = x + iy$

Polarform: $z = r(cos(\varphi) + i\ sin(\varphi)) = r\ cis(\varphi)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = arccos\left(\frac{x}{r}\right) = arcsin\left(\frac{y}{r}\right) = tan\left(\frac{y}{x}\right)$

Exponntialform: $z = r\ e^{i\varphi}$

$e^{i\ \varphi} = cos(\varphi) + i\ sin(\varphi)$

Operationen

Normalform

$z_1 + z_2$	$(x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$
$z_1 z_2$	$(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
$z^{-1} = \frac{1}{z}$	$\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$
$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

Polarform

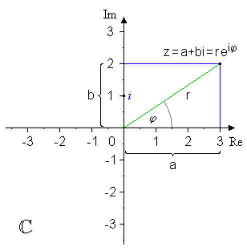
$z_1 z_2$	$r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
$z^{-1} = \frac{1}{z}$	$r^{-1}e^{-i\varphi}$
$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
$z^n,\ n \in \mathbb{Z}$	$r^n e^{in\varphi}$ (DE MOIVRE)

Beträge

$r = |z| \geq 0 \qquad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|z\ w| = |z|\ |w| \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

$|z+w| \leq |z| + |w|$



Zweidimensionale Wellengleichung

Gegeben:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

$$(x,y) \in [0,a] \times [0,b], \qquad t > 0$$

$$u(0,x,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad u_t(x,y,0) = g(x,y)$$

Allgemeine Lösung:

$$\boxed{u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty}\left[A_{mn}cos(\lambda_{mn}t)sin\left(\tfrac{m\pi}{a}x\right)sin\left(\tfrac{n\pi}{b}y\right) + B_{mn}sin(\lambda_{mn}t))sin\left(\tfrac{m\pi}{a}x\right)sin\left(\tfrac{n\pi}{b}y\right)\right]}$$

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} A_{kl}sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right) = f(x,y)$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\ sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dydx$$

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} B_{kl}\lambda_{kl}sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right) = g(x,y)$$

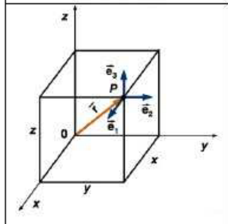
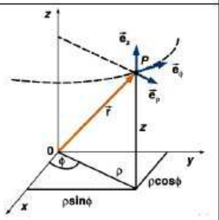
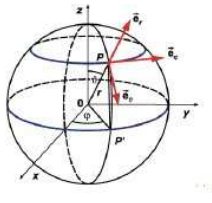
$$B_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\ sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dydx$$

Trigonometrie — Fota S.97-99

α	0 $0°$	$\pi/6$ $30°$	$\pi/4$ $45°$	$\pi/3$ $60°$	$\pi/2$ $90°$	π $180°$	T	0-Stellen
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	$2\cdot\pi$	$k\cdot\pi$
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	$2\cdot\pi$	$\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	0	π	$k\cdot\pi$
$\cot\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	–	π	$\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$

$cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ $\quad cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$
$sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$ $\quad sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$
$e^{2ix} = cos(2x) + isin(2x)$ $\quad e^{-2ix} = cos(2x) - isin(2x)$
$sec(x) = \frac{2cos(x)}{cos(2x)+1}$

Koordinatentransformation

kartesisch	zylindrisch	sphärisch
	$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$ $z=z$	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta=\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $\psi=\arctan\frac{y}{x}$
$x=\rho\cos\varphi$ $y=\rho\sin\varphi$ $z=z$		$r=\sqrt{\rho^2+z^2}$ $\theta=\arctan\frac{\rho}{z}$ $\psi=\varphi$
$x=r\sin\theta\cos\psi$ $y=r\sin\theta\sin\psi$ $z=r\cos\theta$	$\rho=r\sin\theta$ $\varphi=\psi$ $z=r\cos\theta$	

Zylinderkoordinaten

$dx = cos\varphi\cdot d\rho - \rho sin\varphi\cdot d\varphi$ $\quad dy = sin\varphi\cdot d\rho + \rho cos\varphi\cdot d\varphi$
$dA = \rho\cdot d\rho\cdot d\varphi$ $\quad dV = \rho\cdot d\rho\cdot d\varphi\cdot dz$

Sphärischekoordinaten

$dA = r^2\cdot sin\theta\cdot d\psi\cdot d\theta$ $\quad dV = r^2\cdot sin\theta\cdot d\psi\cdot d\theta\cdot dr$
$0\le\theta\le\pi$ $\quad 0\le\psi\le 2\pi$

Ellipsenkoordinaten

$x = a\cdot rcos(\varphi)$ $\quad y = b\cdot rsin\varphi$ $\quad z = 0$
$dA = abr\ dr\ d\varphi$

Ableitungsregeln — Fota S.63-65

Produktregel

$(f(x)\cdot g(x))' \rightarrow f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Quotientenregel

$(\frac{f(x)}{g(x)})' \rightarrow \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Verallgemeinerte Kettenregel

$F'(t) = f_x(x(t),y(t))\cdot\dot{x}(t) + f_y(x(t),y(t))\cdot\dot{y}(t)$

Integralregeln — Fota S.70-72

Integral mit Fkt. als Grenze

$\int_a^{g(x)} f(u)\cdot du = f(g(x))\cdot g'(x)$

Partielle Integration

$\int u'\cdot vdx = u\cdot v - \int u\cdot v'dx$ $\quad \int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int u'\cdot vdx$

Substitutionsregel

$\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\cdot dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(z)\cdot dz$,wobei z=u(x)

Vektoranalysis — Fota S.102-105

Skalarprodukt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

Vektorprodukt

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$

Differentialoperatoren

$grad(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z))$

$div(\vec{v}) = (\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z))$

$rot(\vec{v}) = (\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y})$

Partialbruchzerlegung

A) einfache Nullstelle: $\frac{A}{(x-x_0)}$
B) doppelte Nullstelle: $\frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$
C) komplexe Nullstelle: $\frac{Ax+B}{(z.B.:x^2+1)}$

$$Beispiel: \frac{x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$= \frac{A\cdot(x+1)\cdot(x-1)+B\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)+C\cdot(x+1)^3}{(x+1)^2\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$$

$$\left|\begin{matrix}-A-B+C=0\\-B+3C=1\\A+B+3C=0\\B+C=0\end{matrix}\right| \Rightarrow A=\tfrac{1}{2}, B=-\tfrac{1}{4}, C=\tfrac{1}{4}$$

Tipp: $(1+x^3) = (1+x)(1-x+x^2)$

Asymptoten — Fota S.66

A) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{A(x)} = \frac{0}{0}\ oder\ \frac{\infty}{\infty}$ $\Rightarrow$ Bernoulli-L'Hopital
B) $A(x) = mx+b$ $\quad\rightarrow\quad m = \lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x})$
$\rightarrow b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$
C) Allgemein: $\lim_{x\to\infty}(f(x)-A(x)) = 0$
1.Höchste Nennerordnung kürzen, $\lim_{x\to\infty}$ bilden
$\Rightarrow a_1 = ...$ $\rightarrow$konstante Terme fallen weg!
2.Gefundenen Term von Ursprungsfkt. abziehen
$\rightarrow$ Zähler wird um eine Ordnung kleiner
3.$\lim_{x\to\infty}$ bilden, Nennerordnung kürzen
$\Rightarrow a_2 = ...$
4.$A(x) = a-1+a_2+...$

Bernoulli-L'Hopital — Fota S.61

Falls $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$
$\rightarrow$ beide Fkt. müssen gegen 0 oder ∞ gehen!

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Folgen — Fota S.38-41 + S.51-54

Satz: Ist eine Folge monoton wachsend und beschränkt, so ist sie **konvergent**
Konvergente Folge: besitzt einen Grenzwert.
Eine Folge ohne Grenzwert ist **divergent**.
Konkav: $f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y)$
Konvex: $f(tx+(1-t)y) \ge tf(x)+(1-t)f(y)$
$t\in[0,1]$, strikt wenn $\le$ durch $<$ ersetzt wird.

Grenzwerte — Fota S.61-62

A) Wurzel: erweitern nach 3. Binom. Formel
B) Beträge: links- und rechtss. Grenzw. separieren
C) $e^x >> x^k >> \sqrt{x} >> ln(x)$
$\lim_{x\to\infty} \frac{BLA1}{BLA2}$
- A) Höchste Potenz kürzen
  - $\Rightarrow$ niedrigere Potenz gegen 0
- B) Gehen Zähler und Nenner gegen ∞ oder 0
  - $\Rightarrow$ Regel von Bernoulli-L'Hopital (evtl. mehrfach)
- C) Partialbruchzerlegung
  - $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)} \cdot \frac{bla1}{bla2}$
  - $\to$ Nenner-Nst. ausklammern
  - $\lim_{x\to x_o} = \frac{A}{BLA1} + \frac{B}{BLA2}$
- D) $\frac{1}{x}$ durch y substituieren $\to$ $\lim_{x\to\infty} = \lim_{y\to 0}$
  - $\Rightarrow$ Bernoulli-L'Hopital anwendbar
- F) Sandwichsatz: Folgen a_n, b_n, c_n
  - mit $a_n \leq b_n \leq c_n$
  - $\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} c_n = l \to \lim_{x\to\infty} b_n = l$

Wichtige Grenzwerte

$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{arctan(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{arcsin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} = \frac{x}{sin(ax)} = \frac{1}{a}$
$\lim_{x\to 0} = \frac{sin(ax)}{sin(x)} = a$
$\lim_{x\to\infty} n \cdot sin(\frac{1}{n}) = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = ln(a)$
$\lim_{x\to 0} \frac{ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a}$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to \pm\frac{\pi}{2}} \frac{tan(x)}{x} = \mp\infty$
$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$
$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x$
$\lim_{x\to 0} x^a \cdot ln^b(x) = 0$
$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x^k} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$
$\lim_{x\to\infty} (\frac{n-1}{n+1})^n = \frac{1}{e^2}$

Ableitungen — Fota S.63-65

Ableitung der Umkehrfunktion (Inverse)

$g = f^{-1}(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

Ableitung von Kurve in Parameterdarstellung

$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$; $y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$

Ableitung in Polarkoordinaten

$\to$ Aus $x(t)$ und $y(t)$ wird $r(\phi)$
$x(\phi) = r(\phi) \cdot cos(\phi)$; $y(\phi) = r(\phi) \cdot sin(\phi)$
$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}(\phi)sin(\phi)+r(\phi)cos(\phi)}{\dot{r}(\phi)cos(\phi)-r(\phi)sin(\phi)}$

Partielle Ableitungen

Richtunsableitung

$\to$ änderungsgrad der Fkt. in geg. Richtung $\vec{r}$
$D_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot grad(f(x,y,z))$
Definition: $D_{u,v}f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(h\dot{u},h\dot{v})-f(0,0)}{h}$

Satz von Schwarz

Wenn f_{xy} und f_{yx} stetig, dann gilt $f_{xy} = f_{yx}$

Satz vom Maximum

Bereich A abgeschlossen und beschränkt, f stetig auf A
$\Rightarrow \exists$ mind. eine Max/Minstelle $(x_0, y_0) \in$ A

Hesse-Matrix

$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ positiv def $\Rightarrow$ lok. Min,
negativ def $\Rightarrow$ lok. Max, nicht def $\Rightarrow$ Sattelpkt.

Laplace Operator

$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$
$\Delta f = f_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} f_\rho + \frac{1}{\rho^2} f_{\varphi\varphi} + f_{zz}$
$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} cot(\theta) f_\theta + \frac{1}{r^2 sin^2(\theta)} f_{\varphi\varphi}$

Integrale — Fota S.70-74

Hauptsatz der Integralrechnung

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

Leibnizsche Regel

Bedingung: $f(x,t)$ stetig im Intervall
$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt = f(x,(v(x)) \cdot v'(x) - f(x,u(x)) \cdot u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x,t)dt$
$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x)) \cdot g'(x) \to Nur\ im\ Spezialfall$

Uneigentliche Integrale

A) Uneigentliches Integral 1. Ordnung:
$\to$Integral bis ∞
$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx$
B) Uneigentliches Integral 2. Ordnung:
$\to$Polstellen oder Definitionslücken
$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Ansätze für Integrale

A) Substitution
B) Partielle Integration
C) Partialbruchzerlegung
D) Probieren mit Hilfe von Ableitung
E) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln(f(x)) + \mathbf{C}$
F) Wurzelintegrale:
1) Quadratisch Ergänzen, s.d. $k(1-u^2)$ *oder* $k(u^2 \pm 1)$
2) Sub: $\sqrt{u^2+1} \Rightarrow u = sinh(t)$; $\sqrt{u^2-1} \Rightarrow u = cosh(t)$
$\sqrt{1-u^2} \Rightarrow u = sin(t)$

Substitutionen

Integral	Subst.	Bemerkungen
$f(ax+b)$	$t = ax+b$	
$f(g(x))g'(x)$	$g(x) = t$	$= \int f(t)dt$
$f(x, \sqrt{ax+b})$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$t \geq 0$
$f(x, \sqrt{a^2-x^2})$	$x = asin(t)$	$\sqrt{a^2-x^2} = acos(t)$
$f(x, \sqrt{a^2+x^2})$	$x = asinh(t)$	$\sqrt{a^2+x^2} = acosh(t)$
$f(x, \sqrt{x^2-a^2})$	$x = acosh(t)$	$\sqrt{x^2-a^2} = asinh(t)$
$f(sin(x), cos(x))$	$t = tan(\frac{x}{2})$	$sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ $cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
$f(e^x, sinh, cosh)$	$t = e^x$	$sinh(x) = \frac{t^2-1}{2t}$ $cosh(x) = \frac{t^2+1}{2t}$

Integraltabelle

	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
sin	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
sin^2	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin^3	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
sin^4	$\frac{3\pi-8}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi-8}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
cos	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
cos^2	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2+\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos^3	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
cos^4	$\frac{8+3\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8+3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$sin \cdot cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$sin^2 \cdot cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$sin \cdot cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

Wichtige Integrale — Fota S.72 - 74 + S. 65

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + C$

$\int f'(x)\cdot f(x)dx = \frac{1}{2}(f^2(x)) + C$

$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C$

$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2} + C$

$\int \frac{x}{(ax+b)^n}dx = -\frac{1}{(n-2)a^2(ax+b)^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)a^2(ax+b)^{n-1}} + C$

$\int x^2(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3} + C$

$\int \frac{x}{x^2+a}dx = \frac{1}{2}ln|x^2+a| + C$

$\int \frac{x}{ax^2+b}dx = \frac{1}{2a}ln|ax^2+b| + C$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$

$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctan(\frac{x}{a}) + C$

$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}dx = -\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + C$

$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n}dx = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + C$

$\int \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dx = \frac{y}{x^2+y^2} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x) + C$

$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arccos(x) + C$

$\int \frac{1}{1-x^2}dx = artanh(x) = log(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) + C, |x| < 1$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = arsinh(x) = log(x+\sqrt{x^2+1}) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = arcosh(x) = log(x+\sqrt{x^2-1}) + C, 1 \le x$

$\int \frac{1}{sin^2(x)}dx = -cot(x) + C$

$\int sin^3(x)dx = \frac{1}{12}(cos(3x) - 9cos(x)) + C$

$\int sin^4(x)dx = \frac{1}{32}(12x - 8sin(2x) + sin(4x)) + C$

$\int cos^3(x)dx = \frac{1}{12}(9sin(x) + sin(3x)) + C$

$\int cos^4(x)dx = \frac{1}{32}(12x + 8sin(2x) + sin(4x)) + C$

$\int sin^{\frac{3}{2}}(2x)dx = -\frac{1}{2}cos(2x) + C$

$\int cos^{\frac{3}{2}}(2x)dx = sin(x)cos(x) + C$

$\int sin(x)cos(x)dx = -\frac{1}{2}cos^2 x + C$

$\int sin^2(x)cos(x)dx = \frac{1}{3}sin^3(x) + C$

$\int sin(x)cos^2(x)dx = -\frac{1}{3}cos^3(x) + C$

$\int sin^2(x)cos^2(x)dx = \frac{1}{32}(4x - sin(4x)) + C$

$\int sin^n(ax)\cdot cos(ax)dx = \frac{sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$

$\int sin(ax)\cdot cos^n(ax)dx = -\frac{cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$

$\int tan^3(x)dx = \frac{sec^2(x)}{2} + ln(cos(x)) + C$

$\int tan^4(x)dx = x + \frac{1}{3}tan(x)(sec^2(x) - 4) + C$

$\int cot(x)dx = log(sin(x)) + C$

$\int coth(x)dx = log(sinh(x)) + C$

$\int \frac{cos(ax)}{sin^n(ax)}dx = -\frac{1}{(n-1)a\cdot sin^{n-1}(ax)} + C$

$\int \frac{1}{e^x+a}dx = \frac{x-ln(a+e^x)}{a} + C$

$\int \frac{1}{e^x-a}dx = \frac{ln(e^x-a)-x}{a} + C$

$\int \frac{1}{x^2+x}dx = ln(x) - ln(x+1) + C$

$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2arctan(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$

$\int x\cdot e^{ax}dx = (\frac{ax-1}{a^2})\cdot e^{ax} + C$

$\int x^2\cdot e^{ax}dx = (\frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3})\cdot e^{ax}$

$\int \frac{1}{p+q\cdot e^{ax}}dx = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap}\cdot ln|p+q\cdot e^{ax}| + C$

$\int \frac{e^{ax}}{p+q\cdot e^{ax}}dx = \frac{1}{ap}\cdot ln|p+q\cdot e^{ax}|$

$\int e^{ax}\cdot sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cdot sin(bx) + b\cdot cos(bx)] + C$

$\int e^{ax}\cdot cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cdot cos(bx) + b\cdot sin(bx)] + C$

$\int x\cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2} + C$

$\int \frac{(ln(x))^n}{x}dx = \frac{(ln(x))^{n+1}}{x+1} + C$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$

Satz von Stokes

$A = \iint rot(\vec{v})\cdot\vec{n}\; dO \rightarrow (\vec{n}\; normiert!!!)(zB.:\; dO = dx\cdot dy)$

Differentialoperatoren

$grad(f) = \nabla f(x,y,z) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z))$

$div(\vec{v}) = (\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z))$

$$rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y\cdot v_3 - \partial_z\cdot v_2\\ \partial_z\cdot v_1 - \partial_x\cdot v_3\\ \partial_x\cdot v_2 - \partial_y\cdot v_1\end{pmatrix}$$

Zusammensetzungen von Differentialoperatoren

$div(grad(f)) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f \rightarrow$ Laplace-Operator
$rot(grad(f)) \equiv (0,0,0)$
$div(rot(\vec{v})) \equiv 0$
$div(f\cdot rot(\vec{v}) = grad(f)\cdot rot(\vec{v})$
$rot(rot(\vec{v}) = grad(div(\vec{v})) - (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$
$div = 0 \Rightarrow$ Quellfrei, $rot = 0 \Rightarrow$ Wirbelfrei.
$div = rot = 0 \Rightarrow$ Harmonisch

Differentialgleichungen — Fota S.81-82

lineare homogene DGL 1.Ordnung

Form: $F(x,y,y',y'',...,y^n)$
simpel: $y'(x) = f(x) \rightarrow y(x) = [\int f(x)dx] + C$
separiebar: $y'(x) = \frac{f(x)}{h(y)} \rightarrow \int h(y)dy = [\int f(x)dx] + C$

$y' = p(x)\cdot y$ (immer separierbar):
1. Substitution $y' = \frac{dy}{dx}$
2. Separieren $\rightarrow \frac{1}{y}\cdot dy = p(x)\cdot dx$
3. Integrieren $\rightarrow \int \frac{1}{y}dy = [\int p(x)dx] + \mathbf{C}$

Substitutionen: $\rightarrow$ Achtung Rücksubstitution!
A) $y'(x) = f(ax+by(x)+c)$: $Sub: u(x) = ax+by(x)+c$
$\Rightarrow u'(x) = a + b\cdot f(u)$
B) $y'(x) = f(\frac{y}{x})$: $Sub: u(x) = \frac{y}{x}$
$\rightarrow y = u(x)\cdot x$
$\Rightarrow y'(x) = u(x) + x\cdot u'(x)$
C) $y'(x) = (y(x)+f(x))^2$: $Sub: u(x) = y(x) + f(x)$
$\Rightarrow y'(x) = u'(x) - f'(x); y(x) = u(x) - f(x)$
Tipp: DGL-Form: $u'\cdot y + u\cdot y' = (uy)' \rightarrow$ Integral

lineare inhomogene DGL 1.Ordnung

$y' = p(x)\cdot y + q(x)$
1. Lösen der homogenen DGL wie oben
   $\Rightarrow y_h = y' + ay = 0$
2. Finde partikuläre Lösung mit:
   A) Ansatz von Tabelle $\rightarrow$ **3.1**
   B) Ansatz von Lagrange $\rightarrow$ **4.1**
   3.1 Ansatz ableiten $\rightarrow y'$
   3.2 y und y' in Anfangsgleichung einsetzen
   3.3 Konstanten bestimmen $\rightarrow$ **5.**
5. $y = y_h + y_p \rightarrow$ Randbedingungen

Störfunktion	**Ansatz für y_p**
Konstante	$\mathbf{y_p = A}$
lin. Fkt. quadr. Fkt. Polynom n-Grades	$\mathbf{y_p = Ax + B}$ $\mathbf{y_p = Ax^2 + Bx + C}$ $\mathbf{y_p = A + Bx + Cx^2 + ... + Zx^n}$
$Asin(\omega x)$ $Bcos(\omega x)$ $Csin(\omega x) + Dcos(\omega x)$	$\mathbf{y_p = Csin(\omega x) + Dcos(\omega x)}$
$A\cdot e^{bx}$	$\mathbf{y_p = C\cdot e^{bx}}$ oder falls $b = -a$: $\mathbf{y_p = Cx\cdot e^{bx}}$

Ansatz von Lagrange
4.1 Homogene Lösung finden: $y(x) = C\cdot ...$
4.2 Konstante C als veränderliche Fkt.:
$C = C(x) \Rightarrow y(x) = C(x)\cdot ...$

4.3 Ableiten: $y'(x) = C'(x) \cdot ...$ $\rightarrow$ Produktregel!
4.4 Einsetzen in die inhomogene DGL
4.5 Lösen nach $C(x) \rightarrow$ meist partielle Integration
4.6. Lösung für $C(x)$ in Lösung von y_h einsetzen $\rightarrow$ **5.**

Exakte DGL

Beschreiben Niveaulinien einer Funktion
$\Phi(x, y) + \Psi(x, y) \cdot y' = 0$
Bedingung:
- $\Phi_y(x, y) = \Psi_x(x, y) \forall (x, y) \in$ Def. Bereich
- Def. Bereich muss einfach zusammenh. sein. Lösen:

$\int \Phi(x, y)dx + \alpha(y) = \int \Psi(x, y)dy + \beta(x) = u(x, y)$
$\rightarrow \alpha(y)$ und $\beta(x)$ durch Koeff.vergl. finden
$u(x, y) + C = 0 \rightarrow$ nach y lösen $\Rightarrow y_h$

Bernoulli DGL

$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x) \cdot y^n$
1. Substitution: $u = y^{1-n}$
2. $\Rightarrow u' = (1 - n)y^{-n}$
3. Ansatz in DGL einsetzen, nach u' auflösen
4. y_h lösen $\rightarrow$ Rücksubstitution

Homogene DGL 2.Ordnung

$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$
1. Setze $y = e^{\lambda x}$
2. $\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \rightarrow \quad$ char. Polynom
3. Löse das char. Polynom:
   A) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$
   B) $\lambda_1 = \lambda_2 = c \Rightarrow y = C_1e^{cx} + C_2xe^{cx}$ $(c \in \mathbb{R})$
   C) $\lambda_{1,2} = d \pm i\omega \rightarrow$ komplex konjugiert
   $\Rightarrow y = e^{dx}(C_1sin(\omega x) + C_2cos(\omega x))$
   $\Rightarrow y = e^{dx}(C_1e^{i\omega x} + C_2e^{-i\omega x})$
4. Falls kein Störterm vorhanden ist $\rightarrow$ Randbedingungen

Inhomogene DGL 2.Ordnung

$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = g(x)$
1. Lösen der homogenen DGL wie oben
2. Finde partikuläre Lösung mit:
   A) Ansatz von Tabelle $\rightarrow$ **3.1**
   B) Ansatz von Lagrange $\rightarrow$ **4.1**
   3.1 Ansatz ableiten $\rightarrow y', y''$
   3.2 y, y' und y'' in Anfangsgleichung einsetzen
   3.3 Konstanten bestimmen $\rightarrow$ **5.**
5. $y = y_h + y_p \rightarrow$ Randbedingungen

Störfunktion	**Ansatz für y_p**
Polynom n-Grades	$b \neq 0$ $\quad \mathbf{y_p = Q_n(x)}$ $a \neq 0; b = 0$ $\quad \mathbf{y_p = xQ_n(x)}$ $a = 0; b = 0$ $\quad \mathbf{y_p = x^2Q_n(x)}$
e^{cx}	c ist keine Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Ae^{cx}}$ c ist einfache Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Axe^{cx}}$ c ist doppelte Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Ax^2e^{cx}}$
$Asin(\omega x)$ $Bcos(\omega x)$ lin-Komb.	$i\omega$ ist keine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p = Csin(\omega x) + Dcos(\omega x)}$ $i\omega$ ist eine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p = x(Csin(\omega x) + Dcos(\omega x))}$
$\frac{1}{x^2}$	$\mathbf{y_p = A \cdot ln\|x\|}$
Summe von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} + y_{p2} + ...}$
Produkt von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} \cdot y_{p2} \cdot ...}$ $\rightarrow$! Funktioniert nicht immer !

Ansatz von Lagrange für DGL 2.Ordnung

4.1 Homogene Lösung finden: $y(x) = C \cdot ...$
4.2 Konstante C_1, C_2 als veränderliche Fkt.:
$C_1 = C_1(x),\ C_2 = C_2(x)$
4.3 DGL $\Rightarrow y(x) = C_1(x)u(x) + C_2(x)v(x)$
4.4 Wir treffen folgende Annahme:
$C_1'u + C_2'v = 0$
$C_1'u' + C_2'v' = g(x)$
4.5 $y' = C_1u' + C_2v'$
$y'' = C_1'u' + C_1u'' + C_2'v' + C_2v''$
4.6 Löse für C_1' und C_2' :
$C_1' = \frac{g(x) \cdot v}{u'v - uv'}$
$C_2' = -\frac{g(x) \cdot u}{u'v - uv'}$
4.7 C_1 und C_2 durch Integration finden (Integrationskonstante weglassen) $\rightarrow$ **5.**

DGL n-ter Ordnung

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + ... + a_1y' + a_0y = g(x)$
1. Kommen nur Ableitungen von y vor?
   1.1 Substituiere y' mit $u \Rightarrow$ Grad der DGL $= n - 1$
2. Setze $y = e^{\lambda x}$
3. Finde charakteristisches Polynom für y_h:
   $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$
   A) Alle Lsg. sind reell und $\lambda_1 \neq \lambda_2 + ...$
   $\Rightarrow y_1 = C_1e^{\lambda_1 x};\ y_2 = C_2e^{\lambda_2 x}; ...$
   $\Rightarrow y(x) = y_1 + y_2 + ... = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + ...$
   B) $\lambda = \alpha$ ist eine r-fache Lsg. des char. Poly.: $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = \alpha$
   $\Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}; y_2 = xe^{\alpha x}; ...; y_1 = x^{r-1}e^{\alpha x}$
   $\Rightarrow y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + ... + C_rx^{r-1})e^{\alpha x}$
   C) $\lambda_{1,2} = a \pm i\omega$ eine einfach konj. komplexe Lsg.:
   $\Rightarrow y_1 = e^{ax}sin(\omega x); y_2 = e^{ax}cos(\omega x)$
   $\Rightarrow y(x) = e^{ax}(C_1sin(\omega x) + C_2cos(\omega x))$
   D) r-fache konj. komplexe Lsg.:
   $\Rightarrow$ Ersetze Konstanten C_1 und C_2 durch $C_1(x)$ und $C_2(x)$ vom Grad r
   $\Rightarrow y(x) = e^{ax}(C_1(x)sin(\omega x) + C_2(x)cos(\omega x))$
4. Finde partikuläre Lösung mit Tabelle ($\nexists$ Lagrange)
   4.1 Ansatz ableiten $\rightarrow y', y'', ..., y^{(n)}$
   4.2 $y', y'', ..., y^{(n)}$ in Anfangsgleichung einsetzen
   4.3 Konstanten bestimmen
5. $y = y_h + y_p \rightarrow$ Randbedingungen

Tipp: Char. Poly.: $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
$\rightarrow$mit $(\lambda - 1)$ multiplizieren (Fota S.18)
$\Rightarrow$ ergibt zusätz. Nullst. für $\lambda = 1 \rightarrow$ **De Moivre**

Störfunktion	**Ansatz für y_p**
Polynom n-Grades	$\mathbf{y_p = A + Bx + Cx^2 + ...}$
$m \cdot e^{cx}$	c ist keine Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Ae^{cx}}$ c ist einfache Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Axe^{cx}}$ c ist r-fache Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Ax^re^{cx}}$
$Asin(\omega x)$ $Bcos(\omega x)$ lin-Komb.	$i\omega$ ist keine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p = Csin(\omega x) + Dcos(\omega x)}$ $i\omega$ ist eine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p = x(Csin(\omega x) + Dcos(\omega x))}$
Summe von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} + y_{p2} + ...}$
Produkt von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} \cdot y_{p2} \cdot ...}$ $\rightarrow$! Funktioniert nicht immer !

Eulersche DGL n-ter Ordnung

$a_ny^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x}y^{n-1} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}}y' + \frac{a_0}{x^n}y = 0$
1. Setze $y = x^\alpha$
2. Finde das Indexpolynom:
   $... + a_3(\alpha - 2)(\alpha - 1)\alpha + a_2\alpha(\alpha - 1) + a_1\alpha + a_0 = 0$
3. Finde Nullstellen des Indexpolynoms
   4.1 Ist α eine k-fache reelle Nullstelle:
   $x_1 \rightarrow x^\alpha, x_2 \rightarrow ln(x) \cdot x^\alpha, ..., x_k \rightarrow (ln(x))^{k-1} \cdot x^\alpha$
   4.2 Ist $\alpha = a + ib, \bar{\alpha} = a - ib, b \neq 0$ ein Paar konj. kompl. k-facher Nullstellen:

$x_1 \rightarrow x^\alpha cos(b \cdot lnx) \quad ; \quad x_2 \rightarrow x^\alpha sin(b \cdot lnx)$
$x_3 \rightarrow (lnx)x^\alpha cos(b \cdot lnx) \quad ; \quad x_4 \rightarrow (lnx)x^\alpha sin(b \cdot lnx)$
$\vdots \qquad \vdots$
$x_{k-1} \rightarrow (lnx)^{k-1}x^\alpha cos(b \cdot lnx);\ x_k \rightarrow (lnx)^{k-1}x^\alpha sin(b \cdot lnx)$

5. $y_h(x) = A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + ... + Z \cdot x_n$

DGL Systeme

$f_1, f_2, ..., f_n$ von x unabhängig $\Rightarrow$ autonom

DGL System: $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) = f_1(x,y) \\ \dot{y}(t) = f_2(x,y) \end{bmatrix}$

Phasenportrait: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$

$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b1 \\ \dot{y}(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + b2 \end{bmatrix} \to A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{z} = A \cdot \vec{z} + \vec{b},\ \vec{z} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

- Störterm $\vec{b} = 0 \to$ System homogen
- Ordnung: Summe der Ordnungen des Systemes
- DGL abhängig voneinander $\to$ gekoppelt, sonst entkoppelt

Lösen über char. Polynom: $\to$ gut für homogene DGL

1. Bestimme Eigenwerte $(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$
   A) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reel) $\Rightarrow x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
   B) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$(reel) $\Rightarrow x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}$
   C) $\lambda_{1,2} = a \pm ib \Rightarrow x(t) = e^{at}(C_1 sin(bt) + C_2 cos(bt))$
2. Wenn $\vec{b} \neq 0 \Rightarrow$ finde allg. Lösung von $x(t)$
3. f_2 in f_1 einsetzen $\Rightarrow y(t)$...

Lösen über Entkoppelung des Systems: $\to$gut für inhom. DGL

1. Bestimme Eigenwerte: $(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$
2. Bestimme Eigenvektoren $\to$ ist A halbeinfach?$(gV = aV)$
   A)A ist halbeinfach (= diagonalisierbar) $\to$ **3.1**
   B)A ist nicht halbeinfach $\to$ **4.1**

3.: $T^{-1}AT = D$
   3.1 Hat A doppelte Eigenwerte? Ja $\Rightarrow$ **4.1**
   3.2 $z = Tz \to y' = Tz' \to z' = T^{-1}ATz \to z' = Dz$
   3.3 Löse $z' = Dz \to z = ...$
   3.4 $y = Tz$

4.: A nicht diagonalisierbar und/oder EW doppelt
   4.1 $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) = a \cdot x + b \cdot y \\ \dot{y}(t) = c \cdot x + d \cdot y \end{bmatrix} \to y = \frac{\dot{x} - ax}{b} \to \dot{y} = \frac{\ddot{x} - a\dot{x}}{b}$
   4.2 Einsetzen: $\dot{y} = c \cdot x + d(\frac{\dot{x} - ax}{b})$
   $\to \frac{\ddot{x} - a\dot{x}}{b} = c \cdot x + d(\frac{\dot{x} - ax}{b})$
   4.3 $\Rightarrow \frac{1}{b}\ddot{x} - \frac{a+d}{b}\dot{x} + \frac{ad - cb}{b}x = 0$
   4.4 DGL auflösen und allg. Lösung in System einsetzen und auflösen

Gleichgewichtspunkte

Dort wo $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$ keine änderung in x und y

Durchlaufsinn:

Richtung, welche sich mit steigendem t die Kurve bewegt:

$\dot{x} > 0 \to$ immer $\curvearrowright$ (positive Steigung)
$\dot{y} < 0 \to$ immer $\curvearrowleft$ (negative Steigung)

Nicht lineare Systeme müssen linearisiert werden!

Für Durchlaufsinn:

Falls $\dot{x} < 0$ und $\dot{y} > 0 \to$ Intuition oder einfach probieren

Potenzreihen — Fota S.79

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \to$ Entwicklungspkt. x_0; Koeff. a_n

Konvergenzradius: $r = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$

$\forall x\ mit\ |x - x_0| < r \to konv.,\ \forall x\ mit\ |x - x_0| > r \to div.$

Finde **Taylorreihe**

$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Integral? $\Rightarrow$ 1.Ableitung: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

Finde **erste k Koeffizienten** der Potenzreihenentw.
   A) Terme höher als x^k streichen
   B) Integral: $\Rightarrow$ Terme höher x^{k-1} streichen
   C) Quadrat? Ausrechnen, zu hohe Terme streichen

Finde **komplette** Potenzreihenentw. um $x_0 = a$
   A) Taylorentwicklung: Ableiten, einsetzen,...
   B) Funktion in bekannte Reihe umformen
   C) Ableitung/Integral als Reihe darstellbar?
   D) Partialbruchzerlegung
   E) Funktion als Summe/Produkt bekannter Reihen
   Funktion $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to$ Koef.-Vergleich
   F) Funktion ungerade? $\to a_0, a_2, a_4, ... = 0$
   G) Bruch? $\Rightarrow$ Nenner auf linke Seite, Koeff.-Vergl.

Bsp: $ln(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - 1)^k$ bei $x_0 = 1$

1. Ersetze x durch x_0, schreibe Summe aus
   $ln(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - 1)^1 + a_2(x_0 - 1)^2 + ...$
2. Setze x_0 ein, finde a_0
   $0 = a_0 \cdot 1 + 0 + ... + 0 \Rightarrow a_0 = 0$
3. Leite **beide** Seiten ab
   $\frac{1}{x_0} = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2(x_0 - 1) + a_3 \cdot 3(x_0 - 1)^2 + ...$
4. Setze x_0 ein , finde a_1
   $\frac{1}{1} = a_1 + 0 + ... \Rightarrow a_1 = 1$
5. Leite weiter ab, finde mehrere a_n
   $a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ a_2 = -\frac{1}{2};\ a_3 = \frac{1}{3}; ...$
6. Finde Bildungsschema der a_n
   $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k};\ k \geq 1$
   $\to$ Achtung: Teillösung nicht vergessen: $a_0 = 0$

Potenzreihenentwicklung

Alle Reihen um $-1 < x < 1$ oder $-|a| < x < |a|$

Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$

$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...$

$\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{a})^n = \frac{1}{a}(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + ...)$

Integrale/Ableitungen der geom. Reihe:

$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + ...$

$\frac{1}{(x-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{a})^{n+2}(n+1)x^n = \frac{1}{a^2} + \frac{2x}{a^3} + \frac{3x^2}{a^4} + \frac{4x^3}{a^5} ...$

$ln(1 - x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...)$

$ln(1 + x) = \int_1^x \frac{1}{1+t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp ...$

$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}x^n((1+n)(2+n)) = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + ...$

$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}x^n(-1)^n(1+n)(2+n) = 1 - 3x + 6x^2 \mp ...$

Binomische Reihe:

$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^2 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \pm ...$

$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm$

$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - ...$

Weitere Reihen($x \in \mathbb{R}$):

$e^{cx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{n!} = 1 + (cx) + \frac{(cx)^2}{2!} + \frac{(cx)^3}{3!} + ...$

$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp ...$

$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp ...$

$sin^2(x) = \frac{2^1}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 \mp ...$

$cos^2(x) = 1 - \frac{2^1}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 \pm ...$

$sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...$

$cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + ...$

$ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n = (x - 1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \pm ...$
$\to 0 < x \leq 2$

Vereinfachungen:

$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{3}} = \frac{1}{3}(1 - (\frac{x-1}{3})1(\frac{x-1}{3})^2 + ...)$

$\frac{1}{(x-3)^2} = \frac{d}{dx}\frac{-1}{x-3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{3-x}$

$ln(x) = ln(x + 1 - 1) = ln(1 + (x - 1))$

$e^x = e \cdot e^{x-1}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)^{2n}dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n-2) \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)^{2n}dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n-2) \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$

$(a^5 - b^5) = (a - b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$

$a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = (a + 1)(a^4 + a^2 + 1) = (a + 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

Komplexe Zahlen — Fota S.18-19

Potenzieren (Nur in Trig./Exp.-Form sinnvoll)

$z^n = r \cdot cis(\varphi)^n = r^n \cdot cis(n \cdot \varphi)$

Wurzel ziehen

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot cis(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$;

$k = \{0, 1, ..., n - 1\} \to$ bilden ein regelmässiges n-Eck

Natürlicher Logarithmus

$ln(z)$ ist unendlich vieldeutig

Hauptwert: $ln(z) = ln(r) + i\varphi$

Allgemein: $ln(z) = ln(r) + i(\varphi + 2k\pi)k \in \mathbb{Z}$

Graphen Transformation

1. $f(x) = x^3$

2. $f(x) = -x^3$
(Spiegelung an x-Achse)

3. $f(x) = 1 + x^3$
(Verschiebung x-Achse)

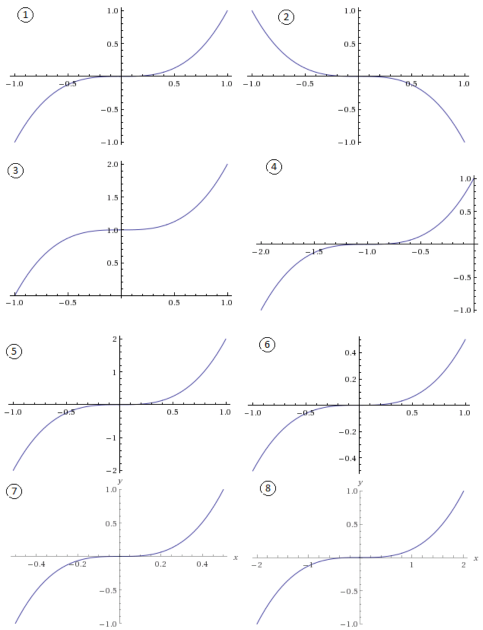
4. $f(x) = (1+x)^3$
(Verschiebung y-Achse)

5. $f(x) = 2x^3$
(Dehnung y-Achse)

6. $f(x) = 0.5(x^3)$
(Stauchung y-Achse)

7. $f(x) = (2x)^3$
(Stauchung x-Achse)

8. $f(x) = (0.5x)^3$
(Dehnung x-Achse)



Drehmatrizen — Fota S.112

Drehrichtung nach rechte-Hand Regel

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ 0 & sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} \rightarrow$ Drehung um x-Achse

$\begin{pmatrix} cos(\varphi) & 0 & sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\varphi) & 0 & cos(\varphi) \end{pmatrix} \rightarrow$ Drehung um y-Achse

$\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) & 0 \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Drehung um z-Achse

$\begin{pmatrix} cos(\varphi)\cdot sin(\rho) & -sin(\varphi) & cos(\varphi)\cdot sin(\rho) \\ sin(\varphi)\cdot sin(\rho) & cos(\varphi) & sin(\varphi)\cdot sin(\rho) \\ -sin(\rho) & 0 & cos(\rho) \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ beliebige Achse durch (0,0,0)

Fehlerrechnung — Fota S.64

Voraussetzung: h ist sehr klein

$f(x_0+h) \approx f'(x_0)\cdot h + f(x_0) + Rest$

$\rightarrow$ Weil: $f'(x_0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Linearisieren

Tangente an $f(x)$ im Punkt (x_0, y_0)(lin. Ersatzfkt.):

$y(x) = t(x) = f'(x_0)(x-x_0) + y_0$

Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0) :

$t(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x((x_0,y_0)(x-x_0)) + f_y((x_0,y_0)(y-y_0)) = z$

3D-Parameter:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix} + r\cdot grad \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n}_E \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{n}_E \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$\vec{n}_E = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)^T$

Fehlerfunktion: $\phi(x) = f(x) - [f'(x_o)\cdot(x-x_0) + f(x_0)]$

Approximationen für kleine Werte von $(x) << 1$

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$; $\quad \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \approx 1 - x$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$

Additionstheoreme — Fota S.99

Allgemeines

$cos(-x) = cos(x)$; $\quad cos(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp sin(x)$

$cos(a) = sin(\frac{\pi}{2} \pm a)$; $\quad tan(a) \pm tan(b) = \frac{sin(a\pm b)}{cos(a)cos(b)}$

$cos(a) - sin(a) = \sqrt{2}\cdot sin(\frac{\pi}{4} - a) = \sqrt{2}\cdot cos(\frac{\pi}{4} + a)$

Cot

$1 + cot^2(x) = \frac{1}{sin(x)}$; $\quad cot(a \pm b) = \frac{cot(a)cot(b)\mp 1}{cot(a)\pm cot(b)}$

$cot(2a) = \frac{cot^2(a)-1}{2cot(a)}$

$\frac{a}{2}$

$sin(\frac{a}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1-cos(a))}$; $cos(\frac{a}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1+cos(a))}$

Potenzen

$sin^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(1-cos(2a))$; $\quad sin^3(a) = \frac{1}{4}\cdot(3sin(a) - sin(3a))$

$sin^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(cos(4a) - 4cos(2a) + 3)$

$cos^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(1+cos(2a))$; $\quad cos^3(a) = \frac{1}{4}\cdot(3cos(a) - cos(3a))$

$cos^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(cos(4a) - 4cos(2a) + 3)$

Hyperbolische Funktionen — Fota S.60

Allgemeines

$coth(x) = \frac{cosh(x)}{sinh(x)}$

$tanh(a\pm b) = \frac{1}{coth(a\pm b)} = \frac{tanh(a)\pm tanh(b)}{1\pm tanh(a)tanh(b)}$

2a und 3a

Alles gleich wie für sin und cos *(Fota S.99)*,

$\rightarrow sin \hat{=} sinh$, $\quad cos \hat{=} cosh$, $\quad tan \hat{=} tanh$

$\frac{a}{2}$

$sinh(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{cosh(a)-1}{2}}$, $x \geq 0$; $\quad cosh(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{cosh(a)+1}{2}}$

$sinh(\frac{a}{2}) = -\sqrt{\frac{cosh(a)-1}{2}}$, $x \leq 0$

Summen

$sinh(a) + sinh(b) = 2sinh(\frac{a+b}{2})cosh(\frac{a-b}{2})$

$sinh(a) - sinh(b) = 2cosh(\frac{a+b}{2})sinh(\frac{a-b}{2})$

$cosh(a) + cosh(b) = 2cosh(\frac{a+b}{2})cosh(\frac{a-b}{2})$

$cosh(a) - cosh(b) = 2sinh(\frac{a+b}{2})sinh(\frac{a-b}{2})$

$tanh(a) \pm tanh(b) = \frac{sinh(a\pm b)}{cosh(a)cosh(b)}$

Produkte

$sinh(a)sinh(b) = \frac{1}{2}\cdot[cosh(a+b) - cosh(a-b)]$

$cosh(a)cosh(b) = \frac{1}{2}\cdot[cosh(a+b) + cosh(a-b)]$

$sinh(a)cosh(b) = \frac{1}{2}\cdot[sinh(a+b) + sinh(a-b)]$

$tanh(a)tanh(b) = \frac{tamh(a)+tanh(b)}{coth(a)+coth(b)}$

$sin(ax)sin(bx) = \frac{1}{2}[cos((a-b)x) - cos((a+b)x)]$

$cos(ax)cos(bx) = \frac{1}{2}[cos((a-b)x) + cos((a+b)x)]$

$sin(ax)cos(bx) = \frac{1}{2}[sin((a+b)x) + sin((a-b)x)]$

Potenzen

$sinh^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(cosh(2a) - 1)$

$sinh^3(a) = \frac{1}{4}\cdot(sinh(3a) - 3sinh(a))$

$sinh^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(cosh(4a) - 4cosh(2a) + 3)$

$cosh^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(cosh(2a) + 1)$

$cosh^3(a) = \frac{1}{4}\cdot(cosh(3a) + 3cosh(a))$

$cosh^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(cosh(4a) + 4cosh(2a) + 3)$

Formel von Moivre

$(cosh(a) \pm sinh(a))^n = cosh(na) \pm sinh(na), \quad n \geq 2$

Inverse der Trigonometrischen Funktionen

$cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad sin(arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$sin(arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad cos(arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$tan(arccos(x)) = x^{-1}\cdot(1-x)^{\frac{1}{4}}$

$tan(arcsin(x)) = x\cdot(1-x)^{-\frac{1}{4}}$

$arsinh(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$arcosh(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1}$

$artanh(x) = \frac{1}{2}\cdot ln(\frac{1+x}{1-x}), \quad |x| < 1$

$arcoth(x) = \frac{1}{2}\cdot ln(\frac{1+x}{x-1}), \quad |x| > 1$

$sinh(2\cdot arcsinh(x)) = 2x\sqrt{x^2-1}$

$sinh(arcosh(x)) = \sqrt{x^2-1}$; $\quad x > 0$

$cosh(arsinh(x)) = \sqrt{x^2+1}$