ETH zürich

# Übungslektion 7 – Suchen und Sortieren

Informatik II

1. / 2. April 2025

# Heutiges Programm

Verbesserter Insertion Sort

Asymptotische Laufzeit Rekursiver Funktionen

Divide & Conquer Sortieralgorithmen

Gruppenübung

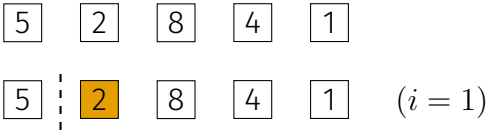
Hausaufgaben

# 1. Verbesserter Insertion Sort

# Letztes Mal: Insertion Sort

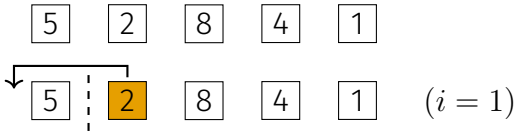

- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration $i$ sind Elemente in `li[:i]` sortiert.
- Bei Iteration $i$, das $i$-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis das gesamte Array sortiert ist ($i = n$).

# Letztes Mal: Insertion Sort



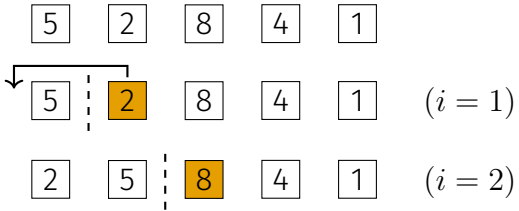

- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration $i$ sind Elemente in `li[:i]` sortiert.
- Bei Iteration $i$, das $i$-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis das gesamte Array sortiert ist ($i = n$).

# Letztes Mal: Insertion Sort



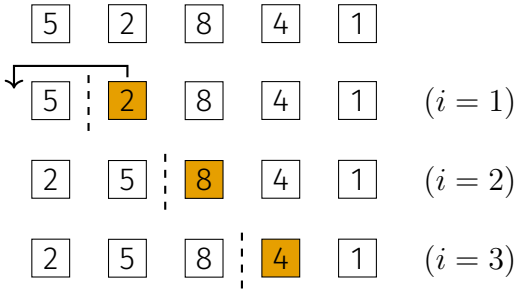

- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration $i$ sind Elemente in `li[:i]` sortiert.
- Bei Iteration $i$, das $i$-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis das gesamte Array sortiert ist ($i = n$).

# Letztes Mal: Insertion Sort



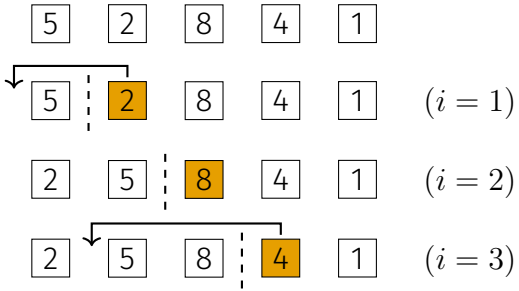

- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration $i$ sind Elemente in `li[:i]` sortiert.
- Bei Iteration $i$, das $i$-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis das gesamte Array sortiert ist ($i = n$).

# Letztes Mal: Insertion Sort



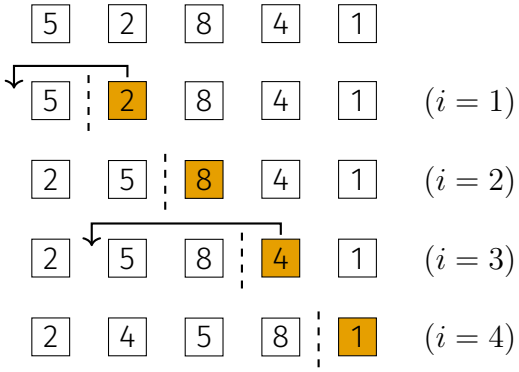

- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration $i$ sind Elemente in `li[:i]` sortiert.
- Bei Iteration $i$, das $i$-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis das gesamte Array sortiert ist ($i = n$).

# Letztes Mal: Insertion Sort



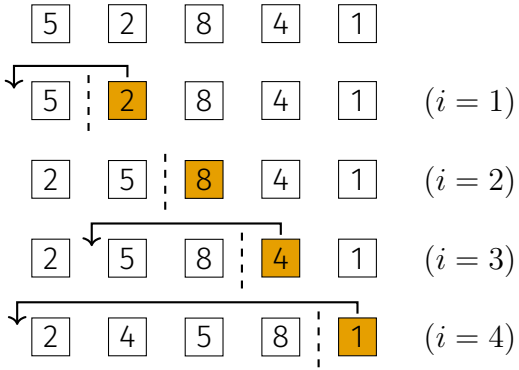

- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration $i$ sind Elemente in `li[:i]` sortiert.
- Bei Iteration $i$, das $i$-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis das gesamte Array sortiert ist ($i = n$).

# Letztes Mal: Insertion Sort



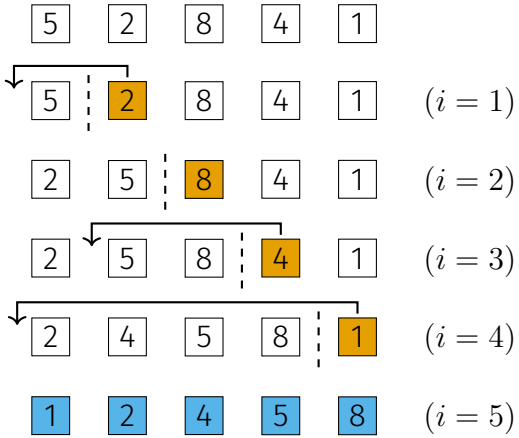

- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration $i$ sind Elemente in `li[:i]` sortiert.
- Bei Iteration $i$, das $i$-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis das gesamte Array sortiert ist ($i = n$).

# Letztes Mal: Insertion Sort




- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration $i$ sind Elemente in `li[:i]` sortiert.
- Bei Iteration $i$, das $i$-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis das gesamte Array sortiert ist ($i = n$).

# Letztes Mal: Insertion Sort




- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration $i$ sind Elemente in `li[:i]` sortiert.
- Bei Iteration $i$, das $i$-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis das gesamte Array sortiert ist ($i = n$).

# Letztes Mal: Insertion Sort

**Input**: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output**: Sortiertes Array $A$

```
1 for i in range(1,len(A)):
2     j = i
3     while j>0 and A[j-1] > A[j]:
4         A[j], A[j-1] = A[j-1], A[j]
5         j = j-1
```

- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall?

# Letztes Mal: Insertion Sort

**Input**: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output**: Sortiertes Array $A$

```
1 for i in range(1,len(A)):
2     j = i
3     while j>0 and A[j-1] > A[j]:
4         A[j], A[j-1] = A[j-1], A[j]
5         j = j-1
```

- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall? $\Theta(n^2)$

# Letztes Mal: Insertion Sort

**Input**: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output**: Sortiertes Array $A$

```
1 for i in range(1,len(A)):
2     j = i
3     while j>0 and A[j-1] > A[j]:
4         A[j], A[j-1] = A[j-1], A[j]
5         j = j-1
```

- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall? $\Theta(n^2)$
- Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall?

# Letztes Mal: Insertion Sort

**Input**: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output**: Sortiertes Array $A$

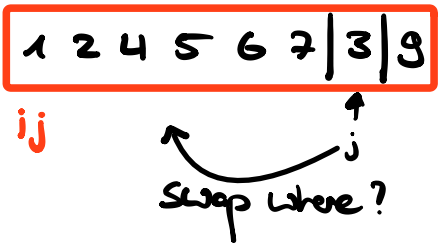
```
1 for i in range(1,len(A)):
2     j = i
3     while j>0 and A[j-1] > A[j]:
4         A[j], A[j-1] = A[j-1], A[j]
5         j = j-1
```

- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall? $\Theta(n^2)$
- Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall? $\Theta(n^2)$

# Letztes Mal: Insertion Sort

**Input**: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output**: Sortiertes Array $A$

```
1  for i in range(1,len(A)):
2      j = i
3      while j>0 and A[j-1] > A[j]:
4          A[j], A[j-1] = A[j-1], A[j]
5          j = j-1
```




- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall? $\Theta(n^2)$
- Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall? $\Theta(n^2)$
- **Frage**: Wie können wir die Anzahl Vergleiche für den schlechtesten Fall verbessern?

# Letztes Mal: Insertion Sort

**Input**: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output**: Sortiertes Array $A$

```
1 for i in range(1,len(A)):
2     j = i
3     while j>0 and A[j-1] > A[j]:
4         A[j], A[j-1] = A[j-1], A[j]
5         j = j-1
```

- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall? $\Theta(n^2)$
- Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall? $\Theta(n^2)$
- **Frage**: Wie können wir die Anzahl Vergleiche für den schlechtesten Fall verbessern?
  Der Suchbereich (Einfügebereich) ist bereits sortiert. Konsequenz: binäre Suche möglich.

# Binärer Insertion Sort

**Input**: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output**: Sortiertes Array $A$

```
1       for i in range(1,len(A)):
2         x = A[i]
3         p = BinarySearchIndex(A,0,i-1,x)
4         for j in range(i-1,p-1,-1):
5             A[j+1] = A[j]
6         A[p] = x
```

# Binärer Insertion Sort

**Input**: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output**: Sortiertes Array $A$

```
1          for i in range(1,len(A)):
2            x = A[i]
3            p = BinarySearchIndex(A,0,i-1,x)
4            for j in range(i-1,p-1,-1):
5                A[j+1] = A[j]
6            A[p] = x
```

- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall?

# Binärer Insertion Sort

**Input**: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output**: Sortiertes Array $A$

```
1          for i in range(1,len(A)):
2            x = A[i]
3            p = BinarySearchIndex(A,0,i-1,x)
4            for j in range(i-1,p-1,-1):
5                A[j+1] = A[j]
6            A[p] = x
```

- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall?
  $\sum_{i=1}^{n-1} a \cdot \log i = a \log((n-1)!) \in \Theta(n \log n)$

# Binärer Insertion Sort

**Input**: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output**: Sortiertes Array $A$

```
1          for i in range(1,len(A)):
2            x = A[i]
3            p = BinarySearchIndex(A,0,i-1,x)
4            for j in range(i-1,p-1,-1):
5                A[j+1] = A[j]
6            A[p] = x
```

- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall?
  $\sum_{i=1}^{n-1} a \cdot \log i = a \log((n-1)!) \in \Theta(n \log n)$
- Anzahl Kopiervorgänge im schlechtesten Fall?

# Binärer Insertion Sort

**Input**: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output**: Sortiertes Array $A$

```
1          for i in range(1,len(A)):
2            x = A[i]
3            p = BinarySearchIndex(A,0,i-1,x)
4            for j in range(i-1,p-1,-1):
5                A[j+1] = A[j]
6            A[p] = x
```

- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall?
  $\sum_{i=1}^{n-1} a \cdot \log i = a \log((n-1)!) \in \Theta(n \log n)$
- Anzahl Kopiervorgänge im schlechtesten Fall? $\sum_{i=1}^{n-1} i \in \Theta(n^2)$

# 2. Asymptotische Laufzeit Rekursiver Funktionen

# Übung 1

Geben Sie die Anzahl Aufrufe der Funktion $f$ abhängig von $n$ in der $\Theta$-Notation für den untenstehenden Beispiel an. Kürzen Sie ihr Ergebnis soweit wie möglich. Geben Sie eine kurze Begründung.

```
1 #pre: n is a positive integer
2 def g(n):
3     count = 0
4     while n // (2 ** count) >= 1:
5         f()
6         count += 1
```

# Antwort 1

```
1 #pre: n is a positive integer
2 def g(n):
3     count = 0
4     while n // (2 ** count) >= 1:
5         f()
6         count += 1
```

- Das Programm ruft die Funktion $f$, solange $n/2^{count} \geq 1$ ist.
- Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $\log n \geq count$.
- Die Variable $count$ misst die Anzahl der Iterationen der while Schleife, und dabei auch die Anzahl Aufrufe der Funktion $f$.
- Darum ist diese Anzahl $\log n$.
- Das bedeutet, dass diese Anzahl $\Theta(\log n)$ ist.

# Übung 2

Geben Sie die Anzahl Aufrufe der Funktion $f$ abhängig von $n$ in der $\Theta$-Notation für den untenstehenden Beispiel an. Kürzen Sie ihr Ergebnis soweit wie möglich. Geben Sie eine kurze Begründung.

```
1  # pre: n is a positive integer
2    def g(n):
3      if n >= 1:
4          f()
5          g(n // 2)
```

# Antwort 2

```
1  # pre: n is a positive integer
2    def g(n):
3      if n >= 1:
4          f()
5          g(n // 2)
```

Sei $T(n)$ die Anzahl der Aufrufe der Funktion $f$.

# Antwort 2

```
1  # pre: n is a positive integer
2    def g(n):
3      if n >= 1:
4          f()
5          g(n // 2)
```

Sei $T(n)$ die Anzahl der Aufrufe der Funktion $f$. Wenn $n \geq 1$, es gilt:
$T(n) = 1 + T(n/2) = 1 + 1 + T(n/2^2) = k + T(n/2^k)$.

- $f$ ist aufgerufen, solange $n/2^k \geq 1$ ist.
- Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $\log n \geq k$.
- Das bedeutet, dass die Anzahl der Aufrufe der Funktion $f$ ist $\log n$ liegt, und dabei diese Anzahl $\Theta(\log n)$ ist.

Besser: Teleskopieren mit Masters Theorem
→ jlotzer

**Step 1:** Rewrite the recursive Function $T(n)$ into following mathematical form:

$$T(n) = \underbrace{a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right)}_{\text{recursive call(s)}} + \underbrace{\theta(n^k \cdot log^p(n))}_{\text{additional runtime in each call of } T(n), \text{ (example: for-loop)}}$$

*Tipp: determine $\theta()$ directly and do Koeffizientenvergleich with the Formula above*

**Step 2:** Runtime is one of these cases:

1. if a $> b^k$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)})$
2. if a $= b^k$, and
   a) if p $> -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)} \cdot log^{p+1}(n))$
   b) if p $= -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)} \cdot log(log(n)))$
   c) if p $< -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)})$
3. if a $< b^k$, and
   a) if p $>= 0$, then $T(n) = \theta(n^k \cdot log^p(n))$
   b) if p $< 0$, then $T(n) = \theta(n^k)$

# Antwort 2

```
1  # pre: n is a positive integer
2    def g(n):
3      if n >= 1:
4          f()
5          g(n // 2)
```

k : additional runtime :

Sei $T(n)$ die Anzahl der Aufrufe der Funktion $f$.

1) $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta\left[n^k \cdot \log^p(n)\right]$

$T(n) =$

2) $a \overset{?}{=} b^k$

,

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \theta(n^k \cdot log^p(n))$$

1. if $a > b^k$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)})$
2. if $a = b^k$, and
   a) if $p > -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)} \cdot log^{p+1}(n))$
   b) if $p = -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)} \cdot log(log(n)))$
   c) if $p < -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)})$
3. if $a < b^k$, and
   a) if $p >= 0$, then $T(n) = \theta(n^k \cdot log^p(n))$
   b) if $p < 0$, then $T(n) = \theta(n^k)$

# Übung 3

Geben Sie die Anzahl Aufrufe der Funktion $f$ abhängig von $n$ in der $\Theta$-Notation für den untenstehenden Beispiel an. Kürzen Sie ihr Ergebnis soweit wie möglich. Geben Sie eine kurze Begründung.

```
1  # pre: n is a positive integer
2    def g(n):
3      if n >= 1:
4        for i in range(n):
5            f()
6          g(n // 2)
```

n

.... etwas/2

n · log n ?

Nicht ganz! falsche Intuition

# Antwort 3 Teleskopieren normal...

```
1  # pre: n is a positive integer
2    def g(n):
3      if n >= 1:
4          for i in range(n):
5              f()
6          g(n // 2)
```

Sei $T(n)$ die Anzahl der Aufrufe der Funktion $f$. Wenn $n \geq 1$, es gilt:

# Antwort 3

```
1  # pre: n is a positive integer
2    def g(n):
3      if n >= 1:
4          for i in range(n):
5              f()
6          g(n // 2)
```

k →
p = 0

f() wird einmal pro T(n) aufgerufen k = 1

$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta\left[n^k \cdot log^p(n)\right]$

$T(n) =$

a =
b =
k =
p =

} ZF:

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \theta(n^k \cdot log^p(n))$$

1. if $a > b^k$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)})$
2. if $a = b^k$, and
   a) if $p > -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)} \cdot log^{p+1}(n))$
   b) if $p = -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)} \cdot log(log(n)))$
   c) if $p < -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)})$
3. if $a < b^k$, and
   a) if $p >= 0$, then $T(n) = \theta(n^k \cdot log^p(n))$
   b) if $p < 0$, then $T(n) = \theta(n^k)$

# Antwort 3

```
1  # pre: n is a positive integer
2    def g(n):
3      if n >= 1:
4          for i in range(n):
5              f()
6          g(n // 2)
```

Sei $T(n)$ die Anzahl der Aufrufe der Funktion $f$. Wenn $n \geq 1$, es gilt:

$$
\begin{aligned}
&T(n) = n + T(n/2) \\
&= n + n/2 + T(n/2^2) \\
&= n + n/2 + \ldots + n/2^k + T(n/2^{k+1}) \\
&= n \sum_{j \leq k} 1/2^j + T(n/2^{k+1}) \\
&\leq 2n + T(n/2^{k+1}).
\end{aligned}
$$

- Die letzte Ungleichung gilt, weil $\forall k : \sum_{j \leq k} 1/2^j \leq 2$.
- Es gibt $k$, wofür $\lfloor n/2^{k+1} \rfloor = 0$, dann auch $T(\lfloor n/2^{k+1} \rfloor) = T(0) = 0$.
- Das bedeutet, dass $T(n) \leq 2n \in O(n)$.
- Analog dazu kann man zeigen, dass $T(n) \in \Omega(n)$, weil $g(n)$ ruft $f$ zumindest $n$-mal.
- Darum, $T(n) \in \Theta(n)$.

# Übung 4

Geben Sie die Anzahl Aufrufe der Funktion $f$ abhängig von $n$ in der $\Theta$-Notation für den untenstehenden Beispiel an. Kürzen Sie ihr Ergebnis soweit wie möglich. Geben Sie eine kurze Begründung.

```
1 # pre: n is a positive integer
2   def g(n):
3     if n >= 1:
4         for i in range(n):
5             f()
6         g(n // 2)
7         g(n // 2)
```

# Antwort 4

```
1  # pre: n is a positive integer
2    def g(n):
3      if n >= 1:
4          for i in range(n):
5              f()
6          g(n // 2)
7          g(n // 2)
```

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \theta(n^k \cdot log^p(n))$$

1. if $a > b^k$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)})$
2. if $a = b^k$, and
   a) if $p > -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)} \cdot log^{p+1}(n))$
   b) if $p = -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)} \cdot log(log(n)))$
   c) if $p < -1$, then $T(n) = \theta(n^{log_b(a)})$
3. if $a < b^k$, and
   a) if $p >= 0$, then $T(n) = \theta(n^k \cdot log^p(n))$
   b) if $p < 0$, then $T(n) = \theta(n^k)$

1) $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \theta[n^k \cdot log^p(n)]$

$T(n) =$

2) $a \lessgtr b^k$

# Antwort 4

```
1  # pre: n is a positive integer
2    def g(n):
3      if n >= 1:
4          for i in range(n):
5              f()
6          g(n // 2)
7          g(n // 2)
```

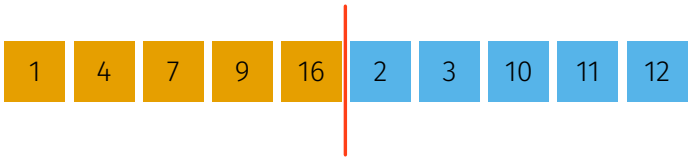
Sei $T(n)$ die Anzahl der Aufrufe der Funktion $f$. Wenn $n \geq 1$, es gilt:

$$T(n) = n + 2\,T(n/2)$$
$$= n + 2(n/2) + 2^2\,T(n/2^2)$$
$$= n + 2(n/2) + \ldots + 2^k(n/2^k)$$
$$+ 2^{k+1}T(n/2^{k+1})$$
$$= n\,(k+1) + 2^{k+1}\,T(n/2^{k+1}).$$

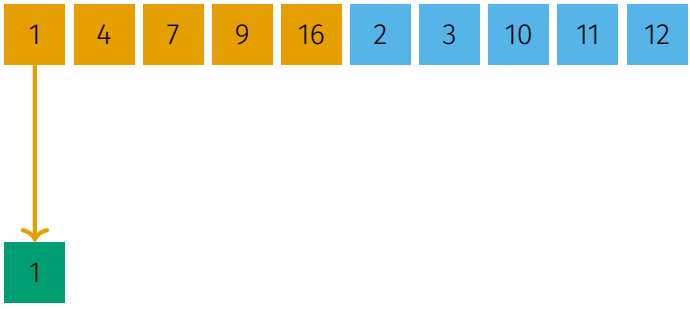
- $f$ ist aufgerufen, solange $n/2^k \geq 1$ ist.
- Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $\log n \geq k$.
- Das bedeutet, dass $k = \log n$. Darum ist $T(n) = n\,(\log n + 1) + 2n\,T(1/2) = n\,(\log n + 1) + 2n\,T(0) = n\,(\log n + 1)$.
- Darum ist die Anzahl Aufrufe der Funktion $f$ zwischen $\Theta(n \log n)$.

# 3. Divide & Conquer Sortieralgorithmen

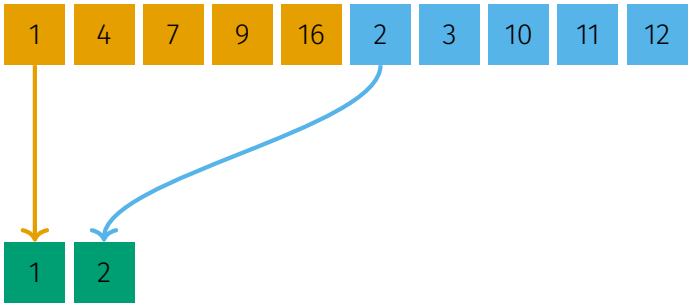
# Merge



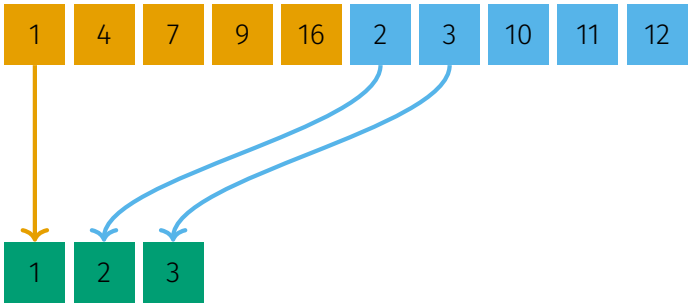
# Merge



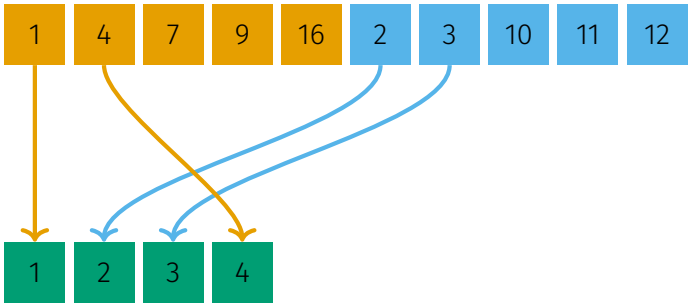
# Merge



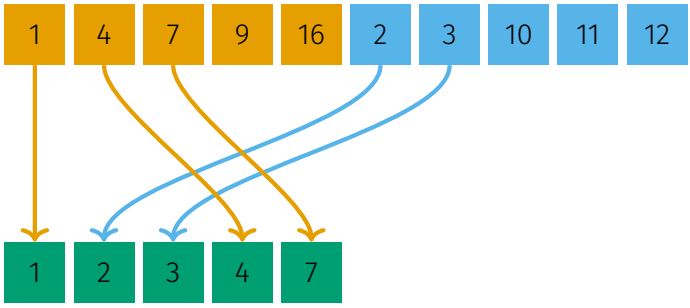
# Merge



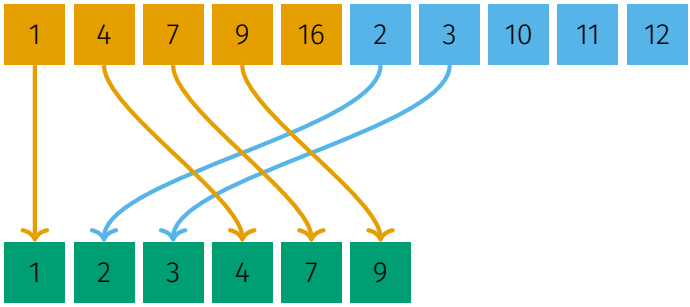
# Merge



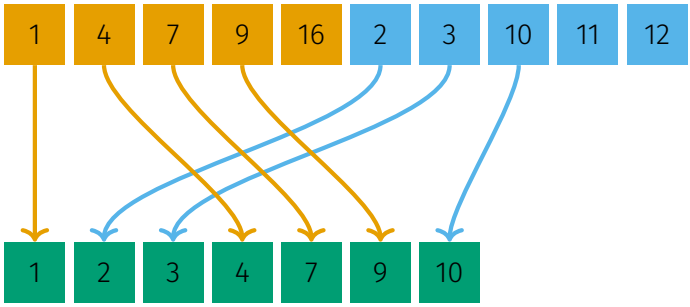
# Merge



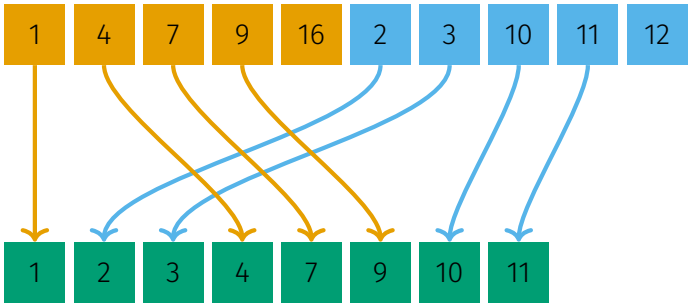
# Merge



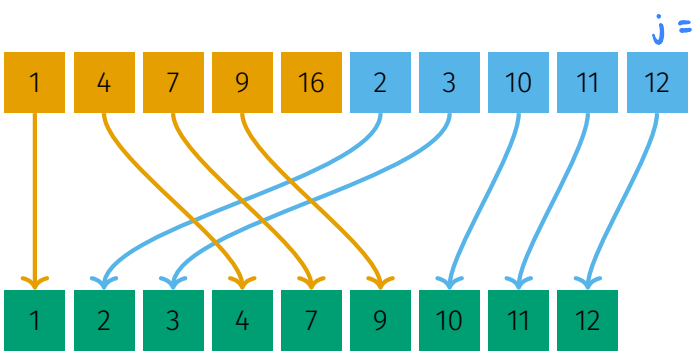
# Merge



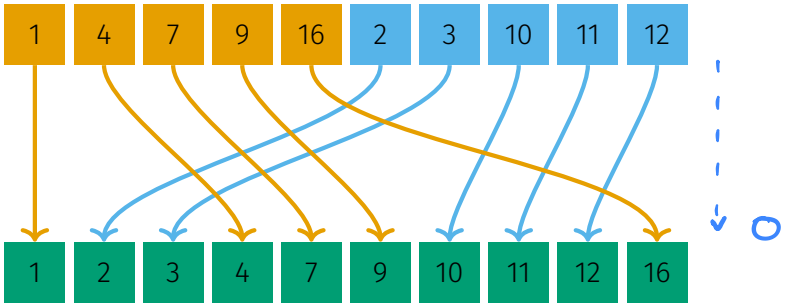
# Merge



# Merge



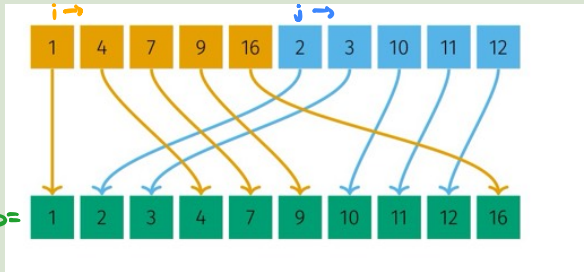
# Merge



# Algorithmus merge

```
1  def merge(a1, a2):
2    b, i, j = [], 0, 0
3    while i < len(a1) and j < len(a2):
4      if a1[i] < a2[j]:
5        b.append(a1[i])
6        i += 1
7      else:
8        b.append(a2[j])
9        j += 1
10   b += a1[i:]
11   b += a2[j:]
12   return b
```

rest



# Algorithmus `merge_sort`

```
1  def merge_sort(a):
2    if len(a) <= 1:
3      return a
4    else:
5      sorted_a1 = merge_sort(a[:len(a) // 2])
6      sorted_a2 = merge_sort(a[len(a) // 2:])
7      return merge(sorted_a1, sorted_a2)
```

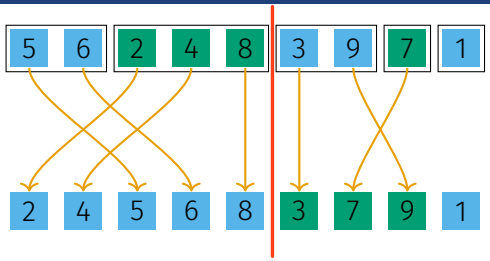
→ hackerearth.com

# Natürlicher 2-Wege Mergesort

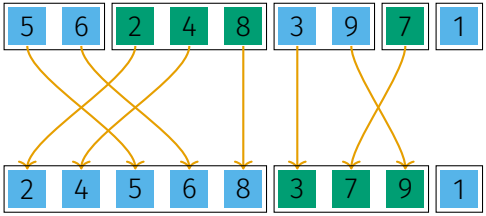
Suche: sortierte Teilfolgen

# Natürlicher 2-Wege Mergesort

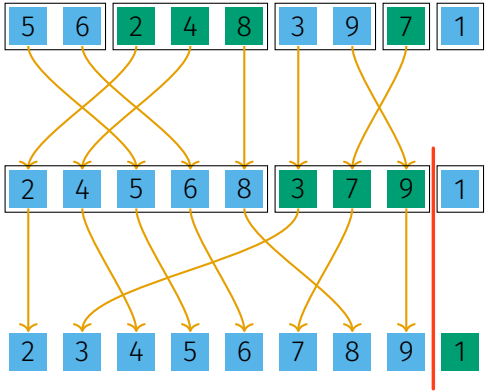
# Natürlicher 2-Wege Mergesort



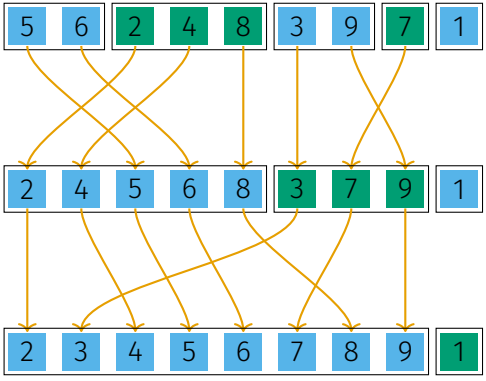
# Natürlicher 2-Wege Mergesort



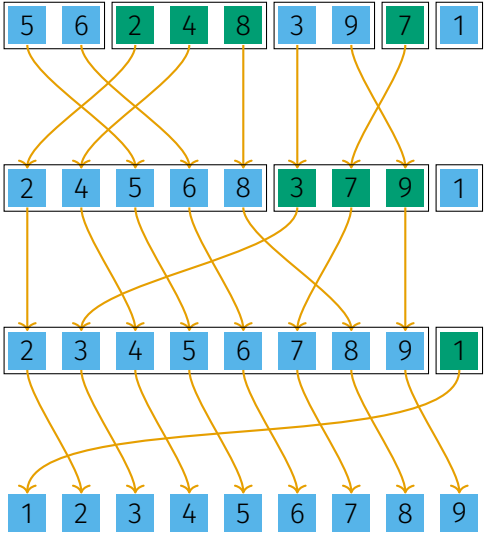
# Natürlicher 2-Wege Mergesort



# Natürlicher 2-Wege Mergesort



# Natürlicher 2-Wege Mergesort



# Algorithmus `NaturalMergesort`($A$)

**Input**: Array $A$ der Länge $n > 0$, **Output**: Array $A$ sortiert

```
1  def NaturalMergesort(A):
2      l = -1
3      while l != 0:
4          r = 0
5          while r < len(A)-1:
6              l = r
7              m = l
8              while m < len(A)-1 and A[m+1] >= A[m]:
9                  m = m+1
10             if m < len(A)-1:
11                 r = m+1
12                 while r < len(A)-1 and A[r+1] >= A[r]:
13                     r = r+1
14                 Merge(A,l,m,r)
15             else:
16                 r = len(A)-1
17             r+=1
```

# 4. Gruppenübung

# Gruppenübung: Timsort

https://expert.ethz.ch/enrolled/SS25/mavt2/codeExamples

Timsort, eine Kombination aus Insertion Sort und Merge Sort, ist der Standard-Sortieralgorithmus in Python. Mehr dazu in der Aufgabenbeschreibung auf Code Expert.

→ extra 30 xp ?!

# 5. Hausaufgaben

# Übung 6: Search and Sort

Auf `https://expert.ethz.ch/enrolled/SS25/mavt2/exercises`

Übung 6: Search and Sort

- Eierwerfen
- Vergleich von Sortieralgorithmen
- Verbesserter Insertion Sort → check ZF: Binary search?
- Invarianten der Suchalgorithmen

Abgabedatum: Montag 07.04.2025, 20:00 CET

**KEINE HARDCODIERUNG**

# Fragen oder Anregungen?