

Grundlagen der Thermodynamik

Marlin Strub - strubma@student.ethz.ch

Systembezeichnungen

Bezeichnung	Eigenschaft
abgeschlossen	$\dot{W} = \dot{Q} = \dot{m} = 0$ Keine Wechselwirkung über die Systemgrenze
adiabat	$\dot{Q} = 0$ Keine thermische Energie über die Systemgrenze
diatherm	$\dot{Q} \neq 0$ Es fliesst thermische Energie über die Systemgrenze
geschlossen	$\dot{m} = 0$ Kein Massenstrom über die Systemgrenze
halb offen	Entweder ein- oder ausfliessender Massenstrom
heterogen	Physikalische Eigenschaften und chemische Zusammensetzung nicht überall gleich
homogen	Physikalische Eigenschaften und chemische Zusammensetzung überall gleich
isoliert	$\dot{Q} = 0$ Keine thermische Energie über die Systemgrenze
offen	$\dot{m} = 0$ Es fliesst ein Massenstrom über die Systemgrenze
stationär	$\frac{dm}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dE_x}{dt} = \frac{dS}{dt} = 0 \rightarrow \dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}$ Indifferent bzgl. des Zeitpunktes der Betrachtung

Zustandsgrössen

intensive (von Systemgrösse unabhängig)	extensive (von Systemgrösse abhängig)
Dichte	Energie
Druck	Enthalpie
Temperatur	Entropie
chemisches Potential	Exergie
	Masse
	Stoffmenge
	Volumen

Prozessgrössen

Arbeit	
$W > 0$	$W < 0$
Vom System geleistete Arbeit (abgeführte Arbeit)	Am System geleistete Arbeit (zugeführte Arbeit)
Wärme	
$Q > 0$	$Q < 0$
Dem System zugeführte Wärme	Vom System abgegebene Wärme

Umrechnung wichtiger Einheiten

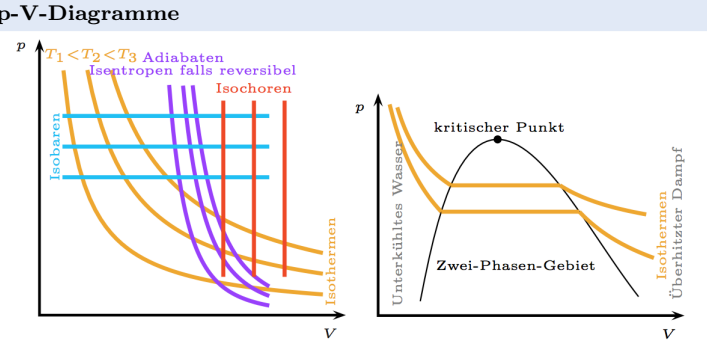
Druck	
1 bar = 10 ⁵ Pa = 100 000 Pa = 760 mmHg	
10 bar = 1 MPa = 1 000 000 Pa	
1 N/mm ² = 1 MPa = 1 000 000 Pa	
1 atm = 1.01325 bar = 101 325 Pa	

Volumen		
1 m ³ = 1 000 L		
1 m ³ = 1 000 000 cm ³		
1 L = 0.001 m ³ = 1 000 cm ³		
Temperatur		
$[T]_{\circ C} = [T]_K + 273.15$		
$[T]_F = 1.8 \cdot [T]_{\circ C} + 32$		
$[T]_R = 1.8 \cdot [T]_{\circ C}$		
Nullter Hauptsatz		
Wenn sich zwei Systeme mit einem dritten im thermischen Gleichgewicht befinden, sind sie auch untereinander im thermischen Gleichgewicht.		
Einheiten wichtiger Grössen		
Grösse	Symbol	Einheiten
Arbeit	W	$\underline{J} = \text{N m} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-2}$
Druck	p	$\underline{\text{Pa}} = \text{N m}^{-2}$
Energie	E	$\underline{J} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-2}$
Enthalpie	H	$\underline{J}$
Exergie	E_x	$\underline{J}$
innere Energie	U	$\underline{J}$
kinetische Energie	KE	$\underline{J}$
potentielle Energie	PE	$\underline{J}$
molare Enthalpie	$\bar{h}$	$\underline{\text{J mol}^{-1}} (= \text{kJ kmol}^{-1})$
molare in. Energie	$\bar{u}$	$\underline{\text{J mol}^{-1}} (= \text{kJ kmol}^{-1})$
spez. Enthalpie	h	$\underline{\text{J kg}^{-1}}$
spez. in. Energie	u	$\underline{\text{J kg}^{-1}}$
Entropie	S	$\underline{\text{J K}^{-1}}$
molare Entropie	$\bar{s}$	$\underline{\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}} (= \frac{\text{kJ}}{\text{kmol K}})$
spez. Entropie	s	$\underline{\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}}$
Geschwindigkeit	w	$\underline{\text{m s}^{-1}}$
Kraft	F	$\underline{\text{N}} = \text{m kg s}^{-2}$
Leistung	P	$\underline{\text{W}} = \text{J s}^{-1} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-3}$
Masse	m	$\underline{\text{kg}}$
Molmasse	M	$\text{kg kmol}^{-1} = \text{g mol}^{-1}$
Molzahl	n	kmol
spez. Gaskonstante	R	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Teilchenzahl	N	=
Temperatur	T	$\underline{\text{K}} (273.15 \text{ K} = 0^{\circ}\text{C})$
Volumen	V	$\underline{\text{m}^3} (1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l})$
Molvolumen	$\bar{v}$	$\text{m}^3 \text{ kmol}^{-1}$
spez. Volumen	v	$\text{m}^3 \text{ kg}^{-1}$
Wärme	Q	$\underline{J}$
Wärmeübergangskoeffizient	α	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1} = \text{kg s}^{-3} \text{K}^{-1}$
Wärmeleitfähigkeit	λ	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1} = \text{kg m s}^{-3} \text{K}^{-1}$

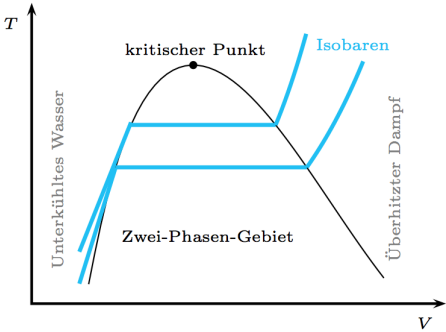
Konstanten

Namen	Symbol	Wert
Avogadrozahl	N_A	$6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Elementarladung	e	$1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Normdruck	p_0	$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$
Normtemperatur	T_0	$298 \text{ K} \approx 25^{\circ}\text{C}$
Tripelpunkt Wasser	T_p	$273.16 \text{ K} = 0.01^{\circ}\text{C}$
Universelle Gaskonstante	$\bar{R}$	$8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$

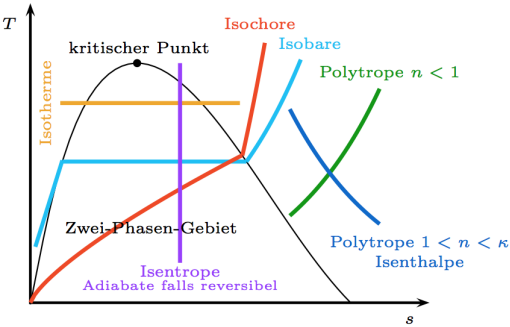
Diagramm-Skizzen



T-V-Diagramm mit Nassdampf-Gebiet



T-s-Diagramm mit Nassdampf-Gebiet



Grundlegende Grössen und Erster Hauptsatz

Massenströme und Massenbilanz

Die Änderung der Masse ist die Summe aller einströmenden Massenströme minus der Summe aller ausströmenden Massenströme und heisst Massenbilanz:

dm/dt = m-dot = sum(m-dot_in) - sum(m-dot_out)

m-dot = V-dot/v = rho * V-dot = (A * w) / (v * 1-dim.)

Für stationäre Prozesse gilt: dm/dt = 0

Wärme

Wärme ist über eine Systemgrenze transportierte thermische Energie.

Q = m * c * Delta T

Wärmeübertragungsleistung Q-dot

Die übertragene Wärmemenge pro Zeiteinheit nennt man Wärmeübertragungsleistung. Sie hat das Symbol Q-dot und als Dimension J/s. Somit gilt für die gesamte übertragene Wärme von Zustand 1 zu 2:

Q_12 = integral from t_1 to t_2 of Q-dot dt

Wärmefluss

Der Wärmefluss ist die Wärmeübertragungsleistung pro Flächeneinheit. Er hat das Symbol q-double-dot und als Dimension J/(s * m^2). Für die gesamte übertragene Leistung Q-dot gilt:

Q-dot = integral over A of q-double-dot dA => Q_12 = integral from t_1 to t_2 of dt integral over A of q-double-dot dA

Arbeit

Ein System leistet Arbeit an seiner Umgebung, wenn der alleinige Effekt der Wechselwirkung auf alles ausserhalb des Systems die Hebung eines Gewichtes sein könnte.

W = integral from V_1 to V_2 of p dV = integral from 1 to 2 of F-vector dot s-vector

Ein- und Ausschiebearbeit

Um Massenströme in ein System oder aus einem System zu führen, muss gegen den jeweiligen Druck Arbeit verrichtet werden.

Einschiebearbeit	Ausschiebearbeit
W_e = p_e * Delta V = p_e * A_e * Delta s	W_a = p_a * Delta V = p_a * A_a * Delta s
Einschiebeleistung	Ausschiebeleistung
W-dot_e = p_e * A_e * w_e	W-dot_a = p_a * A_a * w_a

Nutzbare Arbeit

Die Arbeit, welche nicht mit den Massenströmen zusammenhängt, nennt man nutzbare Arbeit. Ihr Symbol ist W_S (S für Shaft).

Enthalpie

Die thermische Enthalpie ist die Summe der inneren Energie und der Arbeit, die nötig ist, um das Volumen V des Systems gegen die Wirkung des konstanten Aussendruckes aufzuspannen.

H = U + p dV

Die Bildungsenthalpie h_f^0 ist die molspezifische Enthalpie [kJ/kmol], welche aufgewendet werden muss (+) bzw. gewonnen wird (-), wenn ein Molekül bei Standardbedingungen T_ref, p_ref aus den chemischen Elementen gebildet wird (TAB-A30). (Sie kann anhand der Bindungsenergien der einzelnen Elementarreaktionen abgeschätzt werden, dies liefert aber teils sehr ungenaue Resultate.) Die totale spezifische Enthalpie ist somit:

h(T, p) = h_f^0(T_ref, p_ref) + [h(T, p) - h(T_ref, p_ref)]

chem. Anteil thermischer Anteil

Reaktionsenthalpie

Die Reaktionsenthalpie Delta H_R gibt die Änderung der Enthalpie im Verlauf einer Reaktion bei konstantem Druck an. Es spielt dabei keine Rolle, auf welchem Weg die Reaktion stattfindet oder in welcher Form (Wärme, Arbeit) Energie während der Reaktion aufgenommen oder abgegeben wird. Die Reaktionsenthalpie ist immer die Differenz der Bindungsenthalpien der Produkte und der Edukte:

Delta H_R = sum_P n_P * [h_f^0 + Delta h_P(T_P)] - sum_E n_E * [h_f^0 + Delta h_E(T_E)]

Wobei Delta h(T) = h(T) - h(T_ref).

- Delta H_R < 0 : **exotherme Reaktion**
Produkte sind energetisch tiefer: Energie wird frei
- Delta H_R > 0 : **endotherme Reaktion**
Produkte sind energetisch höher: Energie wird aufgenommen

Freie Enthalpie

Die Änderung der freien Enthalpie Delta G ist das entscheidende Kriterium dafür, ob, unter welchen Bedingungen und in welchem Umfang eine Reaktion tatsächlich abläuft.

- Delta G < 0: exergone Reaktion (läuft freiwillig ab)
- Delta G = 0: Gleichgewicht (keine Reaktion)
- Delta G > 0: endergone Reaktion (braucht Energiezufuhr)

Die freie Enthalpie ist definiert als

G = H - T * S = sum_i G_{0,i} + RT ln (p_i / p_0)

Chemisches Potential

Das chemische Potential mu ist eine intensive Zustandsgrösse, welche die Möglichkeit eines Stoffes charakterisiert,

- mit anderen Stoffen zu reagieren (chemische Reaktion);

- in eine andere Zustandsform überzugehen (Phasenübergang);
- sich im Raum umzuverteilen (Diffusion).

Eine Reaktion, Umwandlung oder Umverteilung kann nur dann freiwillig stattfinden, wenn das chemische Potential im Endzustand kleiner ist als im Anfangszustand. Das chemische Potential ist definiert als:

mu_i := partial G / partial n_i |_{T, p, n_j} = partial U / partial n_i |_{S, V, n_j} = partial H / partial n_i |_{S, p, n_j}

Das chemische Potential entspricht dementsprechend dem Beitrag einer inkrementellen Änderung der Anzahl Mole der i-ten Komponente allein (alle anderen Komponenten behalten ihre Anzahl Mole unverändert) zur Veränderung der Freien Enthalpie bei T, p = const. bzw. der inneren Energie bei S, V = const. oder der Enthalpie bei S, p = const.

Partialdruck

Der Ausdruck des partiellen Druckes macht nur für Gemische einen Sinn; er entspricht dem Druck, den die einzelne Gaskomponente bei alleinigem Vorhandensein im betreffenden Volumen ausüben würde. Die Summe aller Partialdrücke ergibt den Gesamtdruck und für den Partialdruck der Komponente i gilt:

p_i = p_tot * n_i / n_tot = p_0 * X_i

Erster Hauptsatz

Energiebilanz

Für geschlossene Systeme (m-dot = 0) ohne chemische Reaktionen gilt:

Delta E = Q - W mit Delta E = Delta KE + Delta PE + Delta U

Falls die kinetische und die potentielle Energie vernachlässigbar sind:

Delta U = Q - W

Leistungsbilanz

Bei offenen Systemen ohne chemische Reaktionen gilt die Leistungsbilanz:

dE/dt = Q-dot - W-dot_S + sum_{i=1}^n m-dot_in (h_in + w_in^2/2 + g * z_in) - sum_{j=1}^m m-dot_out (h_out + w_out^2/2 + g * z_out)

Falls die kinetische und die potentielle Energie vernachlässigbar sind:

dE/dt = Q-dot - W-dot + sum_{i=1}^n m-dot_in * h_in - sum_{j=1}^m m-dot_out * h_out

Energiebilanz mit chemischer Reaktion

Für ein geschlossenes System aus mehreren Komponenten, welche miteinander chemisch reagieren können, gilt:

dU = T dS - p dV + sum_i mu_i dn_i

Leistungsbilanz mit chemischer Reaktion

Für ein offenes System aus mehreren Komponenten, welche miteinander chemisch reagieren können, gilt:

dH = T dS + V dp + sum_i mu_i dn_i

Ideale Gase

Perfekte Gase

Einatomige Gase bilden einen Spezialfall des idealen Gases: In ihrem Fall liegt die thermischen Energie ausschliesslich in Form der kinetischen Energie der Translationsbewegung vor, Rotation und molekulare Schwingungen können bei einatomigen Molekülen keine Rolle spielen.

Ideale Gase

Beim Modell der Idealen Gase bewegen sich alle Moleküle ohne gegenseitige Kraftwirkungen und alle Stösse sind elastisch.

$$p \cdot V = n \cdot \bar{R} \cdot T$$
$$p \cdot v = R \cdot T$$
$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T$$

$$R = c_p - c_v = \frac{\bar{R}}{M} \left[\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1} \right]$$
$$v = \rho^{-1}$$

Innere Energie und Enthalpie idealer Gase

Für Ideale Gase hängen die innere Energie und die Enthalpie nur von der Temperatur ab (Achtung: Gilt nicht für die freie Enthalpie!). Somit hängen auch c_v und c_p nur von der Temperatur ab und können folglich auch für nicht isochore/isobare Prozesse verwendet werden. Wird zusätzlich die Temperatur als konstant angenommen gilt:

$$\Delta u = c_v \cdot (T_2 - T_1)$$

$$h = u + R \cdot T$$

Falls die kinetische und potentielle Energie vernachlässigbar sind:

$$\Delta h = c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Totale spezifische Enthalpie

Die totale spezifische Enthalpie setzt sich wie folgt zusammen:

$$\bar{h}(T) = \underbrace{\bar{h}_f^0(T_{\text{ref}})}_{\text{chem. Ant.}} + \underbrace{[\bar{h}(T) - \bar{h}(T_{\text{ref}})]}_{\text{thermischer Anteil}}$$

Für bekannte temperaturabhängige c_p gilt:

$$\bar{h}(T) = \bar{h}_f^0 + \int_{T_{\text{ref}}}^T c_p(T) \text{d}T$$

Reaktionsenthalpie

Die Reaktionsenthalpie beschreibt den Energieumsatz einer chemischen Reaktion. Bei Standardbedingungen gilt:

$$\Delta H_{\text{R}}(T_{\text{ref}}) = \sum_{\text{P}} n_{\text{P}} \bar{h}_{f,\text{P}}^0 - \sum_{\text{E}} n_{\text{E}} \bar{h}_{f,\text{E}}^0$$

Bei anderer Temperatur $T \neq T_{\text{ref}}$ gilt:

$$\Delta H_{\text{R}}(T) = \Delta H_{\text{R}}(T_{\text{ref}}) + \sum_{\text{P}} n_{\text{P}} [\bar{h}_{\text{P}}(T) - \bar{h}_{\text{P}}(T_{\text{ref}})]$$

$$- \sum_{\text{E}} n_{\text{E}} [\bar{h}_{\text{E}}(T) - \bar{h}_{\text{E}}(T_{\text{ref}})]$$

Entropieänderung

Bei idealen Gasen gilt für die Entropiedifferenz zwischen zwei Zuständen:

$$s_2 - s_1 = s^0(T_2) - s^0(T_1) - R \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

Falls c_v/c_p als konstant angenommen werden können gilt:

$$s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \cdot \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

Polytrope Zustandsänderung

Isobar $n = 0$

Konstanten

$$p = \text{const.} \rightarrow \frac{T}{V} = \text{const.} \Rightarrow \frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2}$$

Arbeit

$$W_{12} = p_1(V_2 - V_1) = p_1 m(v_2 - v_1)$$
$$W_{12} = mR(T_2 - T_1)$$

1. Hauptsatz

$$\Delta U_{12} = Q_{12} - W_{12}$$

Isotherm $n = 1$

Konstanten

$$T = \text{const.} \rightarrow p \cdot V = \text{const.} \Rightarrow p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

Arbeit

$$W_{12} = p_1 V_1 \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = mRT \cdot \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$
$$W_{12} = p_1 V_1 \cdot \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = mRT \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$$

1. Hauptsatz

$$\Delta U_{12} = 0 \implies Q_{12} = W_{12}$$

Isochor $n \rightarrow \infty$

Konstanten

$$V = \text{const.} \rightarrow \frac{T}{p} = \text{const.} \Rightarrow \frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2}$$

Arbeit

$$W_{12} = 0$$

1. Hauptsatz

$$\Delta U_{12} = \Delta Q_{12} = m(u_2 - u_1) = m \cdot c_v(T_2 - T_1)$$

Isentrop $n = \kappa = c_p/c_v$

Konstanten

$$S = \text{const.} \rightarrow p \cdot V^\kappa = \text{const.}$$
$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.} \rightarrow p^{1-\kappa} \cdot T^\kappa = \text{const.}$$
$$W_{12} = m \cdot (u_1 - u_2) = m \cdot c_v \cdot (T_1 - T_2)$$

Arbeit

$$W_{12} = \frac{m \cdot R}{\kappa - 1} (T_1 - T_2) = \frac{p_1 V_1^\kappa}{1 - \kappa} (V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa})$$
$$W_{12} = \frac{p_1 V_1}{1 - \kappa} \left(\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right)$$

1. Hauptsatz

$$Q_{12} = 0 \implies \Delta U_{12} = -W_{12}$$

Polytrop $n \in \mathbb{R}$

Konstanten

$$p \cdot V^n = \text{const.} \rightarrow T^n \cdot p^{1-n} = \text{const.}$$
$$T \cdot v^{n-1} = \text{const.}$$
$$W_{12} = \frac{R \cdot m}{1-n} (T_2 - T_1) = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-n}$$

Arbeit

$$W_{12} = \frac{p_1 V_1^n}{1-n} \left(V_2^{1-n} - V_1^{1-n} \right)$$

1. Hauptsatz

$$\Delta U_{12} = Q_{12} - W_{12}$$

Erster Hauptsatz mit chemischen Komponenten

Für geschlossene Systeme mit chemischen Komponenten gilt bei idealen Gasen:

$$\bar{u} = \bar{h} - \bar{R}T = \bar{h}_f^0 + [\bar{h}(T) - \bar{h}(T_{\text{ref}})] - \bar{R}T$$

Daraus folgt für den ersten Hauptsatz:

$$Q - W = \sum_{\text{P}} n(\bar{h}_f^0 + \bar{h}(T) - \bar{h}(T_{\text{ref}})) - \sum_{\text{E}} n(\bar{h}_f^0 + \bar{h}(T) - \bar{h}(T_{\text{ref}}))$$
$$- R \cdot T_{\text{P}} \sum_{\text{P}} n + R \cdot T_{\text{E}} \sum_{\text{E}} n$$

Spezifische Gaskonstanten

Aus $R = \bar{R}/M$ mit $\bar{R}$ als universelle Gaskonstante und den molaren Massen aus Tabelle A-1 ergeben sich folgende spezifische Gaskonstanten:

Substanz		M [g/mol]	R [J/(kg K)]
Acetylen	C ₂ H ₂	26.04	319.3
Ammoniak	NH ₃	17.04	487.9
Argon	Ar	39.94	208.2
Benzol	C ₆ H ₆	78.11	106.4
Butane	C ₄ H ₁₀	58.12	143.0
Ethan	C ₂ H ₆	30.07	276.5
Ethyl Alkohol	C ₂ H ₅ OH	46.07	180.5
Ethylen	C ₂ H ₄	28.05	296.4
Helium	He	4.003	2076
Kohlenstoff	C	12.01	692.3
Kohlenstoffdioxid	CO ₂	44.01	188.9
Kohlenstoffmonoxid	CO	28.01	296.8
Kupfer	Cu	63.54	130.8
Luft	–	28.97	287.0
Methan	CH ₄	16.04	518.3
Methyl Alkohol	CH ₃ OH	32.05	259.4
Octane	C ₈ H ₁₈	114.2	72.80
Propan	C ₃ H ₈	44.09	188.6
Propylen	C ₃ H ₆	42.08	197.6
Refrigerant 12	CCl ₂ F ₂	120.9	68.77
Refrigerant 22	CHClF ₂	86.48	96.14
Refrigerant 134a	CF ₃ CH ₂ F	120.0	69.28
Sauerstoff	O ₂	32.00	259.8
Schwefeldioxid	SO ₂	64.06	129.8
Stickstoff	N ₂	28.01	296.8
Wasser	H ₂ O	18.02	461.4
Wasserstoff	H ₂	2.018	4120

Reale Gase, Wärmekapazitäten, Standard-Elemente, Wirkungsgrade

Reale Gase

Die p - v - T -Beziehung für reale Gase ist:

$$Z(T,p/v) = \frac{p \cdot v}{R \cdot T}$$

Da Z sehr kompliziert ist, wird meist mit Tabellen gearbeitet.

Polytrope Zustandsänderung

Allgemein gilt bei polytroper Zustandsänderung:

$$\Delta U_{12} = m(u_2 - u_1) = m(c_{v2}T_2 - c_{v1}T_1)$$

$$W_{12} = \int_1^2 p dv = \begin{cases} p_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) & \text{für } n = 1 \\ \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-n} & \text{für } n \neq 1 \end{cases}$$

Für spezielle Prozesse gilt:

Isobar	$W_{12} = p_1(V_2 - V_1) = mp_1(v_2 - v_1)$
Isotherm	$Q_{12} = T(s_2 - s_1)$
Isobar	$W_{12} = 0 \implies \Delta U_{12} = Q_{12}$
Adiabat	$Q_{12} = 0 \implies W_{12} = \Delta U_{12}$

Gase im Zwei-Phasen-Gebiet

Spricht man vom Zwei-Phasen-Gebiet bei Gasen meint man meist den Übergang vom flüssigen in den gasförmigen Zustand. Der Dampfgehalt ist wie folgt definiert:

$$x = \frac{m_g}{m_f + m_g} = \frac{v - v_f}{v_g - v_f} = \frac{u - u_f}{u_g - u_f} = \frac{h - h_f}{h_g - h_f} = \frac{s - s_f}{s_g - s_f}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} v &= v_f + x \cdot (v_g - v_f) \\ u &= u_f + x \cdot (u_g - u_f) \\ h &= h_f + x \cdot (h_g - h_f) = h_f + x \cdot h_{gf} \\ s &= s_f + x \cdot (s_g - s_f) \end{aligned}$$

Für den Flüssigkeitsgehalt gilt:

$$x_l = \frac{v_g - v}{v_g - v_f} \qquad x_l = 1 - x$$

Spezifische Wärmekapazität

Die spezifische Wärmekapazitäten c_v, c_p beschreiben die Energie, die nötig ist, um 1 kg Masse um 1 K zu erwärmen.

Wärmekapazität inkompressibler Fluide

Für inkompressible Fluide gilt $c_v = c_p$ und somit $\kappa = 1$.

Isochore Wärmekapazität c_v

Es wird keine Arbeit durch Volumenänderung geleistet, somit ändert die zugeführte Wärme nur die innere Energie.

$$c_v = \left[\frac{\partial u}{\partial T} \right]_v \quad [\text{kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}]$$

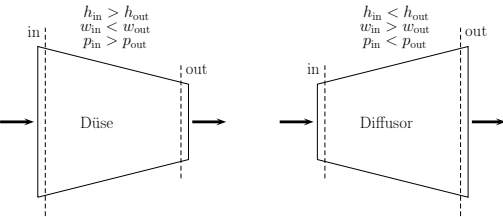
Isobare Wärmekapazität c_p

Es wird Arbeit durch Volumenänderung geleistet, somit ändert die zugeführte Wärme die Enthalpie.

$$c_p = \left[\frac{\partial h}{\partial T} \right]_p \quad [\text{kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}]$$

Standard-Elemente

Düsen und Diffusoren



Düsen und Diffusoren können keine Arbeit leisten. Sind sie isoliert, folgt aus dem 1. Hauptsatz:

$$h_{in} + \frac{w_{in}^2}{2} = h_{out} + \frac{w_{out}^2}{2} = \text{const.}$$

Drosselemente

In der Drossel wird ein Fluid entspannt. Beispiele sind Kompressionswärmepumpen und -kältemaschinen. Es gilt:

$$p_{out} < p_{in} \qquad h_{out} = h_{in} \qquad W = Q = 0$$

Wärmeübertrager

Bei Wärmeübertragern kann generell angenommen werden, dass keine Arbeit verrichtet wird $\dot{W} = 0$ und der Wärmeübertrager gut isoliert ist $\dot{Q} = 0$. Sind potentielle und kinetische Energie vernachlässigbar folgt aus dem ersten Hauptsatz:

$$\dot{m}_{in} \cdot h_{in} = \dot{m}_{out} \cdot h_{out}$$

Wirkungsgrade

Der thermische Wirkungsgrad

$$\eta_{th} = \frac{W_S}{Q_{in}}$$

Der isentrope Wirkungsgrad

Es gilt $s_{in} = s_{out}$, somit kann x_{out} bestimmt werden, worüber dann $h_{out,s}$ bestimmt werden kann. Für Verdichter und Pumpen gilt:

$$\eta_{V,s} = \frac{W_{isentrop}}{W_{real}} = \frac{h_{in} - h_{out,s}}{\underbrace{h_{in} - h_{out}}_{\text{falls adiabat}}}$$

Für Turbinen und Düsen gilt:

$$\eta_{T,s} = \frac{W_{real}}{W_{isentrop}} = \frac{h_{in} - h_{out}}{\underbrace{h_{in} - h_{out,s}}_{\text{falls adiabat}}}$$

Der exergetische Wirkungsgrad

$$\varepsilon = \frac{\text{genutzter Exergiestrom}}{\text{zugeführter Exergiestrom}}$$

Der innere Wirkungsgrad

$$\eta_i = \frac{W_{irr}}{W_{rev}} \qquad \text{wobei } W_{rev} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Der elektrochemische Wirkungsgrad

$$\eta_{Zelle} = \frac{\Delta G_R}{\Delta H_R} = 1 - T \frac{\Delta S_R}{\Delta H_R}$$

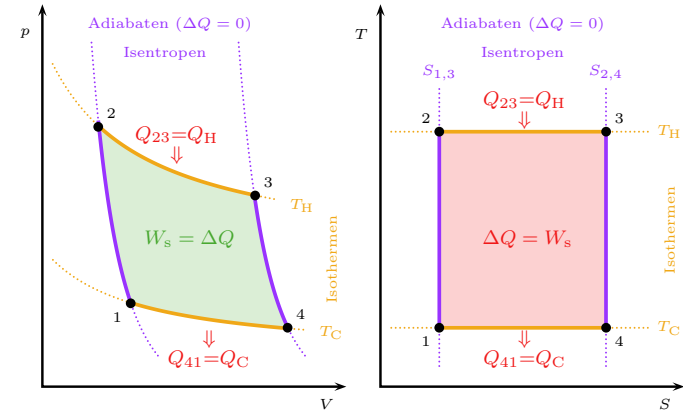
Der Carnot-Wirkungsgrad

$$\eta_C = \frac{W_{KP}}{Q_{in}} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

Der Carnot-Kreisprozess

Der Carnot-Kreisprozess ist ein Beispiel eines idealisierten reversiblen Kreisprozesses, der zwischen zwei Temperaturniveaus T_H und T_C arbeitet. Er dient zur Definition des theoretisch maximalen thermischen Wirkungsgrades η_{th} . Für Kreisprozesse gilt:

$$\Delta U_{KP} = \Delta H_{KP} = \Delta S_{KP} = 0$$



Der Carnot-Prozess besteht aus 4 reversiblen Teilprozessen:

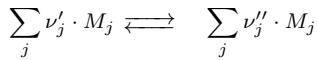
Prozess	Interpretation
1 → 2	Adiabatische Kompression: Arbeit wird am System verrichtet, die Temperatur steigt von T_C zu T_H . ($Q_{12} = \Delta S_{12} = 0$)
2 → 3	Isotherme Expansion: Das System leistet die Arbeit W_{23} , es muss Wärme Q_{23} hinzukommen.
3 → 4	Adiabatische Expansion: Das System leistet die Arbeit W_{34} , die Temperatur sinkt von T_H zu T_C . ($Q_{34} = \Delta S_{34} = 0$)
4 → 1	Isotherme Kompression: Die Arbeit W_{41} wird hineingesteckt, es wird Wärme Q_{41} abgegeben.

Aus $U_1 = U_2$ und $U_3 = U_4$ folgt $W_{23} = -W_{41}$

Verbrennungsprozesse

Chemische Reaktion

Die allgemeine Schreibweise chemischer Reaktionen ist:



Dabei sind ν_j' die stöchiometrischen Koeffizienten der Edukte und ν_j'' jene der Produkte. M_j stehen für die an der Reaktion beteiligten Moleküle.

Volumen(mol-)anteil

Der Volumen(mol-)anteil beschreibt die Anzahl Teilchen einer Komponente zur Gesamtteilchenzahl des betrachteten Gemischs:

$$X_i = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}} = \frac{p_i}{p_{\text{tot}}}$$

Massenanteil

Der Massenanteil beschreibt die relative Masse einer Komponente zur Gesamtmasse des betrachteten Gemischs:

$$Y_i = \frac{m_i}{m_{\text{tot}}} = X_i \cdot M_i \frac{\sum_j n_j}{\sum_j M_j}$$

Molare Konzentration

Die molare Konzentration beschreibt den Quotienten der Teilchen einer Komponente zum totalen Volumen des betrachteten Gemischs:

$$C_i = \frac{n_i}{V_{\text{tot}}}$$

Partialdruck

Der Partialdruck entspricht dem Druck, den eine Komponente bei alleinigem Vorhandensein im betreffenden Volumen ausüben würde.

$$p_i = p_{\text{tot}} \cdot \frac{n_i}{n_{\text{tot}}} = p_{\text{tot}} \cdot X_i$$

Luftverhältnis

Idealerweise läuft eine (Verbrennungs-) Reaktion im stöchiometrischen Verhältnis von Luft- zu Brennstoffmasse ab. Das Verhältnis von realer Luft- zu Brennstoffmasse zum stöchiometrischen Verhältnis nennt man Luftverhältnis λ .

$$\lambda = \frac{(m_L/m_B)_{\text{real}}}{(m_L/m_B)_{\text{stöch}}} = \frac{(\dot{m}_L/\dot{m}_B)_{\text{real}}}{(\dot{m}_L/\dot{m}_B)_{\text{stöch}}} = \frac{(n_L/n_B)_{\text{real}}}{(n_L/n_B)_{\text{stöch}}}$$

Es gelten folgende Bezeichnungen:

- $\lambda = 1$: stöchiometrisches Verbrennungsluftverhältnis
- $\lambda > 1$: mageres (armes) Gemisch
- $\lambda < 1$: fettes (reiches) Gemisch

Oxidation von Kohlenwasserstoffen

Bei der Oxidation von Kohlenwasserstoffen gilt:

$$\left(\frac{m_L}{m_B}\right)_{\text{stöch}} = \left(x + \frac{y}{4}\right) \frac{M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2}}{x \cdot M_C + y \cdot M_H}$$
$$\left(\frac{n_L}{n_B}\right)_{\text{stöch}} = 3.76 \left(x + \frac{y}{4}\right)$$

Dabei ist nach TAB-A1 $M_{O_2} = 32.00$ g/mol, $M_{N_2} = 28.01$ g/mol, $M_C = 12.01$ g/mol und $M_H = 1.01$ g/mol.

Verbrennung von Kohlewasserstoffen

Für die Verbrennung von Kohlewasserstoffen mit Luft gilt:

$$\lambda \geq 1 : C_xH_y + \lambda \left(x + \frac{y}{4}\right) (O_2 + 3.76N_2) \longrightarrow$$
$$x CO_2 + \frac{y}{2} H_2O + (\lambda - 1) \left(x + \frac{y}{4}\right) O_2 + \lambda \cdot 3.76 \left(x + \frac{y}{4}\right) N_2$$
$$\lambda < 1 : C_xH_y + \lambda \left(x + \frac{y}{4}\right) (O_2 + 3.76N_2) \longrightarrow$$
$$(1 - \lambda) C_xH_y + \lambda \cdot x CO_2 + \lambda \cdot \frac{y}{2} H_2O + \lambda \cdot 3.76 \left(x + \frac{y}{4}\right) N_2$$

Abgasrückführung

Bei der Rückführung von Produkten gilt:

$$\text{Edukte} + n \cdot \text{Produkte} \longrightarrow (1 + n) \cdot \text{Produkte}$$

Verbrennungsprodukte im Abgas

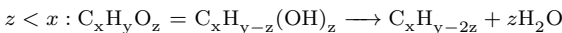
$$X_{O_2} = \frac{(\lambda - 1) \left(x + \frac{y}{4}\right)}{x + \frac{y}{2} + [\lambda \cdot 3.76 + (\lambda - 1)] \left(x + \frac{y}{4}\right)}$$
$$X_{CO_2} = \frac{x}{x + \frac{y}{2} + [\lambda \cdot 3.76 + (\lambda - 1)] \left(x + \frac{y}{4}\right)}$$

Verbrennung von Alkoholen

Für die Verbrennung von Alkoholen mit Luft gilt:

$$\lambda \geq 1 : C_xH_yO_z + \lambda \left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}\right) (O_2 + 3.76N_2) \longrightarrow$$
$$x CO_2 + \frac{y}{2} H_2O + (\lambda - 1) \left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}\right) O_2 + \lambda \cdot 3.76 \left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}\right) N_2$$
$$\lambda < 1 : C_xH_yO_z + \lambda \left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}\right) (O_2 + 3.76N_2) \longrightarrow$$
$$(1 - \lambda) C_xH_yO_z + \lambda \cdot x CO_2 + \lambda \cdot \frac{y}{2} H_2O + \lambda \cdot 3.76 \left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}\right) N_2$$

Ist $z < x$ kommt es zur Eliminierung der OH-Gruppen unter Wasserabspaltung:



Heizwert

Unter dem Heizwert versteht man die auf die Masse vom Brennstoff bezogene Reaktionswärme die bei vollständiger Verbrennung und $T = 298$ K entsteht. Man unterscheidet zwischen unterem ($H_u \rightarrow H_2O$ liegt am Ende als Dampf vor) und oberem ($H_o \rightarrow H_2O$ liegt am Ende in flüssiger Phase vor) Heizwert. Es gilt:

$$H_{u,o} = -H_R^0 = -\bar{h}_R^0/M_{\text{fuel}}$$

Wobei $\bar{h}_R^0$ die Reaktionsenthalpie bei $T_{\text{ref}}, p_{\text{ref}}$ ist.

Heizleistung

Die Heizleistung lässt sich wie folgt berechnen:

$$P = \Delta h_R \cdot \dot{m}_{\text{fuel}}$$

Wobei die Δh_R Reaktionsenthalpie ist.

Adiabate Flammtemperatur

Die adiabate Flammtemperatur ist jene Temperatur, welche sich nach vollständigem Verbrennen eines Brennstoffes ergibt, wenn das Gasgemisch keinerlei Wärme abgibt. Aus dem ersten Hauptsatz folgt (mit $\dot{W} = \dot{Q} = 0$):

$$0 = \Delta \dot{H}_R = \sum_P \dot{n}_P \cdot \left[\bar{h}_{f,P}^0 + \Delta \bar{h}_P(T_{f,\text{ad}})\right] - \sum_E \dot{n}_E \cdot \left[\bar{h}_{f,E}^0 + \Delta \bar{h}_E(T_E)\right]$$

Wobei $\Delta \bar{h}(T) = \bar{h}(T) - \bar{h}(T_{\text{ref}})$. Die Enthalpie bei adiabater Flammtemperatur muss im Allgemeinen durch Iteration gefunden werden.

Erster Hauptsatz bei $T_E = T_{\text{ref}}$

Für $T_E = T_{\text{ref}}$ wird $\Delta \bar{h}_E(T_E) = 0$ und somit gilt mit $\dot{Q} = \dot{W} = 0$:

$$\sum_P \dot{n}_P \Delta \bar{h}_P(T_P) = \sum_E \dot{n}_E \bar{h}_{f,E}^0 - \sum_P \dot{n}_P \bar{h}_{f,P}^0$$
$$\sum_P \dot{n}_P \bar{h}_P(T_P) = \sum_E \dot{n}_E \bar{h}_{f,E}^0 - \sum_P \dot{n}_P \bar{h}_{f,P}^0 + \sum_P \dot{n}_P \bar{h}_P(T_{\text{ref}})$$

Molspezifische Enthalpie häufiger Substanzen

Molekül	$\bar{h}(T_{\text{ref}})$ [kJ/kmol]	Molekül	$\bar{h}(T_{\text{ref}})$ [kJ/kmol]
N ₂	8 669 TAB-A23	CO	8 669 TAB-A26
O ₂	8 682 TAB-A24	CO ₂	9 364 TAB-A27
H ₂ O	9 904 TAB-A25	H ₂	8 468 TAB-A28

Faustregeln für die adiabate Flammtemperatur

Je mehr Intergase (N₂,C, ...) und je grösser deren c_p , desto tiefer ist $T_{f,\text{ad}}$. Zusätzlich gilt als erste Schätzung:

$$T_{f,\text{ad}} \approx 2000 \text{ K} + T_E$$
$$T_{f,\text{ad},\lambda=2} \approx T_{f,\text{ad},\lambda=1} - 800 \text{ K}$$
$$T_{f,\text{ad},O_2} \approx T_{f,\text{ad},\text{air}} + 800$$
$$T_{f,\text{ad},\lambda=0.5} \approx T_{f,\text{ad},\lambda=1} - 300 \text{ K}$$

Adiabate Flammtemperatur mit Dissoziation

(Kopiert aus L. Mosimanns Zusammenfassung) Vorgehen:

1. Berechnen von $T_{f,\text{ad}}$ ohne Dissoziation
2. Gleichgewichtsproblem lösen bei $K_P(T_{f,\text{ad}})$ um Dissoziations-Anteile zu bestimmen
3. $T_{f,\text{ad}}$ mit Reaktion mit Dissoziation berechnen
4. Falls $|T_{f,\text{ad},k} - T_{f,\text{ad},k-1}| > \text{Toleranz} \rightarrow$ zurück zu Schritt 2

Zweiter Hauptsatz, Entropie, Le Châtelier, Exergie

Zweiter Hauptsatz

Formulierung nach Clausius

Wärme kann nicht spontan von einem tieferen Temperaturniveau auf ein höheres gelangen.

Formulierung nach Kelvin-Planck

Es ist unmöglich eine Maschine zu bauen, welche in einem thermischen Kreisprozess kontinuierlich Arbeit an die Umgebung abgibt und dabei nur im Kontakt mit einem einzigen Wärmereservoir steht, aus welchem es diese Wärme bezieht.

Die Entropie

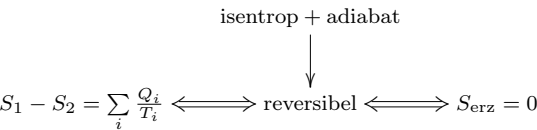
Die Entropie ist ein Mass für die Irreversibilität eines Prozesses. Die Entropieänderung ist eine Zustandsfunktion, also ein thermodynamisches Potential und somit unabhängig vom Weg (Prozess). Sie ist keine Erhaltungsgrösse.

ΔS = (einem Reservoir zugeführte Wärmemenge) / (Temperatur dieses Reservoirs) = ΔQ / T = S2 - S1

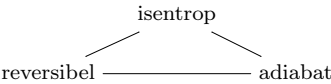
Ein Prozess wird spontan immer in der Richtung ablaufen, dass die Entropie zunimmt.

Reversibilität

Es gelten folgende Beziehungen:



Ein Prozess ist nur dann reversibel, wenn all seine Teilprozesse reversibel sind. Sind zwei Bedingungen erfüllt, so gilt auch das Dritte:



Clausius Ungleichung

ointegral (delta Q / T) <= 0, für reversible Prozesse: QH / TH <= QC / TC

Dabei ist der Entropiezuwachs nur dann gleich null, wenn es sich um einen reversiblen Kreisprozess handelt. Der Betrieb einer Maschine ist also mit Entropiezuwachs verbunden.

TdS-Gleichungen

Die TdS-Gleichungen folgen direkt aus dem 1. Hauptsatz und der Definition der Entropie:

T dS = dU + p dV
T dS = dH - V dp

Sie enthalten nur Zustandsgrössen, sind also beliebig integrierbar und gelten sowohl für reversible als auch für irreversible Prozesse.

TdS-Gleichungen mit chemischen Komponenten

Werden zusätzlich chemische Reaktionen betrachtet gilt:

dU = T dS - p dV + sum(mi di ni)
dH = T dS + V dp + sum(mi di ni)
Mit der Definition der freien Enthalpie (G = H - T · S) gilt:
dG = -S dT + V dp + sum(mi di ni)

Entropiebilanz geschlossener Systeme

Für Systeme ohne Massenfluss m-dot = 0 gilt:

Serz = S2 - S1 - sum(Qi / Ti) <=> Serz / n_fuel = sum(n_P s_P - n_E s_E) - (1 / n_fuel) sum(Qi / Ti)

Folglich gilt für folgende Spezialfälle:

Table with 2 columns: Prozess, erzeugte Entropie. Rows: Kreisprozess, adiabat, isentrop, reversibel.

Entropiebilanz offener Systeme

S-dot_erg = dS/dt - sum(Q-dot_i / T_i) + sum(m-dot_out s_out) - sum(m-dot_in s_in)

Für stationäre Prozesse gilt d(m-dot)/dt = d(S-dot)/dt = 0 und somit:

S-dot_erg = -sum(Q-dot_i / T_i) + m-dot(s_out - s_in)

Werden zusätzlich chemische Reaktionen berücksichtigt gilt für stationäre, offene Systeme:

S-dot_erg / n_fuel = sum(ni,out [s^o(T) - R ln(Xi pi / p_ref)]) - sum(ni,in [s^o(T) - R ln(Xi pi / p_ref)]) - (1 / n_fuel) sum(Q-dot_i / Ti)

Entropieänderung idealer Gase

Für ideale Gase gilt für die Entropiedifferenz zwischen zwei Zuständen:

s2 - s1 = s^o(T2) - s^o(T1) - R · ln(p2 / p1)

Falls cv/cp als konstant angenommen werden können gilt:

s2 - s1 = cv · ln(T2 / T1) + R · ln(v2 / v1)
s2 - s1 = cp · ln(T2 / T1) - R · ln(p2 / p1)

Entropieänderung inkompressibler Stoffe

Für Festkörper und Flüssigkeiten gilt v ≈ const. Auch Prozesse mit gasförmigen Stoffen können als inkompressibel betrachtet werden, falls sie isochor sind. Dann gilt:

s2 - s1 = c · ln(T2 / T1)

Prinzip von Le Châtelier

Übt man auf ein chemisches System im Gleichgewicht einen Zwang aus, so reagiert es so, dass die Wirkung des Zwangs minimal wird.

Table with 4 columns: Zwang, Temperatur, Druck, Konzentration, and 2 columns for reaction direction (up/down arrows).

Exergie

Die Exergie ist ein Mass für denjenigen Teil der im System enthaltenen Energie, der maximal (mittels reversiblen Prozessen) in nutzbare Arbeit umgewandelt werden kann. Die Exergie muss somit in Bezug zu einer Umgebung definiert werden.

Ex = U - U0 + p0(V - V0) - T0(S - S0) + KE + PE

Exergieänderung

Die Exergie ist eine Zustandsgrösse:

Ex2 - Ex1 = (U2 - U1) + p0(V2 - V1) - T0(S2 - S1) + (KE2 - KE1) + (PE2 - PE1)

Guoy-Stodola-Theorem

Für geschlossene und offene Systeme gilt:

Verlustarbeit: Ex,verl = Wverl = Wrev - W = T0 · Serz
Verlustleistung: Ex-dot,verl = W-dotverl = W-dotrev - W-dot = T0 · S-dot_erg

Exergiebilanz geschlossener Systeme

Kinetische und potentielle Energie sind pure Exergie, jedoch meist vernachlässigbar. Falls nicht, werden sie auf der rechten Seite hinzuaddiert.

Ex2 - Ex1 = integral_1^2 (1 - T0 / T) delta Q - [W - p0(V2 - V1)] - T0 Serz
dEx / dt = E-dot = sum(Qi-dot (1 - T0 / Ti)) - [W-dot - p0 dV / dt] - T0 S-dot_erg

Dabei ist T0 die Umgebungstemperatur und Ti die Grenztemperatur beim jeweiligen Wärmefluss.

Exergie, Brennstoffzellen

Exergiebilanz geschlossener, stationärer Prozesse

Bei stationären Prozessen gilt $\dot{E}_x = 0$, also

$$0 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{T_0}{T_i}\right) \dot{Q}_i - \left[\dot{W} - p_0 \frac{dV}{dt}\right] - T_0 \dot{S}_{\text{erz}}$$

Exergiebilanz geschlossener, reversibler Prozesse

Bei reversiblen Prozessen gilt $\dot{S}_{\text{erz}} = 0$, also

$$\dot{E}_x = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{T_0}{T_i}\right) \dot{Q}_i - \left[\dot{W} - p_0 \frac{dV}{dt}\right]$$

Exergiebilanz offener Systeme

Für offene Systeme gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dE_x}{dt} &= \sum_{i=1}^l \dot{m}_{i,\text{in}} e_{x,i,\text{in}} - \sum_{i=1}^k \dot{m}_{i,\text{out}} e_{x,i,\text{out}} \\ &\quad - \dot{W}_{\text{nutz}} + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{T_0}{T_i}\right) \dot{Q}_i - \underbrace{T_0 \dot{S}_{\text{erz}}}_{= 0 \text{ falls reversibel}} \end{aligned}$$

Dabei ist T_0 die Umgebungstemperatur und T_i die Temperatur beim jeweiligen Wärmefluss Q_i . Für die spezifischen Strömungsexergien e_x gilt:

$$e_{x,\text{in/out}} = (h - h_0) - T_0(s - s_0) + \frac{w^2}{2} + g \cdot z$$

Exergetischer Wirkungsgrad

Der exergetische Wirkungsgrad ist wie folgt definiert:

$$\varepsilon = \frac{\text{genutzter Exergiestrom}}{\text{zugeführter Exergiestrom}}$$

Chemische Exergie

Eine chemische Verbindung, die sich mit der Umgebung im thermischen und mechanischen Gleichgewicht befindet ist erst dann exergielos, wenn sie auch das chemische Gleichgewicht erreicht hat (TAB-A31).

Exergiebilanz einer Reaktion

Die Exergie einer Reaktion ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Delta E_{x,\text{R}} &= \sum_{\text{E}} n_{\text{E}} \cdot \bar{e}_{x,\text{E}} - \sum_{\text{P}} n_{\text{P}} \cdot \bar{e}_{x,\text{P}} = \sum_{\text{E}} n_{\text{E}} \cdot \bar{g}_{\text{E}} - \sum_{\text{P}} n_{\text{P}} \cdot \bar{g}_{\text{P}} \\ &= \Delta H_{\text{R}} - T_0 \left(\sum_{\text{P}} n_{\text{P},i} \cdot \bar{s}_i(T_{\text{P}}) - \sum_{\text{E}} n_{\text{E},i} \cdot \bar{s}_i(T_{\text{E}}) \right) \\ &= \underbrace{\sum_i (n_{\text{P},i} - n_{\text{E},i}) \cdot \bar{h}_{f,i}^0 - T_0 \sum_i (n_{\text{P},i} - n_{\text{E},i}) \bar{s}_i(T_0)}_{\text{gilt nur bei } T_{\text{E}} = T_{\text{P}} = T_0 = 298\text{K}} \end{aligned}$$

Die durch eine chemische Reaktion zu gewinnende Arbeit ist bei 298K:

$$W = - \underbrace{\sum_i (n_{\text{P},i} - n_{\text{E},i}) \cdot \bar{h}_{f,i}^0 + T_0 \sum_i (n_{\text{P},i} - n_{\text{E},i}) \bar{s}_i}_{\text{reversible Wärme}} - \underbrace{T_0 \Delta S_{\text{erz}}}_{\text{irrev. Wärme}}$$

Exergiebilanz einer Brennstoffzelle

in einer idealen Brennstoffzelle (ohne Volumenarbeit, keine Wärmefreisetzung) gibt es idealerweise keine Irreversibilitäten. Deshalb gilt bei T_0, p_0 :

$$\begin{aligned} W_{\text{rev}} &= -\Delta E_{x,\text{R}} = -\Delta G_{\text{R},0} = -\Delta H_{\text{R},0} + \Delta S_{\text{R},0} T_0 \\ &= - \sum_i (n_{\text{P},i} - n_{\text{E},i}) \cdot \bar{h}_{f,i}^0 + T_0 \sum_i (n_{\text{P},i} - n_{\text{E},i}) \bar{s}_i(T_0) \end{aligned}$$

Brennstoffexergie

Die chemische Exergie eines Kraftstoffes ist die theoretisch maximale Arbeit die aus einer Verbrennungskammer genutzt werden kann, wenn der Kraftstoff mit $T_{\text{ref}}, p_{\text{ref}}$ eintritt und dort vollständig mit den Umgebungsstoffen umgesetzt wird.

$$\begin{aligned} E_{x,\text{B}} &= n[h - h_0 - T_0(s - s_0)] + RT_0 \sum_i \nu_i \ln \left(\frac{X_i}{X_e} \right) \\ &= \Delta H - T_0 \Delta S + RT_0 \ln \left[\prod_i \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\nu_{\text{E}} - \nu_{\text{P}}} \right] \\ &= -\Delta G + RT_0 \ln \left[\prod_i \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\nu_{\text{E}} - \nu_{\text{P}}} \right] \end{aligned}$$

Dabei läuft der Index i über alle übrigen an der Reaktion teilnehmenden Stoffe.

Gleichgewicht der Reaktion eines Brennstoffs

Mit obiger Gleichung gilt nun für das Gleichgewicht der Reaktion:

$$-\frac{\Delta G_0}{R \cdot T_0} = \ln \left[\prod_i \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\nu_{\text{E}} - \nu_{\text{P}}} \right] = \ln(K_{\text{P}})$$

Das Gleichgewicht ist somit erreicht, wenn der Brennstoff seinen Gleichgewichtspartialdruck erreicht hat.

Approximation

Der Unterschied zwischen oberem Heizwert ($-\Delta H$) und reversibler Arbeit $-\Delta G_{\text{R},0}$ betrifft den $T_0 \Delta S_{\text{R},0}$ - und den Partialdruck-Term. Beide spielen aber in der Regel (bei $T = T_0 = 298 \text{ K}$ und $p = p_0 = 1 \text{ atm}$) eine untergeordnete Rolle. Somit gilt in erster Approximation:

$$E_{x,\text{B}} \approx H_o = -\Delta H$$

Brennstoffzellen

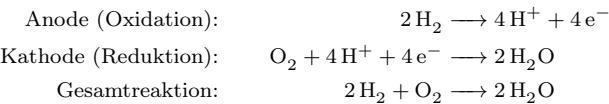
Brennstoffzellen wandeln chemische Energie grösstenteils direkt in elektrische Energie um. Die nutzbare Energie bei dieser Umwandlung im reversiblen Prozess entspricht der Änderung der freien Enthalpie der Reaktion und somit bei isobarer und isothermer Reaktion:

$$\Delta G_{\text{R}} = \Delta H_{\text{R}} - T \Delta S_{\text{R}}$$

Der erste Hauptsatz für das offene System *Brennstoffzelle* lautet:

$$\dot{Q} + P_{\text{Zelle}} = \dot{n}_{\text{fuel}} \cdot \Delta H_{\text{R}}(T)$$

Beispiel: Oxidation von Wasserstoff (saurer Elektrolyt)



Wirkungsgrade

Elektrochemischer Wirkungsgrad

Der bestmögliche Umwandlungswirkungsgrad einer Brennstoffzelle entspricht dem Quotient aus maximal erhältlicher, reversibler Arbeit und der Reaktionsenthalpie:

$$\eta_{\text{Zelle}} = \frac{\Delta G_{\text{R}}}{\Delta H_{\text{R}}} = 1 - T \frac{\Delta S_{\text{R}}}{\Delta H_{\text{R}}}$$

Die Entropiebilanz einer Reaktion kann positiv oder negativ sein. Im ersteren Fall kann $\eta_{\text{Zelle}} > 1$ sein, im letzteren Fall muss $\eta_{\text{Zelle}} < 1$ sein.

Energetischer Wirkungsgrad

Für den energetischen Wirkungsgrad einer Brennstoffzelle gilt:

$$\eta_{\text{Zelle}} = \frac{\dot{n}_{\text{fuel}}}{\dot{n}_{\text{fuel}}^*} \frac{U(I)}{U_{\text{H}}(T)} = \frac{\dot{n}_{\text{fuel}}}{\dot{n}_{\text{fuel}}^*} \frac{|P_{\text{Zelle}}|}{|P_{\text{Zelle}}| + |\dot{Q}|}$$

Wobei $\dot{n}_{\text{fuel}}^*$ der zugeführte molare Massenstrom, $\dot{n}_{\text{fuel}}$ der tatsächlich umgesetzte molare Massenstrom und $\dot{Q}$ der gesamte abgeführte Wärmestrom ist.

Stromerzeugung

Da Strom bewegte Ladung ist, ist er abhängig vom Elektronenumsatz:

$$\begin{aligned} I &= \dot{n}_{\text{e}} \cdot e \cdot N_{\text{A}} = \dot{n}_{\text{e}} \cdot F & \text{mit } F &= 96\,485.3 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{mol}} \\ I &= N_{\text{e}} \cdot F \cdot \dot{n}_{\text{fuel}} & \text{und } e &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \end{aligned}$$

Wobei N_{E} die Anzahl Elektronen ist, welche pro Molekül Brennstoff frei werden. Weiter gilt: $\dot{n}_{\text{fuel}} = \eta_{\text{I}} \cdot \dot{n}_{\text{fuel}}^*$, wobei $\dot{n}_{\text{fuel}}^*$ der zugeführte molare Massenstrom und $\dot{n}_{\text{fuel}}$ der tatsächlich umgesetzte molare Massenstrom ist.

Leistung

Mit der Konvention, dass die abgegebene Leistung eines Systems (gleich wie die abgegebene Wärme) negativ ist, gilt:

$$P_{\text{Zelle}} = -U(I) \cdot I$$

Maximale Leistung

Für den molaren Massenstrom, welcher maximale Leistung abgibt, gilt:

$$\frac{\partial |P_{\text{Zelle}}|}{\partial \dot{n}_{\text{fuel}}} = 0 \rightarrow \dot{n}_{\text{fuel},\text{max}} \rightarrow P_{\text{Zelle},\text{max}}$$

Bei maximalen Strömen müssen auch die entsprechenden molaren Flüsse $\dot{n}_{\text{fuel}}$ für ein Leistungsmaximum in Betracht gezogen werden.

Zellspannung

Es gibt zwei charakteristische Werte der Zellspannung. Beide sind theoretische Maximalwerte unabhängig vom Strom.

Kalorische Spannung

Die kalorische Spannung bezieht sich auf die Änderung der Reaktionsenthalpie ΔH_{R} und ist definiert als:

$$U_{\text{H}}(T) := \frac{-\Delta H_{\text{R}}(T)}{N_{\text{e}} \cdot F}$$

Wobei für $-\Delta H_{\text{R}}(T)$ meist der untere Heizwert eingesetzt wird.

Brennstoffzellen, Chemisches Gleichgewicht, Wärmeübertragung

Reversible Spannung

Die reversible Spannung bezieht sich auf die Änderung der freien Reaktionsenthalpie ΔG_R und ist definiert als:

$$U_{rev} := \frac{-\Delta G_R(T,p)}{N_e \cdot F} = \frac{-P_{Zelle}^{rev}}{I}$$

Dabei ist P_{Zelle}^{rev} die maximale reversible Leistung der Brennstoffzelle:

$$P_{Zelle}^{rev} = -U \cdot I = \dot{n}_{fuel} \cdot (-\Delta G_R) = \dot{n}_{fuel} \cdot (-\Delta H_R + T\Delta S_R)$$

Wärmestrom

Der gesamte abgeführte Wärmestrom folgt aus dem ersten Hauptsatz:

$$\dot{Q} = -[U_H - U(I)] \cdot I \quad \text{= Q_rev + Q_irrev}$$

Reversibel nutzbarer Wärmestrom

Der Wärmestrom der reversibel nutzbar ist lässt sich wie folgt berechnen:

$$\dot{Q}_{rev} = -[U_H - U_{rev}] \cdot I = \dot{Q} - \dot{Q}_{irrev}$$

Irreversibler Wärmestrom

Für den irreversiblen Wärmestrom, welcher verloren geht, gilt:

$$\dot{Q}_{irrev} = -[U_{rev} - U(I)] \cdot I = \dot{Q} - \dot{Q}_{rev}$$

Zellstapel

Bei einer Serieschaltung von N Brennstoffzellen ist die Spannung wie auch die Leistung additiv:

$$U_{Stapel} = N \cdot U_{Zelle} \qquad P_{Stapel} = N \cdot P_{Zelle}$$

Chemisches Gleichgewicht

Im chemischen Gleichgewicht laufen Hin- und Rückreaktion gleich schnell ab. Die gesamte freie Enthalpie des Systems ist in diesem Zustand minimal. Es muss also gelten:

$$dG = -SdT + Vdp + \sum_i \mu_i dn_i = 0$$

Die gesamte freie Enthalpie eines Systems berechnet sich durch:

$$G(p,T) = \sum_i n_i \left[G_{0,i}(T) - RT \ln \left(\frac{p_i}{p_0} \right) \right]$$

mit $G_0(T) = G(p_0,T) = H(T) - T \cdot S(p_0,T)$

Wobei die einzelnen Stoffe als ideale Gase angenommen werden.

Gleichgewichtskonstanten

Gleichgewichtskonstante für Partialdrücke

Die Gleichgewichtskonstante K_p ist eine Funktion der Temperatur, jedoch nicht des Gesamtdruckes. K_p ist tabelliert (Achtung: In Tabellen findet sich der logarithmierte Wert $\log_{10}(K_p)$) oder kann aus den freien Enthalpien aller Komponenten berechnet werden. Es gilt:

$$K_p = \exp \left(\frac{-\Delta G_0}{\bar{R} \cdot T} \right) = \prod_i \left[\frac{p_i}{p_0} \right]^{\nu_{P,i} - \nu_{E,i}}$$

Dabei sind p_i die Partialdrücke, welche sich wie folgt berechnen lassen:

$$p_i = p_{tot} \cdot X_i = p_{tot} \frac{n_i}{n_{tot}} \quad (n_{tot} \text{ nur auf Produkte bezogen})$$

Gleichgewichtskonstante für Molkonzentrationen

Alternativ zu K_p kann auch K_c mit Bezug auf die Molkonzentrationen verwendet werden. Es gilt:

$$K_c = \prod_i [c_i]^{\nu_{P,i} - \nu_{E,i}} \qquad c_i = \frac{n_i}{V}$$

Gleichgewichtskonstante für Molzahlen

Als dritte Alternative kann auch K_N mit Bezug auf die Molzahlen verwendet werden. Es gilt:

$$K_N = \prod_i [n_i]^{\nu_{P,i} - \nu_{E,i}} \qquad n_i = \frac{p_i}{p} n_{tot}$$

Van't Hoff'sche Gleichung

Die Van't Hoff'sche Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen der Lage des Gleichgewichts und der Temperatur (bei konstantem Druck):

$$\ln(K(T_2)) = \ln(K(T_1)) + \frac{\Delta H_R}{\bar{R}} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 \cdot T_2}$$

Dissoziation

Unter der Dissoziation versteht man die angeregte oder selbstständig verlaufende Teilung einer chemischen Verbindung in zwei oder mehrere Moleküle, Ione oder Atome. Die Gleichgewichtskonstante K_p verschiedener Dissoziationen ist in TAB-A32 tabelliert (Achtung: logarithmierter Wert $\ln(K_p)$ angegeben).

Dissoziationsberücksichtigung bei Verbrennung

Wird bei Verbrennungsprozessen die Dissoziation berücksichtigt, kann man den Anteil der dissoziiert wird nach folgendem Vorgehen berechnen:

- 1. Reaktionsgleichung ohne Dissoziation aufstellen
$$CO + 0.5O_2 + 1.88N_2 \longrightarrow CO_2 + 1.88N_2$$
- 2. Dissoziationsgleichung aufstellen
$$1CO_2 \rightleftharpoons 1CO + 0.5O_2 \quad (d)$$
- 3. Dissoziations- in Reaktionsgleichung einsetzen und Variable einführen
$$CO + 0.5O_2 + 1.88N_2 \longrightarrow (1-x)CO_2 + xCO + 0.5xO_2 + 1.88N_2 \quad (R)$$

Dabei ist x der Anteil CO_2 der dissoziiert ist.
- 4. ν_{tot} der Produkte von Schritt 3 in Abhängigkeit von x berechnen
$$\nu_{tot} = (1-x) + x + 0.5x + 1.88 = 2.88 + 0.5x$$
- 5. K_p der Dissoziation in Tabelle nachschauen und nach folgender Formel die Variable ausrechnen (TI Voyage 200: [Apps] → [9]):

$$K_p = \frac{\prod \nu_{P,R}^{\nu_{P,d}} \left[\frac{p_{tot}}{p_{ref} \cdot \nu_{tot,R}} \right]^{\sum \nu_{P,d} - \sum \nu_{E,d}}}{\prod \nu_{E,R}^{\nu_{E,d}}}$$

$$K_p = \frac{x^1 \cdot (0.5x)^{0.5}}{(1-x)^1} \left[\frac{p_{tot}}{p_{ref} \cdot (2.88 + 0.5x)} \right]^{1+0.5-1}$$

Grundlagen der Wärmeübertragung

Arten der Wärmeübertragung

- **Leitung** tritt in jeglicher Art von Materie auf, hauptsächlich aber in Festkörpern.

- **Konvektion** ist Wärmetransport, der mit fließender Materie verbunden ist, also in Verbindung mit Fluiden auftritt.
- **Strahlung** ist Wärmetransport, der in Form von elektromagnetischer Strahlung stattfindet und nicht an Materie gebunden ist.

Grundlegende Grössen

Wärmeleitfähigkeit λ

Die Wärmeleitfähigkeit ist eine temperaturabhängige Materialgrösse und beschreibt die Wärmemenge (in Joule) die in 1 s durch eine 1 m dicke Stoffschicht der Fläche 1 m² fliesst. Dimension: $[\lambda] = [W \, m^{-1} \, K^{-1}]$

Wärmeübergangskoeffizient α

Der Wärmeübergangskoeffizient beschreibt die Fähigkeit eines Fluides, Energie von der Oberfläche eines Körpers abzuführen bzw. an die Oberfläche abzugeben. Er ist keine Materialkonstante sondern stark abhängig von problemspezifischen Gegebenheiten. Dimension: $[\alpha] = [W \, m^{-2} \, K^{-1}]$

Temperaturleitfähigkeit a

Die Temperaturleitfähigkeit ist eine Materialeigenschaft, die zur Beschreibung der zeitlichen Änderung der räumlichen Verteilung durch Wärmeleitung als Folge eines Temperaturgradienten dient.

$$a := \frac{\lambda}{\rho c} \qquad [a] = [m^2s]$$

Empirische Gesetze

Fourier'sches Gesetz

Damit eine Wärmeleitung stattfindet, muss eine Temperaturdifferenz vorhanden sein. Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{q}'' &= -\lambda \nabla T = -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \vec{e}_x + \frac{dT}{dy} \vec{e}_y + \frac{dT}{dz} \vec{e}_z \right) \\ &\qquad \qquad \qquad \text{im kartesischen Koordinatensystem} \\ &= -\lambda \left(\frac{dT}{dr} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{dT}{d\theta} \vec{e}_\theta + \frac{dT}{dz} \vec{e}_z \right) \\ &\qquad \qquad \qquad \text{im zylindrischen Koordinatensystem} \\ &= -\lambda \left(\frac{dT}{dr} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{dT}{d\theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{dT}{d\varphi} \vec{e}_\varphi \right) \\ &\qquad \qquad \qquad \text{im sphärischen Koordinatensystem} \end{aligned}$$

Wobei $\dot{q}''$ der Wärmestrom durch eine Fläche und λ die Wärmeleitfähigkeit ist.

Konvektives Wärmeübergangsgesetz

Das konvektive Wärmeübergangsgesetz beschreibt den Wärmetransport, welcher mit fließenden Fluiden verbunden ist:

$$\dot{q}'' = \frac{\dot{Q}}{A} = \alpha \cdot (T - T_\infty)$$

Wärmestrahlungsgesetz

Das Wärmestrahlungsgesetz beschreibt den Wärmetransport, welcher in Verbindung mit Strahlung geschieht:

$$\dot{q}'' = \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

Wärmeleitungsgleichung, Widerstandsdarstellung, Spezialfälle von Wärmeflüssen

Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung entsteht aus der Energieerhaltung mit Taylorentwicklungen von den $\dot{Q}_j$ Termen und diversen Umformungen. Ihre allgemeine Form lautet:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) + \dot{q}_{\text{Quellen}}'''$$

kartesische Koordinaten

In kartesischen Koordinaten lautet die Wärmeleitungsgleichung:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_{\text{Quellen}}'''$$

Zylindrische Koordinate

In zylindrischen Koordinaten lautet die Wärmeleitungsgleichung:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_{\text{Quellen}}'''$$

Sphärische Koordinaten

In sphärischen Koordinaten lautet die Wärmeleitungsgleichung:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \sin(\varphi) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \dot{q}_{\text{Quellen}}'''$$

Vereinfachte Wärmeleitungsgleichungen

Konstante Wärmeleitfähigkeit, stationär

Kann die Wärmeleitfähigkeit als konstant und das Problem als stationär angenommen werden, ergibt sich je nach Vorhandensein von Quellen die Laplace- oder die Poisson-Gleichung:

$$\text{Laplace: } \Delta T = 0 \quad \text{Poisson: } \Delta T + \frac{1}{\lambda} \dot{q}_{\text{Quellen}}''' = 0$$

Eindimensionale Temperaturverteilung

Konstante Wärmeleitfähigkeit, stationär, keine Quellen

Je nach Koordinatensystem ergeben sich andere Temperaturverläufe:

Temperaturverläufe	Skizzen
kartesisch $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = C_1$ $T = C_1 x + C_2$	
zylindrisch $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$ $T = C_1 \ln(r) + C_2$	
sphärisch $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}$ $T = -\frac{C_1}{r} + C_2$	

Konstante Wärmeleitfähigkeit, stationär, mit Quellen

Je nach Koordinatensystem ergeben sich andere Temperaturverläufe. Skizzen für verschiedene Situationen im kartesischen System.

Temperaturverläufe	Skizzen (kartesisch)
kartesisch $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{1}{\lambda} \dot{q}_{\text{Quellen}}'''$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda} \dot{q}_{\text{Quellen}}''' x + C_1$ $T = -\frac{1}{2\lambda} \dot{q}_{\text{Quellen}}''' x^2 + C_1 x + C_2$	symmetrisch
zylindrisch $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\lambda} \dot{q}_{\text{Quellen}}''' r$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{2\lambda} \dot{q}_{\text{Quellen}}''' r + \frac{C_1}{r}$ $T = -\frac{1}{4\lambda} \dot{q}_{\text{Quellen}}''' r^2 + C_1 \ln(r) + C_2$	asymmetrisch
sphärisch $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\lambda} \dot{q}_{\text{Quellen}}''' r^2$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{3\lambda} \dot{q}_{\text{Quellen}}''' r + \frac{C_1}{r^2}$ $T = -\frac{1}{6\lambda} \dot{q}_{\text{Quellen}}''' r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$	isoliert

Randbedingungen

Fixe Oberflächentemperatur

Kann die Oberflächentemperatur als vorgegeben betrachtet werden, gilt:

$$T(x = x_0, t) = T_0(t)$$

Fixer Wärmestrom

Wird einem Medium ein fixer Wärmestrom zu- oder abgeführt, gilt:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = \dot{q}''(x_0)$$

Isolation

Ist ein Medium bei $x = x_0$ isoliert, darf dort keine Wärme fließen:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = 0$$

Die Temperatur muss bei $x = x_0$ also horizontal verlaufen.

Konvektive Randbedingung

Falls Konvektion auftritt, muss der Wärmestrom der Wärmeleitung des Körpers an diesem Ort gleich des Wärmestroms der Konvektion sein:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = \alpha \cdot (T(x = x_0, t) - T_\infty)$$

Widerstandsdarstellung

Das Lösen der Wärmeleitungsgleichung kann durch eine Analogie mit dem elektrischen Strom umgangen werden. Voraussetzung zur Nutzung dieser Analogien ist die Abwesenheit von Quellen.

Analogien zwischen der Thermodynamik und Elektrotechnik

Thermodynamik		Elektrotechnik	
Wärmeleitwiderstand	R_{th}	Elektrischer Widerstand	R
Temperaturdifferenz	ΔT	Spannung (Potentialdiff.)	$U(\Delta\varphi)$
Wärmestrom	$\dot{Q}$	Elektrischer Strom	I
Wärmeleitfähigkeit	λ	Elektrische Leitfähigkeit	σ
Wärmekapazität	C_{th}	Elektrische Kapazität	C

Es gilt auch für die Thermodynamik die Maschen- und Knotengleichung sowie das Ohm'sche Gesetz:

$$\dot{Q} = \frac{1}{R_{\text{tot}}} \cdot (T_1 - T_2) = k \cdot A \cdot (T_1 - T_2)$$

Wärmeleitwiderstand

Der Wärmeleitwiderstand berechnet sich durch die Lösung der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung für den Temperaturverlauf in Kombination mit dem Fourier'schen Gesetz der Wärmestromdichte. Aus dem Vergleich mit der thermodynamischen Version des Ohm'schen Gesetz $\dot{Q} = \frac{1}{R_{\text{th}}} \Delta T$ kann der Wärmeleitwiderstand R_{th} definiert werden. Es gilt:

$$\underbrace{R_{\text{th},\lambda} := \frac{1}{\lambda} \frac{L}{A}}_{\text{kartesisch}} \quad \underbrace{R_{\text{th},\lambda} := \frac{\ln(r_a/r_i)}{2\pi\lambda L}}_{\text{zylindrisch}} \quad \underbrace{R_{\text{th},\lambda} := \frac{(1/r_i) - (1/r_a)}{4\pi\lambda}}_{\text{sphärisch}}$$

Konvektiver Wärmeleitwiderstand

Für die konvektive Wärmeübertragung wird entsprechend ein konvektiver Wärmeleitwiderstand R_{th} definiert:

$$R_{\text{th},\alpha} := \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

Wärmedurchgangskoeffizient

Der Wärmedurchgangskoeffizient k ist als der Kehrwert der Summe aller flächenspezifischen Wärmeleitwiderständen definiert:

$$k := \frac{1}{\sum_i R_i \cdot A_i}$$

Spezialfälle von Wärmeflüssen

Wärmefluss durch eine Rohrisolation

Der stationäre, eindimensionale Wärmefluss durch eine Rohrisolation hinterlässt folgende Wärmeleitungsgleichung:

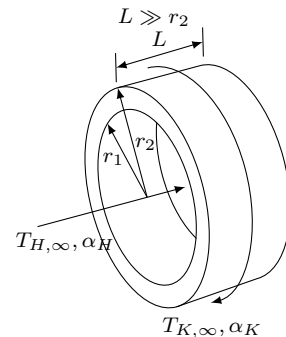
$$\Delta_r T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

Mit Annahme, dass die Oberflächentemperaturen innen und aussen bekannt sind (Vernachlässigung konvektiver Wärmeübergangswiderständen) ergibt dies die Randbedingungen:

$$T(r_1) = T_1 = T_{H,\infty}, \quad T(r_2) = T_2 = T_{K,\infty}$$

Daraus resultiert schlussendlich folgender Temperaturverlauf:

$$T(r) = \frac{T_{H,\infty} - T_{K,\infty}}{\ln(r_1/r_2)} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{K,\infty}$$



Wärmeleitung in Rippen

Kritischer Rohrradius

Entgegen der Intuition resultiert mehr Isolationsmaterial nicht zwingend in besserer Isolation. Denn je dicker die Rohrwand, desto besser ist zwar die Isolation bezüglich der Wärmeleitung, aber auch der Wärmeverlust aufgrund der Konvektion nimmt zu. Werden Wärmeleitung durch das Isolationsmaterial und Konvektion an der Aussenwand berücksichtigt, gilt für den Wärmeleitwiderstand:

R_{th} = \left(\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda} + \frac{1}{2\pi r_2 L \alpha} \right) \Rightarrow \frac{\partial R_{th}}{\partial r_2} \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow r_{krit} = \frac{\lambda}{\alpha}

Wärmefluss durch ebene Wand mit Konvektion

Für eine ebene Wand im stationären Zustand mit beidseitiger Konvektion aber ohne Quellen kann die Widerstandsdarstellung angewendet werden:

\dot{Q}_x = \frac{T_{1,\infty} - T_{2,\infty}}{R_{tot}}

Das Fourier'sche Gesetz ergibt den Temperaturverlauf:

\dot{Q}_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \Rightarrow T(x) = -\frac{1}{\lambda} \int \frac{T_{1,\infty} - T_{2,\infty}}{\frac{2}{\alpha} + \frac{L}{\lambda}} dx = \frac{T_{2,\infty} - T_{1,\infty}}{\frac{2\lambda}{\alpha} + L} x + C

Wobei folgende Randbedingung gewählt werden kann:

\dot{Q}|_{x=0} \stackrel{!}{=} \alpha \cdot (T(x=0) - T_{1,\infty}) \Rightarrow T(0) = \left(\frac{T_{2,\infty} - T_{1,\infty}}{\frac{2}{\alpha} + \frac{L}{\lambda}} \right) \frac{1}{\alpha}

Mit C = T(0) und Bi = \lambda L / \alpha gilt schlussendlich:

T(x) = \frac{T_{2,\infty} - T_{1,\infty}}{2 + Bi} \frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{T_{2,\infty} - T_{1,\infty}}{2 + Bi}

Wärmeleitung in Rippen

Die allgemeine Rippengleichung ergibt sich aus der Energiebilanz für ein Kontrollvolumen dV der Länge dx, Querschnittsfläche S und Oberfläche dA. U ist die innere Energie des Rippenelementes und \dot{E} der Energiefluss, welcher durch die Bewegung der Rippe bedingt ist:

\frac{\partial U}{\partial t} = \underbrace{\dot{Q}_{Leit} + \dot{E} + \dot{q}'''_{Quellen} \cdot dV}_{\text{ins Kontrollvolumen hinein}} - \underbrace{\left(\dot{Q}_{Leit} + \frac{\partial \dot{Q}_{Leit}}{\partial x} dx \right) + \left(\dot{E} + \frac{\partial \dot{E}}{\partial x} dx \right) + \dot{Q}_{Konv} + \dot{q}''_{Strahl} \cdot dA}_{\text{aus dem Kontrollvolumen heraus}}

Mit der Annahme, dass \rho, \lambda, c = konstant gilt:

U = \rho \cdot c \cdot T \cdot dV \quad \dot{E} = \dot{m} \cdot c \cdot T = \rho \cdot u \cdot S \cdot c \cdot T

\dot{Q}_{Leit} = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad \dot{Q}_{Konv} = \alpha \cdot dA \cdot (T - T_{\infty})

Nach Einsetzen dieser Beziehungen und Ableiten nach x erhält man:

\rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dV}{dx} T \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial x} (S \cdot u \cdot T) - \frac{dA}{dx} \alpha (T - T_{\infty}) + \dot{q}'''_{Quellen} \frac{dV}{dx} - \dot{q}''_{Strahl} \frac{dA}{dx}

Vereinfachung der Rippengleichung

Für in der Energietechnik relevante Situationen der Rippe können gegenüber der allgemeinen Form der Energieerhaltung eine Reihe von Vereinfachungen gemacht werden:

- Konstante Querschnittsfläche S
- Keine Bewegung der Rippe u = 0
- Stationäre Zustände \partial(\cdot)/\partial t = 0
- Keine Quellen \dot{q}'''_{Quellen} = 0
- Strahlung vernachlässigbar \dot{q}''_{Strahl} = 0

Somit bleibt von der allgemeinen Form noch folgendes übrig:

0 = \lambda \cdot S \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dA}{dx} \cdot \alpha \cdot (T - T_{\infty})

Kompakte Form der Rippengleichung

Wenn man die Oberfläche durch den Rippenumfang (dA = P \cdot dx) ausdrückt und die Übertemperatur \Theta := T - T_{\infty} definiert, erhält man eine kompakte Darstellung für die Wärmeleitungsgleichung in der Rippe:

\frac{d^2 \Theta}{dx^2} - m^2 \cdot \Theta = 0 \quad m^2 := \frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S}

Die allgemeine Lösung obiger Differentialgleichung lautet:

\Theta(x) = C_1 \cdot e^{m \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m \cdot x}

Randbedingungen

Bekannte Temperatur am Rippenfuss

Für fast alle Situationen ist die Temperatur am Rippenfuss bekannt. Es gilt:

T(0) \stackrel{!}{=} T_{Fuss} \rightarrow \Theta(0) = T_{Fuss} - T_{\infty} = \Theta_{Fuss} \Rightarrow \Theta_{Fuss} = C_1 + C_2

Isolierter Rippenkopf

Die Annahme des isolierten Rippenkopfs gilt als Näherung für den Fall, dass der Wärmefluss am Rippenende im Vergleich zum Wärmefluss durch die Seitenflächen vernachlässigbar ist. Dann gilt:

\left. \frac{d\Theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \Rightarrow C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = 0

Konvektion am Rippenkopf

Diese Situation entspricht der Realität und berücksichtigt die Konvektion am Rippenende. Es gilt:

-\lambda \left. \frac{d\Theta}{dx} \right|_{x=L} = \alpha \cdot (T(L) - T_{\infty}) \rightarrow \left. \frac{d\Theta}{dx} \right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \Theta|_{x=L} \Rightarrow C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (C_1 \cdot e^{m \cdot L} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L})

Bekannte Temperatur am Rippenkopf

Diese Situation entspricht einer Rippe, die zwischen zwei Flächen bekannter Temperatur eingespannt ist. Es gilt:

T(L) \stackrel{!}{=} T_{Kopf} \rightarrow \Theta(L) = T_{Kopf} - T_{\infty} = \Theta_{Kopf} \Rightarrow C_1 \cdot e^{m \cdot L} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L} = \Theta_{Kopf}

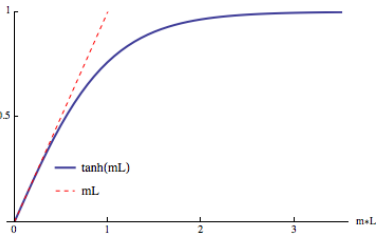
Sehr lange Rippe

Ist die Rippe so lang, dass am Rippenkopf kein Wärmeffluss mehr ankommt, spricht man von einer thermisch unendlich langer Rippe. Es gilt:

\Theta(L \rightarrow \infty) = T(L \rightarrow \infty) - T_{\infty} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_1 e^{m \cdot (L \rightarrow \infty)} = 0 \rightarrow C_1 = 0

Optimale Rippenlänge

Die Wärmeübertragungsleistung einer Rippe entspricht (im stationären Zustand) dem Wärmeffluss der am Rippenfuss hineinfliesst. Mit der Annahme des isolierten Rippenkopfs kann gezeigt werden, dass der Wärmeffluss durch den Rippenfuss und somit im stationären Fall auch die Wärmeübertragungsleistung \dot{Q}_F = \lambda \cdot S \cdot \Theta_F \cdot m \cdot \tanh(mL) ist. Ein effizienter Materialeinsatz ist für Werte von mL < 1 gewährleistet. Die sinnvolle Rippenlänge berechnet sich deshalb als:



L_{opt} < \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{\lambda \cdot S}{\alpha \cdot P}}

Der Rippenwirkungsgrad

Die Wirksamkeit der Rippe in Bezug auf ihre Wärmeübertragung wird durch den Rippenwirkungsgrad \eta_R beschrieben:

\eta_R := \frac{\text{übertragene Wärmemenge}}{\text{maximal übertragbare Wärmemenge}}

Übertragene Wärmemenge

Die übertragene Wärmemenge wird durch die Wärmemenge, welche effektiv durch den Rippenfuss (oder durch die Oberfläche der Rippe) übertragen wird, bestimmt.

Maximal übertragbare Wärmemenge

Die maximal übertragbare Wärmemenge ist die Wärmemenge, welche die Rippe übertragen könnte, wenn ihre gesamte Oberfläche die Temperatur des Rippenfusses annehmen würde (\lambda \rightarrow \infty). Sie berechnet sich zu:

\dot{Q}_{max} = \alpha \cdot \underbrace{P \cdot L}_A \cdot \Theta_{Fuss}

Isolierter Rippenkopf

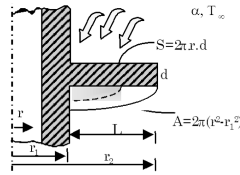
Falls der Rippenkopf als isoliert angenommen werden kann, gilt für den Rippenwirkungsgrad:

\eta_R = \frac{\tanh(m \cdot L)}{m \cdot L}

Kreisförmige Rippen, Instationäre Wärmeleitung, Grundlagen der Konvektion

Kreisförmige Rippen

Kreisförmige Rippen sind ein Spezialfall von Rippen mit variabler Querschnittsfläche $S = S(r)$, ansonsten gelten noch alle Vereinfachungen der Rippengleichung ($u = 0, \partial(\cdot)/\partial t = 0, \dot{q}_{\text{Quellen}}''' = 0, \dot{q}_{\text{Strahl}}'' = 0$). Die allgemeine Rippengleichung lautet somit:



$$\lambda \cdot \frac{d}{dr} \left(S(r) \cdot \frac{dT}{dr} \right) - \frac{dA}{dr} \cdot \alpha \cdot (T - T_{\infty}) = 0$$

Für kreisförmige Rippen gilt:

$$S(r) = 2\pi \cdot r \cdot d \quad A(r) = 2(\pi \cdot (r^2 - r_1^2))$$

Und somit:

$$\lambda \cdot 2\pi \cdot d \left(\frac{dT}{dr} + r \frac{d^2T}{dr^2} \right) - 4\pi \cdot r \cdot \alpha \cdot (T - T_{\infty}) = 0$$

Mit der Übertemperatur $\Theta := T - T_{\infty}$ kommt man auf folgende Form:

$$\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot d} \cdot \Theta = 0$$

Dies ist eine sogenannte modifizierte Bessel'sche Differentialgleichung. Eine direkte Integration ist nicht möglich, die allgemeine Lösung wird durch Besselfunktionen 0-ter Ordnung der ersten respektive zweiten Art beschrieben:

$$\Theta(r) = C_1 \cdot I_0(m \cdot r) + C_2 \cdot K_0(m \cdot r)$$

Funktionswerte der Besselfunktionen findet man tabelliert in der Literatur.

Instationäre Wärmeleitung

Raumunabhängige, instationäre Wärmeleitung

Bei dieser Betrachtung hängt die gesuchte Temperatur nur von der Zeit, nicht aber vom Ort ab. Dies entspricht einem Objekt, dessen thermischen Zustand von einer einzigen Temperatur beschrieben wird.

Voraussetzungen

Der Wärmetransport innerhalb des Körpers zur Oberfläche muss dem konvektiven Wärmeübergang entsprechen. An der Oberfläche gilt:

$$\lambda \frac{T_i - T_0}{L} \approx \alpha(T_0 - T_{\infty}) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{T_i - T_0}{T_0 - T_{\infty}} \approx \text{Bi} \stackrel{!}{\ll} 1$$

Diese Forderung ist für sehr kleine Körper ($\alpha L \ll 1$) oder Körper mit sehr guter Wärmeleitfähigkeit ($\lambda \gg 1$, metallisch) erfüllt.

Energiesatz

Da starre Körper als Kontrollvolumen grundsätzlich vernachlässigbare Arbeit verrichten, gilt:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}_{\text{in}} - \dot{Q}_{\text{out}} + \dot{Q}_{\text{Quellen}}$$

Wobei meist gilt:

$$\dot{Q}_{\text{in}} = 0 \quad \dot{Q}_{\text{out}} = \dot{Q}_{\text{Konv}} = A \cdot \alpha \cdot (T - T_{\infty})$$

Für die linke Seite kann angenommen werden, dass folgendes gilt:

$$E = m \cdot c \cdot T \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot c \cdot T) = m \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}$$

Abgegebene Wärmemenge

Für die von einem Körper von t_0 bis t_1 abgegebene Wärme $Q_{\text{out},1}$ gilt:

$$Q_{\text{out},1} = \int_{t_0}^{t_1} \dot{Q}_{\text{out}} dt = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\alpha \cdot A \cdot (T(t) - T_{\infty})}_{\text{bei reiner Konvektion}} dt$$

Eindimensionale, instationäre Wärmeleitung

Ist $\text{Bi} \ll 1$ nicht erfüllt, handelt es sich aber um plattenförmige Objekte, kann die Wärmeleitung in 2 Dimensionen vernachlässigt werden.

Wärmeleitung in einer ausgedehnten ebenen Platte

Für eine ausgedehnte ebene Platte, welche ab $t = 0$ konvektiv abgekühlt wird gilt die Energieerhaltungsgleichung ohne innere Wärmequellen:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Die Platte wird als symmetrisch angenommen mit Ausdehnung b in $\pm x$ -Richtung. Meist können folgende Anfangs- und Randbedingungen betrachtet werden:

$$T(x, t = 0) = T_0 \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad -\lambda \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=b} = \alpha \cdot (T - T_{\infty})$$

Einführung der Übertemperatur $\Theta := T - T_{\infty}$ ergibt:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$$

Mit den Randbedingungen:

$$\Theta(x, t = 0) = T_0 - T_{\infty} \quad \left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad -\lambda \cdot \left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x=b} = \alpha \cdot \Theta(x = b, t)$$

Dieses Anfangswertproblem kann mit einem Separationsansatz gelöst werden.

Instationäre Wärmeleitung in halbinendlicher Wand

Obwohl eine Wand endlich dick ist, kann sie für bestimmte Zeiten als halbinendliche Wand betrachtet werden: solange nämlich, bis die Störung die Rückseite erreicht hat. Im Folgenden gilt als Störung, dass die Temperatur am Wandende sprunghaft steigt. Es gilt die Erhaltungsgleichung:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Mit der Variablentransformation $\eta := x/\sqrt{4 \cdot a \cdot t}$ kommt man auf:

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} = -2 \cdot \eta \cdot \frac{dT}{d\eta}$$

Die entsprechenden Randbedingungen lauten nun:

$$\begin{aligned} \eta \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0 \text{ oder } t \rightarrow \infty) : \quad T(0) &= T_S \\ \eta \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty \text{ oder } t \rightarrow 0) : \quad T(\infty) &= T_i \end{aligned}$$

Wobei T_i die Anfangstemperatur der Platte und T_S die Störtemperatur bezeichnet. Die vollständige Lösung lautet:

$$\frac{T(\eta) - T_S}{T_i - T_S} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-u^2} du \equiv \text{erf}(\eta)$$

Dabei ist erf die Fehlerfunktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$\text{erf}(-\eta) = -\text{erf}(\eta) \quad \text{erf}(0) = 0 \quad \text{erf}(\eta \rightarrow \infty) = 1$$

Gebräuchlich für die Darstellung der Temperaturverteilung ist die Abweichung von der ursprünglichen Gleichgewichtstemperatur:

$$\frac{T(\eta) - T_i}{T_S - T_i} = 1 - \text{erf}(\eta) = \text{erfc}(\eta)$$

Diese Darstellung gibt die Abweichung der lokalen Temperatur $T(\eta)$ von der Oberflächentemperatur T_S wieder.

Diffusionslänge und Diffusionszeit

Die Stelle $\eta = 0.5$ ergibt die folgende Korrelation:

$$\eta = 0.5 \quad \rightarrow \quad x_D = \sqrt{a \cdot t_D} \quad \text{erfc}(0.5) \approx 0.48$$

Dabei wird x_D Diffusionslänge (in Funktion der Diffusionszeit t_D) genannt und bezeichnet die Stelle, an welcher, abhängig von der Materialgröße a , nach der Zeit t_D die Störung einen Wert von 48% von der an der Oberfläche angebrachten Störung erreicht hat.

Grundlagen der Konvektion

Bewegt sich ein Fluid entlang der Oberfläche eines festen Körpers unterschiedlicher Temperatur, wird Wärme ausgetauscht, wobei die Fließbewegung des Fluids die massgebende Rolle spielt.

Definitionen

Biot-Zahl

Die Biot-Zahl gibt bei charakteristischer Länge L das Verhältnis der konvektiven Wärmeübertragung zur Wärmeleitfähigkeit wieder:

$$\text{Bi} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}$$

Dynamische Viskosität

Als dynamische Viskosität wird der Proportionalitätsfaktor μ zwischen der Schubspannung τ und dem Geschwindigkeitsgefälle $\frac{\partial u}{\partial y}$ bezeichnet:

$$\mu = \tau \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1} \quad [\mu] = \text{Pa} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

Kinematische Viskosität

Als kinematische Viskosität wird der Quotient zwischen der dynamischen Viskosität μ eines Fluides und dessen Dichte ρ bezeichnet:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Wandschubspannung

Als Wandschubspannung bezeichnet man die Spannung, welche durch das Vorbeifliessen eines Fluides auf eine Wand wirkt.

$$\tau_W = \mu \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad [\tau_W] = \text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$$

Widerstandsbeiwert

Der Widerstandsbeiwert ist eine dimensionslose Kennzahl zur Angabe des Strömungswiderstandes bei der Umströmung von Körpern.

$$c_f = \frac{\tau_W}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_{\infty}^2} \quad [c_f] = -$$

Grundlagen der Konvektion, Erhaltungssätze, Grenzschichten, Infinitesimale Energieerhaltung

Wandwiderstandskraft

Unter der Wandwiderstandskraft versteht man jene Kraft, welche durch die Wandschubspannung induziert wird:

F_W = \int_0^B \int_0^L \tau_W \, dx \, dy

Formel gilt für eine ebene Wand der Breite B und Länge L.

Spezifischer Wandwärmestrom

Der spezifische Wandwärmestrom beschreibt die Wärme, welche pro Zeit und Fläche durch die Wand fließt:

\dot{q}_W'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}

Wandwärmestrom

Der Wandwärmestrom bezeichnet die Wärme, welche über eine gesamte Wand fließt:

\dot{Q}_W = \int_0^B \int_0^L \dot{q}_W'' \, dx \, dy

Formel gilt für eine ebene Wand der Breite B und Länge L.

Wärmeübergangskoeffizient

Der Wärmeübergangskoeffizient \alpha ist ein Proportionalitätsfaktor, der die Intensität des Wärmeübergangs an einer Grenzfläche bestimmt. Da \alpha im Allgemeinen nicht konstant ist, wird meist der gemittelte Wärmeübergangskoeffizient \bar{\alpha} benutzt.

\bar{\alpha} = \frac{1}{A} \iint_A \alpha \, dA = \frac{1}{L} \int_0^L \underbrace{\alpha(x) \, dx}_{\text{eindimensional}} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{Nu_x \cdot \lambda}{x} \, dx \quad [\alpha] = W \, m^{-2} \, K^{-1}

Filmtemperatur

Unter der Filmtemperatur versteht man das arithmetische Mittel der Wand- und Freistromtemperatur:

T_{Film} = \frac{1}{2} (T_W + T_{\infty}) \quad [T_{Film}] = K

Die Filmtemperatur ist die Bezugstemperatur für die Stoffwerte bei umströmten Körpern!

Reynolds-Zahl

Die Reynolds-Zahl stellt das Verhältnis von Trägheits- zu Viskositätskräften dar.

Re_L = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot L}{\mu} = \frac{u_{\infty} \cdot L}{\nu} \quad Re_x = \underbrace{\frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot x}{\mu}}_{\text{lokal}} \quad [Re] = -

Nusselt-Zahl

Die Nusselt-Zahl drückt aus, um das Wievielfache die Wärmeübertragung aufgrund der Konvektion stärker ist als wenn reine Wärmeleitung herrschen würde.

Nu_L = \frac{\bar{\alpha} \cdot L}{\lambda_{Fluid}} \quad Nu_x = \underbrace{\frac{\alpha \cdot x}{\lambda_{Fluid}}}_{\text{lokal}} \quad [Nu] = -

Prandtl-Zahl

Die Prandtl-Zahl stellt die Verknüpfung des Geschwindigkeitsfeldes mit dem Temperaturfeld eines Fluids her. Während die kinematische Viskosität den Wärmetransport infolge von Reibung repräsentiert, steht der Temperaturkoeffizient a für den Wärmetransport infolge Leitung.

Pr = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda_{Fluid}} = \frac{\nu}{a_{Fluid}} \quad [Pr] = -

Peclet-Zahl

Die Peclet-Zahl bezeichnet das Verhältnis von advektiven zu diffusiven Flüssen auf einer charakteristischen Länge L:

Pe_L = \frac{L \cdot u}{a} = Re_L \cdot Pr_L \quad [Pe] = -

Massenerhaltung

Die Kontinuitätsgleichung in kartesischen Koordinaten lautet:

\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0

Im zweidimensionalen Fall gilt für stationäre, inkompressible Strömungen und Medien:

\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0

Impulserhaltung

Betrachtet man ein reibungsbehaftetes Newton'sches Medium welches inkompressibel ist und eine konstante dynamische Viskosität hat, gelten die Navier-Stokes-Gleichungen:

\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \rho f_x

\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \rho f_y

\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} w + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho f_z

Im zweidimensionalen Fall gilt für stationäre Situationen:

\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \rho f_x

\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho f_y

Energieerhaltung

Für inkompressible, stationäre Fluide gilt im zweidimensionalen Fall in kartesischen Koordinaten:

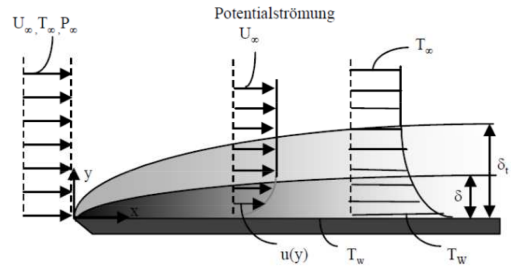
\rho \cdot c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \cdot \Phi + \dot{q}_{Quellen}'''

\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)

Laminare Grenzschicht an ebener Wand

Betrachtet wird das Problem der laminaren Grenzschicht an einer ebenen Wand. Die Grenzschichten werden wie folgt definiert:

u(y = \delta) = 0.99 \cdot u_{\infty} \quad T(y = \delta_T) = 0.99 \cdot T_{\infty}



Mittlerer Wärmeübergangskoeffizient

Um den mittleren Wärmeübergangskoeffizient zu berechnen, kann folgender Ablauf befolgt werden:

- 1. **Reynolds-Zahl berechnen** $Re_x = \frac{u \cdot x}{\nu}$
- 2. **\bar{\alpha} berechnen**
 - if Nu_L gegeben:
 - i $\bar{\alpha} = \frac{Nu_L \lambda}{L}$
 - if Nu_x gegeben:
 - i if $Re < Re_{krit}$ (laminar)
 - $Nu_x \propto Re_x^{\frac{1}{2}} \propto x^{\frac{1}{2}} \rightarrow Nu_L = 2 \cdot Nu_x|_{x=L}$
 - ii if $Re > Re_{krit}$ (turbulent)
 - $Nu_x \propto Re_x^{\frac{4}{5}} \propto x^{\frac{4}{5}} \rightarrow Nu_L = \frac{5}{4} \cdot Nu_x|_{x=L}$
 - iii unabhängig von der Reynolds-Zahl gilt immer:
 - $\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{Nu_x \lambda}{x} \, dx$

Infinitesimale Energieerhaltung

Das Prinzip der Energieerhaltung heisst: Die zeitliche Änderung der inneren Energie im Kontrollvolumen ergibt sich aus der Differenz zwischen zu- und wegfließendem Energiestrom und aus der innerhalb des Kontrollvolumens aufgrund von Quellen produzierten Wärme. Somit gilt:

\frac{\partial E}{\partial t} = \sum_i \dot{Q}_i - \sum_j \dot{Q}_j + \dot{q}_{Quellen}''' \cdot dx \cdot dy \cdot dz

Dabei sind i = x, y, z und j = x + dx, y + dy, z + dz. Für die Energie gilt:

\frac{\partial E}{\partial t} = \rho \cdot c \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial t}