ing
elektrotechnik

Manfred Albach

Elektrotechnik

PEARSON
Studium

Elektrotechnik

Manfred Albach

Elektrotechnik

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über *http://dnb.d-nb.de* abrufbar.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

13 12 11

ISBN 978-3-86894-081-7

ein Imprint der Pearson Education Deutschland GmbH,
Martin-Kollar-Straße 10-12, D-81829 München/Germany

www.pearson-studium.de
Programmleitung: Birger Peil, bpeil@pearson.de
Korrektorat: Brigitta Keul
Einbandgestaltung: Thomas Arlt, tarlt@adesso21.net
Herstellung: Philipp Burkart, pburkart@pearson.de
Satz: mediaService, Siegen (www.media-service.tv)
Druck und Verarbeitung: Drukarnia Dimograf

Printed in the Republic of Poland

Inhaltsübersicht

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Aufgabe der Elektrotechnik besteht in der technischen Nutzbarmachung der aus der Physik gewonnenen Erkenntnisse über die elektromagnetischen Erscheinungen und deren Gesetzmäßigkeiten. Von dem in diesem Arbeitsumfeld tätigen Ingenieur wird unabhängig von der speziellen Studienrichtung, z.B. Informations- und Kommunikationstechnik, Mikroelektronik, Leistungselektronik, Automatisierungstechnik oder auch Energie- und Antriebstechnik, ein fundamentales Verständnis der grundlegenden Zusammenhänge erwartet. Selbst in der Mechatronik und im Maschinenbau ist dieses Grundwissen unerlässlich.

Didaktische Besonderheiten

Die vielfältigen Erscheinungen des Elektromagnetismus stellen die Studierenden zunächst vor erhebliche Probleme. Während die Gesetze der Mechanik oft sehr anschaulich sind und viele Begriffe aus dem alltäglichen Bereich zur Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge verwendet werden, ist die Situation bei den elektrischen und magnetischen Vorgängen völlig anders. Zur mathematischen Formulierung der physikalischen Beobachtungen werden neue Begriffe wie z.B. der Begriff des *elektromagnetischen Feldes* oder der Begriff des *Dipols* eingeführt, für die es keine Entsprechung aus dem Erfahrungsschatz des Alltags gibt. Der Überwindung dieser Anfangsschwierigkeiten wird besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

Das vorliegende Lehrbuch stellt das notwendige Fachwissen in einer leicht verständlichen und klar strukturierten Form zusammen. Es richtet sich an Studenten der eingangs genannten Fachrichtungen an Fachhochschulen und Universitäten und basiert auf den Erfahrungen einer mehrjährig durchgeführten Vorlesung an der Universität Erlangen-Nürnberg.

Das Lehrwerk ist so aufgebaut, dass es auch zum autodidaktischen Lernen geeignet ist. Aus der Mathematik der gymnasialen Oberstufe sollte die Differential- und Integralrechnung bekannt sein. Die Vektorrechnung und die grundlegenden Koordinatensysteme werden im Anhang ausführlich behandelt. Die bei den Feldberechnungen immer wiederkehrenden Begriffe eines Linienintegrals und eines Hüllflächenintegrals werden ebenfalls im Anhang an zwei einfachen Beispielen auf anschauliche Weise erläutert.

Um die Vorgehensweise bei der Berechnung von Netzwerken möglichst übersichtlich zu gestalten, sind die etwas längeren mathematischen Betrachtungen in den Anhang verlagert. Das betrifft einerseits die Beweise der bei der Inversion von Ortskurven geltenden Gesetzmäßigkeiten und andererseits die Konvergenzbetrachtungen bei der Fourier-Entwicklung.

Die wichtigsten Erkenntnisse aus den einzelnen Abschnitten sind als Zusammenfassungen und Merksätze besonders hervorgehoben. Durch Referenzen in den Formeln auf vorhergehende Gleichungen wird das Nachvollziehen der Ableitungen wesentlich erleichtert. Ausgewählte Beispiele, die zu einem tieferen Verständnis der Zusammenhänge beitragen, sind im Text integriert.

Inhaltlicher Aufbau

Das vorliegende Buch beinhaltet die bisher als Einzelbände erschienenen Bücher *Grundlagen der Elektrotechnik 1 (Erfahrungssätze, Bauelemente, Gleichstromschaltungen)* und *Grundlagen der Elektrotechnik 2 (Periodische und nicht periodische Signalformen)*.

Den Einstieg in die einzelnen Kapitel des ersten Teils bilden die aus Experimenten abgeleiteten und in die Sprache der Mathematik übertragenen *Erfahrungssätze*. Aufbauend auf den grundlegenden physikalischen Zusammenhängen werden die Eigenschaften der einfachen elektrischen Bauelemente und deren Verhalten in Gleichspannungsnetzwerken dargestellt. An einfachen Anordnungen wird gezeigt, wie aus den im Allgemeinen dreidimensionalen Feldverteilungen die integralen Größen Spannung, Strom, Widerstand, Kapazität und Induktivität abgeleitet werden können, mit deren Hilfe die ursprüngliche Feldbeschreibung auf eine einfache (summarische) Berechnung mit skalaren Größen zurückgeführt werden kann.

Mithilfe der Begriffe *elektrischer* und *magnetischer Dipol* werden die beobachtbaren Phänomene in der Materie am mikroskopischen Verhalten der Atome und Moleküle auf einfache Weise veranschaulicht. Gleichzeitig aber erlaubt die makroskopische Betrachtungsweise, d. h. die Mitteilung über das Verhalten einer sehr großen Anzahl von Atomen, die Erfassung der speziellen Materialeigenschaften durch einfache skalare Größen.

Im 1. Kapitel wird ausgehend von den im **Coulomb'schen Gesetz** beschriebenen Kraftwirkungen zwischen ruhenden Ladungsverteilungen, die auch ohne das Vorhandensein eines Übertragungsmediums im Vakuum beobachtbar sind, der Begriff des *elektrischen Feldes* eingeführt. Dieser bildet die Basis zur Einführung der Begriffe *elektrostatisches Potential*, *Spannung* und *elektrische Flussdichte*. Ein zentrales Thema in diesem Kapitel ist der *Kondensator* mit seiner als *Kapazität* bezeichneten Eigenschaft, elektrische Energie speichern zu können.

Im 2. Kapitel ist die Ladungsträgerbewegung im Leiter Ausgangspunkt für das **Ohm'sche Gesetz**. Wir lernen die Begriffe *Stromdichte* und *Widerstand* kennen. Die Zusammenschaltung von Widerständen in Gleichstromnetzwerken wird **im 3. Kapitel** ausführlich behandelt. **Das 4. Kapitel** beschreibt die unterschiedlichen Stromleitungsmechanismen im Vakuum, in Gasen, in Flüssigkeiten und in Halbleitern.

Die Kraftwirkung zwischen den zeitlich konstanten Strömen führt **im 5. Kapitel** zu dem Begriff des *magnetischen Feldes*. Das **Oersted'sche Gesetz** (Durchflutungsgesetz) stellt einen Zusammenhang her zwischen der magnetischen Feldstärke und dem die Feldstärke verursachenden Strom. Wichtige Themen in diesem Kapitel sind die Analogie zwischen elektrischem und magnetischem Kreis sowie die *Spule* und ihre als *Induktivität* bezeichnete Eigenschaft, magnetische Energie zu speichern.

Im 6. Kapitel lernen wir die Ruheinduktion und die Bewegungsinduktion kennen, deren mathematische Formulierung durch das **Faraday'sche Induktionsgesetz** die Beschreibung der Vorgänge im zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Feld erlaubt. Ein Beispiel ist seine Anwendung bei der Umwandlung von Bewegungsenergie und elektrischer Energie in Generatoren und Motoren. Als weitere Bauelemente lernen wir hier die *Transformatoren* und *Übertrager* kennen.

Im zweiten Teil werden lineare Netzwerke mit beliebigen, zeitabhängigen Strom- und Spannungsverläufen analysiert. Wegen der unterschiedlichen Vorgehensweisen bei der Berechnung werden zeitlich periodische Vorgänge und Schaltvorgänge getrennt behandelt.

Nach einer kurzen Betrachtung über die Zulässigkeit der Verfahren zur Berechnung von Netzwerken bei zeitlich veränderlichen Vorgängen **im 7. Kapitel** werden die aus technischer Sicht wichtigen Netzwerke mit zeitlich sinusförmigen Strom- und Spannungsverläufen **im 8. Kapitel** ausführlich behandelt. Die Netzwerkanalyse mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung basiert auf einer Transformation der Netzwerke aus dem Zeitbereich in einen Bildbereich (komplexe Ebene), in dem das entstehende komplexe, algebraische Gleichungssystem auf einfache Weise gelöst werden kann. Die Rücktransformation in den Zeitbereich ist anschließend mit elementaren Rechnungen durchführbar.

Netzwerke mit periodischen, aber nicht mehr sinusförmigen Größen treten z.B. auf, wenn die Quelle eine Rechteckspannung liefert oder wenn in einem Netzwerk mit einer Gleichspannungsquelle ein Schalter periodisch geöffnet und geschlossen wird. Mithilfe der Fourier-Entwicklung können diese zeitlich periodischen Vorgänge als Überlagerung von einem Gleichanteil mit einer gegebenenfalls unendlichen Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen dargestellt werden. Die Zerlegung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe und die Analyse des Netzwerks für diesen Fall werden **im 9. Kapitel** behandelt.

Ausgleichsvorgänge entstehen insbesondere im Zusammenhang mit einmaligen Schaltvorgängen, wenn z.B. eine Spannungsquelle erstmalig mit einem Netzwerk verbunden wird oder wenn eine im Netzwerk eingebaute Sicherung ausgelöst wird und einen Stromkreis unterbricht. Einfache Beispiele werden **im 10. Kapitel** berechnet, indem die auftretenden Differentialgleichungen mit elementaren Verfahren gelöst werden.

Im 11. Kapitel wird zunächst gezeigt, dass einmalige Vorgänge als Sonderfall eines periodischen Vorganges mit unendlich langer Periodendauer aufgefasst werden können. Die Fourier-Reihe in Kapitel 9 geht für diesen Sonderfall in das Fourier-Integral über. Die Konvergenzprobleme im Zusammenhang mit dem Fourier-Integral lassen sich durch Einführung einer komplexen Frequenz vermeiden. Durch diese Verallgemeinerung geht das Fourier-Integral in das Laplace-Integral über, mit dessen Hilfe Netzwerke mit zeitlich beliebigen Verläufen der Quellenströme und -spannungen mit begrenztem Aufwand analysiert werden können.

Der Anhang enthält neben einer kleinen mathematischen Formelsammlung zu den Koordinatensystemen und einigen bei der Fourier-Entwicklung häufig auftretenden Integralen auch eine Tabelle zu den Fourier-Reihen. Die bei der Laplace-Transformation benötigten Korrespondenzen für den Übergang zwischen Zeit- und Bildbereich sind im Anhang ebenfalls tabellarisch zusammengestellt.

Handhabung des Buches

Dozent Der vorliegende Band enthält das Lehrmaterial für die vierstündige Vorlesung „Grundlagen der Elektrotechnik I", in der die Kapitel 1 bis 8 behandelt werden. Die folgenden Kapitel sind Vorlesungsstoff in den anschließenden Semestern. Die in einer zusätzlichen zweistündigen Übung behandelten Aufgaben stehen komplett mit Lösungen im Downloadbereich bei der entsprechenden Vorlesung auf der Lehrstuhl-Homepage zur Verfügung. Die im Buch verwendeten Abbildungen sind zum Einsatz in eigenen Vorlesungen auf der Companion Website verfügbar.

Student Jedes Kapitel beginnt mit einer kurzen themenbezogenen Einleitung und mit einer Liste der zu erreichenden Lernziele. Am Ende der Kapitel werden die Kernaussagen und die wichtigsten Gedankengänge noch einmal in einer Übersicht zusammengestellt.

CWS

Zur Vertiefung des Stoffes und zur Vorbereitung auf die Klausur endet jedes Kapitel mit einer kleinen Aufgabensammlung. Es wird dringend empfohlen, diese Aufgaben weitestgehend eigenständig zu lösen. Die Lösungen finden Sie unter www.pearson-studium.de.

Eine umfangreiche Sammlung von Klausuraufgaben und Übungsbeispielen zusammen mit einer ausführlichen Beschreibung des Lösungswegs wird als Übungsbuch Elektrotechnik, ISBN: 978-3-8689-4070-1 erscheinen. In diesem Buch sind auch die ausführlichen Lösungen der am Ende der jeweiligen Kapitel zusammengestellten Aufgaben enthalten.

Ohne Hilfe geht es nicht

Herrn Birger Peil vom Pearson-Verlag sei an dieser Stelle für die gute Zusammenarbeit gedankt.

Hinweise auf eventuelle Fehler und Verbesserungsvorschläge werden jederzeit dankbar entgegengenommen (*M.Albach@emf.eei.uni-erlangen.de*).

Ein Buch zu den Grundlagen der Elektrotechnik stellt eine besondere Herausforderung dar, einerseits soll ein solides Fundament für das weitere Studium gelegt werden, andererseits darf die Vielfalt an neuen Problemstellungen und zugehörigen Lösungsverfahren nicht als Abschreckung empfunden werden. Der Autor hofft, dass dieser Kompromiss mit dem vorliegenden Buch gelungen ist.

I

Erfahrungssätze, Bauelemente, Gleichstromschaltungen

Das elektrostatische Feld

1

ÜBERBLICK

Einführung

» In diesem Kapitel werden wir uns zunächst mit dem Begriff der elektrischen Ladung beschäftigen. Die Existenz solcher Ladungen ist die Ursache für alle elektromagnetischen Erscheinungen. Wer kennt nicht das Zucken im Finger beim Anfassen eines Geländers, nachdem man über einen Teppich gelaufen ist, oder die spektakulären Vorführungen, bei denen eine Person unbeschadet einen Metallkäfig verlässt, in den ein Blitz eingeschlagen hat.

Zur Beschreibung solcher Phänomene werden wir den Begriff des Feldes, in diesem speziellen Kapitel den Begriff des elektrostatischen Feldes einführen. Anordnungen mit ruhenden Ladungen bieten den leichtesten Einstieg in die mathematische Behandlung von Feldberechnungen. Obwohl die Feldtheorie und die ihr zugrunde liegenden Maxwell'schen Gleichungen das zentrale Fundament für die Elektrotechnik bilden, werden wir in diesen Grundlagenbüchern nur die Konzepte kennen lernen und uns auf einfachste Anordnungen beschränken.

Ausgangspunkt für dieses Kapitel ist das Coulomb'sche Gesetz, das die Kraftwirkung zwischen ruhenden Ladungen beschreibt. Als einen der wichtigsten Begriffe werden wir die Kapazität kennen lernen, eine aus der Feldverteilung abgeleitete integrale Größe, die die Fähigkeit einer Anordnung beschreibt, elektrische Energie zu speichern. Erst mit diesen Begriffen, später kommen noch Widerstand und Induktivität hinzu, sind wir gut gerüstet, reale Bauelemente durch mehr oder weniger komplizierte Modelle zu ersetzen und damit Schaltungen aufzubauen, zu analysieren und auch die Grenzen bei der Schaltungsanalyse mit vereinfachten Modellen zu verstehen. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- mithilfe des Coulomb'schen Gesetzes Kräfte auf Ladungen zu berechnen,
- das elektrostatische Feld für einfache Ladungsanordnungen zu berechnen,
- die zugehörigen Äquipotentialflächen und Feldlinien darzustellen,
- die elektrische Spannung aus den Feldgrößen zu bestimmen,
- das Verhalten der Feldgrößen an Sprungstellen der Materialeigenschaften zu bestimmen,
- die Kapazität von einfachen Leiteranordnungen zu berechnen,
- die Zusammenschaltung von Kondensatoren zu vereinfachen sowie
- die im elektrostatischen Feld gespeicherte Energie zu berechnen.

1.1 Die elektrische Ladung

Zum Einstieg in dieses Kapitel betrachten wir ein kleines Experiment. Werden zwei Glasstäbe mit einem Wolltuch gerieben, dann kann man feststellen, dass sich die beiden Stäbe gegenseitig abstoßen. Wird das gleiche Experiment mit zwei Kunststoffstäben wiederholt, dann bleibt das Ergebnis gleich, auch diese beiden Stäbe stoßen sich gegenseitig ab. Im Gegensatz dazu ziehen sich ein Glas- und ein Kunststoffstab gegenseitig an. Diese mit den Gesetzen der Mechanik nicht zu erklärende Erscheinung führt man auf Ladungen zurück. Da sowohl Anziehung als auch Abstoßung auftritt, müssen zwei verschiedene Arten von Ladungen existieren. Man unterscheidet daher positive und negative Ladungen.

Die den beobachteten Kraftwirkungen zugrunde gelegte Modellvorstellung ist in ▶Abb. 1.1 dargestellt. Nach diesem vereinfachten Atommodell von Niels Bohr (1885 – 1962) bestehen Atome aus Kernen, die Protonen (positive Ladungsträger) und Neutronen enthalten, sowie aus Elektronen (negative Ladungsträger), die den Kern auf bestimmten Bahnen umkreisen. Mehrere Bahnen bilden zusammen eine Schale. Auf jeder Schale können sich nur eine begrenzte Anzahl von Elektronen aufhalten. Die Summe aller den Kern umkreisenden Elektronen bezeichnet man als Elektronenhülle. Der Atomkern besitzt einen Durchmesser in der Größenordnung von 10^{-14} m, während der Durchmesser der Elektronenumlaufbahnen etwa um den Faktor 10 000 größer ist. (Die Abmessungsverhältnisse in der Abb. 1.1 sind nicht maßstabsgerecht.)

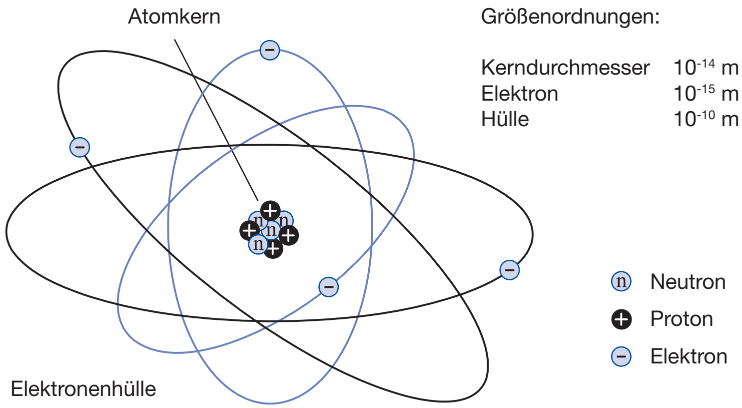


Abbildung 1.1: Bohr'sches Atommodell

Die kleinste, d.h. nicht weiter unterteilbare, Ladungsmenge heißt **Elementarladung** e. Ihr experimentell bestimmter Wert beträgt $e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ As. Da die Ladung der Protonen ($+e$) entgegengesetzt gleich groß ist zur Ladung der Elektronen ($-e$) und da die Anzahl der Protonen und Elektronen in den Atomen gleich groß ist, verhalten sich Atome nach außen elektrisch neutral. Die Anzahl der Protonen bzw. Elektronen in einem Atom wird als **Ordnungszahl** bezeichnet, sie beträgt bei Wasserstoff 1 und bei dem in der Elektrotechnik als Leitermaterial verwendeten Kupfer 29. Der Wert von e

ist konstant, er ist insbesondere unabhängig vom Bewegungszustand (Geschwindigkeit) des Teilchens. Im Gegensatz dazu ist die Teilchenmasse abhängig von der Geschwindigkeit.

Bei dem eingangs beschriebenen Experiment werden keine Ladungen *erzeugt*, sondern die positiven und negativen Ladungen getrennt. Von den Atomen des Glasstabs bleiben einige Elektronen am Wolltuch hängen, so dass die positive Gesamtladung des Glasstabs einem **Elektronenmangel** entspricht, während beim Reiben des Kunststoffstabs einige Elektronen vom Wolltuch an dem Stab hängen bleiben, so dass die negative Gesamtladung des Kunststoffstabs einem **Elektronenüberschuss** entspricht. Erst dadurch entstehen die nach außen hin wirksamen Kräfte.

Die im Kern enthaltenen Protonen und Neutronen werden als Nukleonen bezeichnet. Da die Masse der Nukleonen etwa um den Faktor 1836 größer ist als die Masse der Elektronen, bestimmt die Summe der in einem Atom vorhandenen Nukleonen im Wesentlichen dessen Masse. Trotz der gegenseitigen Abstoßung der Protonen werden die Kerne zusammengehalten. Die Ursache für diese Kernbindung ist die als starke Wechselwirkung bezeichnete Kraft zwischen den Nukleonen.

Fassen wir die wesentlichen Aussagen noch einmal zusammen:

Merke

- Ladungen sind stets ein Vielfaches der Elementarladung.
- In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Ladungen stets konstant. Diese Aussage gilt unabhängig von dem Bewegungszustand des Beobachters.
- Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich gegenseitig ab, Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens ziehen sich gegenseitig an.

1.2 Das Coulomb'sche Gesetz

Durch Messung hat Charles Augustin de Coulomb (1736 – 1806) festgestellt, dass die Kraft F zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2 betragsmäßig proportional zu jeder der beiden Ladungen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r zwischen den Ladungen ist. Mit der Proportionalitätskonstante $1/(4\pi\varepsilon_0)$ folgt daraus die Beziehung

$$F \sim \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \qquad \to \qquad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \,. \tag{1.1}$$

Der Faktor ε_0 wird als **elektrische Feldkonstante** (Dielektrizitätskonstante des Vakuums) bezeichnet. Durch die Festlegung der Basiseinheit 1A (vgl. Kap. 5.4) ist ε_0 nicht mehr frei wählbar. Messungen ergeben einen auf vier Stellen gerundeten Wert von $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

Bei der Gleichung (1.1) wird angenommen, dass die geometrische Ausdehnung der einzelnen Ladungen sehr viel kleiner als der Abstand zwischen den Ladungen ist, daher spricht man hier von der Kraft zwischen **Punktladungen**. In dieser Gleichung kommt noch nicht die Richtung der Kraft zum Ausdruck. Mit der Festlegung eines Einheitsvektors $\vec{\mathbf{e}}_r$, der gemäß ▶Abb. 1.2 in Richtung der Verbindungslinie von der Punktladung Q_1 zur Punktladung Q_2 zeigt, kann die Kraft auf die Ladung Q_2 als vektorielle Gleichung

$$\vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{1.2}$$

geschrieben werden. Haben beide Ladungen gleiche Vorzeichen, dann wird die Ladung Q_2 von der Ladung Q_1 abgestoßen, haben sie entgegengesetzte Vorzeichen, dann wirkt die Kraft in Richtung $-\vec{\mathbf{e}}_r$ und die Ladung Q_2 wird von Q_1 angezogen.

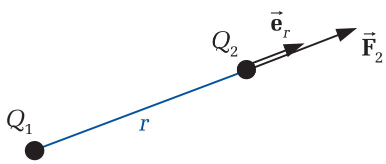


Abbildung 1.2: Zwei Punktladungen gleichen Vorzeichens

Die Unterscheidung der beiden Ladungsarten durch ein positives bzw. negatives Vorzeichen liefert im Zusammenhang mit dem in Gl. (1.2) auftretenden Produkt der Ladungen automatisch die mit den Experimenten übereinstimmende Richtung für den Kraftvektor.

1.3 Die elektrische Feldstärke

Das Coulomb'sche Gesetz (1.2) beschreibt offenbar eine für beliebige Abstände r geltende physikalische Wirkung, ohne dabei eine Aussage über den Raum zwischen den Ladungen zu machen. In diesem Zusammenhang sind zwei Fragen von Bedeutung:

1. Wie kann im Unterschied zur klassischen Mechanik ohne direkten Kontakt und ohne ein stoffliches Medium eine Kraft ausgeübt werden?

2. Ist es möglich, sofort, d.h. ohne Zeitverzug, eine Änderung der Kraftwirkung auf Q_2 wahrzunehmen, wenn Q_1 seine Position relativ zu Q_2 ändert?

Die Schwierigkeiten bei der Beantwortung dieser Fragen lassen sich umgehen mit der Annahme, dass durch die Anwesenheit einer Ladung der umgebende Raum selbst zum Träger physikalischer Eigenschaften wird. Um den Zustand des Raumes in die Beschreibung mit einzubeziehen, wird an dieser Stelle der Begriff des Feldes eingeführt. Unter dem Begriff **Feld** soll hier allgemein verstanden werden, dass jedem Punkt des Raumes zu einem bestimmten Zeitpunkt eindeutig eine oder auch mehrere physikalische Größen zugeordnet werden können und zwar unabhängig von der Wahl eines

Koordinatensystems. Diese Feldgrößen verknüpfen zusammen mit den Materialeigenschaften des Raumes die Ursache und Wirkung an demselben Raumpunkt und zum gleichen Zeitpunkt. Im vorliegenden Fall spricht man von einem **elektrischen Feld**, das sich durch die Kraftwirkung auf Ladungen bemerkbar macht. Ein anderes bekanntes Beispiel für ein Feld ist das Gravitationsfeld, das an den Kraftwirkungen auf Massen erkennbar wird.

Die erste Frage kann unter Zuhilfenahme mechanischer Vorgänge und Wirkungen nicht beantwortet werden. Die Kraft auf die Ladung Q_2 in Gl. (1.2) lässt sich aber mit dem hier eingeführten Feldbegriff darstellen als das Produkt aus dem Wert der Ladung selbst und einer mit $\vec{\mathbf{E}}$ bezeichneten vektoriellen Raumzustandsgröße

$$\vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \vec{\mathbf{E}}_1 Q_2 \qquad \text{mit} \qquad \vec{\mathbf{E}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_r \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,. \tag{1.3}$$

$\vec{\mathbf{E}}$ wird **elektrische Feldstärke** genannt und hat die Dimension V/m. Die Kraftwirkung (1.3) als Folge des von der *ruhenden* Ladung Q_1 hervorgerufenen *elektrostatischen* Feldes kann auch im Vakuum nachgewiesen werden und ist nicht an das Vorhandensein von Materie im Raum zwischen den Ladungen gebunden. Misst man die elektrische Feldstärke mit unterschiedlichen Probeladungen Q_2, dann liefert das Verhältnis aus dem Betrag der Kraft zum Wert der Probeladung immer den gleichen Betrag für die elektrische Feldstärke. Da die Feldstärke (1.3) unabhängig ist von der zu ihrem Nachweis notwendigen Probeladung, existiert das elektrostatische Feld als Raumzustand offenbar auch dann, wenn bei Abwesenheit der Probeladung keine Kräfte beobachtet werden.

Merke

Während sich die als *elektrische Feldstärke* bezeichnete vektorielle Raumzustandsgröße auf einen speziellen Raumpunkt bezieht, kennzeichnet man mit dem Begriff *elektrisches Feld* die Gesamtheit der Feldvektoren in allen Raumpunkten.

Die zweite Frage nach dem *zeitlichen Abstand* zwischen Positionsänderung der einen Ladung und daraus resultierender Änderung der Kraftwirkung auf die andere Ladung kann erst im Zusammenhang mit der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen beantwortet werden. An dieser Stelle soll lediglich darauf hingewiesen werden, dass die Wellenausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt und die Information über die Änderung des Raumzustands infolge der Bewegung von Q_1 um die benötigte Laufzeit der Welle für die Distanz r zwischen den Ladungen später bei Q_2 ankommt. Die Änderung der Kraftwirkung auf Q_2 wird sich entsprechend zeitversetzt bemerkbar machen. Diese Effekte spielen aber bei der Behandlung elektrostatischer Probleme keine Rolle.

Kehren wir noch einmal zu dem neu eingeführten Begriff der elektrischen Feldstärke zurück. Die Richtung von $\vec{\mathbf{E}}$ wird allgemein in Richtung der Kraft gezählt, die auf eine positive Ladung wirkt. Betrachten wir in diesem Zusammenhang die Gl. (1.3), dann zeigt die Kraft auf eine positive Ladung Q_2 infolge einer ebenfalls als positiv angenommenen Ladung Q_1 in Richtung des Einheitsvektors $\vec{\mathbf{e}}_r$, also radial von der Punktladung Q_1 nach außen. Die von der positiven Ladung Q_1 hervorgerufene Feldstärke zeigt damit definitionsgemäß ebenfalls radial nach außen. Die Ladung Q_2 reagiert aber nicht nur mit der auf sie ausgeübten Kraftwirkung infolge des von Q_1 hervorgerufenen Feldes, sondern sie erzeugt ihrerseits eine Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}_2$, die eine gleich große entgegengesetzt gerichtete Kraft $\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{E}}_2 Q_1 = -\vec{\mathbf{F}}_2$ auf die Punktladung Q_1 ausübt.

Zusammenfassend gilt:

Merke

- Eine positive Punktladung ruft im homogenen Raum der Dielektrizitätskonstanten ε_0 eine radial nach außen gerichtete elektrische Feldstärke hervor, die mit dem Quadrat des Abstandes von der Punktladung abnimmt. Bei einer negativen Punktladung zeigt der Feldstärkevektor zur Punktladung hin.
- Die Kraft auf eine positive Punktladung hat die gleiche Richtung wie die elektrische Feldstärke an der Stelle der Punktladung, bei einer negativen Punktladung zeigen Feldstärke und Kraft in entgegengesetzte Richtungen.
- Die elektrische Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$ beschreibt die **Wirkung** (Stärke) des elektrischen Feldes. Sie ist eine **Intensitätsgröße** und wird gemessen durch die auf Ladungen ausgeübte Kraftwirkung.

1.4 Überlagerung von Feldern

Befindet sich eine Punktladung Q_1 im Ursprung des Kugelkoordinatensystems, dann ruft sie die in Gl. (1.3) angegebene Feldstärke hervor. Der Vektor $\vec{\mathbf{e}}_r$ entspricht dann dem radialen Einheitsvektor $\vec{\mathbf{e}}_r$ des Kugelkoordinatensystems. Zur Verallgemeinerung sei der in ▶Abb. 1.3 dargestellte Fall betrachtet, bei dem sich die Punktladung an der **Quellpunktskoordinate** $\vec{\mathbf{r}}_Q$ befindet. Der **Aufpunkt** P (Beobachtungspunkt), an dem das Feld berechnet werden soll, befindet sich, bezogen auf den willkürlich gewählten Ursprung, an der **Aufpunktskoordinate** $\vec{\mathbf{r}}_P$. Bezeichnet man den vektoriellen Abstand von dem Quellpunkt Q zum Aufpunkt P mit $\vec{\mathbf{r}}$, dann ist die Richtung der Feldstärke im Aufpunkt P durch den Einheitsvektor $\vec{\mathbf{e}}_r = \vec{\mathbf{r}}/r$ gegeben.

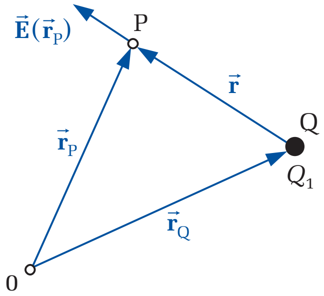


Abbildung 1.3: Punktladung Q_1 am Quellpunkt Q, Berechnung der Feldstärke im Aufpunkt P

Mithilfe der Gl. (1.3) erhält man unmittelbar die an dem Aufpunkt P, d.h. an der Stelle $\vec{\mathbf{r}}_P$, vorliegende Feldstärke

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}_P) = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \quad \text{und} \quad r = \left|\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q\right|. \tag{1.4}$$

Betrachten wir noch einmal die Abb. 1.2. Die Kraft auf die Ladung Q_2 ist nach Gl. (1.3) proportional zu der von der Ladung Q_1 am Ort von Q_2 hervorgerufenen Feldstärke. Sind noch weitere Ladungen vorhanden, dann erhält man die Gesamtkraft auf die Ladung Q_2 durch lineare Überlagerung der einzelnen Kräfte, d.h. auch die gesamte elektrische Feldstärke ergibt sich durch Überlagerung der von den einzelnen Ladungen hervorgerufenen Feldstärkebeiträge.

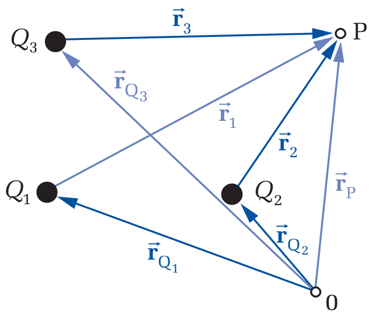


Abbildung 1.4: Das Feld mehrerer Punktladungen

Befinden sich beispielsweise drei Punktladungen Q_i mit $i = 1,2,3$ gemäß ▶Abb. 1.4 an den Stellen $\vec{\mathbf{r}}_{Q_i}$ im homogenen Raum der Dielektrizitätskonstanten ε_0 und sind die Abstände der einzelnen Punktladungen von dem Aufpunkt P durch die vektoriellen Entfernungen $\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_{Q_i}$ der Beträge $r_i = \left|\vec{\mathbf{r}}_i\right|$ gegeben, dann erhält man die gesamte Feldstärke im Aufpunkt P durch Summation der Beiträge aller drei Ladungen. Für eine beliebige Anzahl Ladungen $i = 1,2,...$ wird die Feldstärke durch Summation über alle Werte i berechnet

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}_P) \overset{(1.4)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1,2,..} Q_i \frac{\vec{\mathbf{r}}_i}{r_i^3} \quad \text{mit} \quad \vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_{Q_i} \quad \text{und} \quad r_i = \left|\vec{\mathbf{r}}_i\right|. \tag{1.5}$$

Merke

Die Gesamtfeldstärke einer aus mehreren Ladungen bestehenden Anordnung ergibt sich durch lineare Überlagerung der Beiträge der Einzelladungen.

Der Zusammenhang zwischen einer Ladungsverteilung und der elektrischen Feldstärkeverteilung ist eindeutig. Aus der bekannten Ladungsverteilung kann in jedem Punkt des Raumes die elektrische Feldstärke bestimmt werden, umgekehrt kann aus dem elektrischen Feld eindeutig auf die Ladungsanordnung zurückgerechnet werden.

Erweitern wir die Anordnung in Abb. 1.4 jetzt dahingehend, dass wir eine Punktladung Q_4 an die Stelle des Aufpunktes P bringen (▶Abb. 1.5a), dann erfährt diese Ladung eine Gesamtkraft

$$\vec{\mathbf{F}}_4 = Q_4\,\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}_\mathrm{P}) = Q_4\,\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{r}}_{Q_4}\right) \overset{(1.5)}{=} \frac{Q_4}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3} Q_i\,\frac{\vec{\mathbf{r}}_i}{r_i^{\,3}} = \frac{Q_4}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1\vec{\mathbf{r}}_1}{r_1^{\,3}} + \frac{Q_2\vec{\mathbf{r}}_2}{r_2^{\,3}} + \frac{Q_3\vec{\mathbf{r}}_3}{r_3^{\,3}}\right), \tag{1.6}$$

die aus dem Produkt der Ladung Q_4 mit der vektoriellen Raumzustandsgröße $\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{r}}_{Q_4}\right)$ an der Stelle von Q_4 infolge aller anderen Ladungen berechnet wird. Die Punktladung übt auf sich selber keine Kraft aus[1].

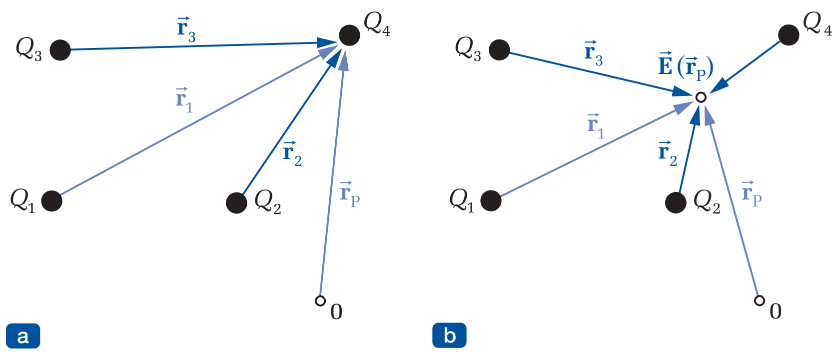


Abbildung 1.5: Kräfte im System mehrerer Punktladungen

Auf die gleiche Weise können auch die Kräfte auf die Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3 in der ▶Abb. 1.5b berechnet werden. Da alle zwischen jeweils zwei Punktladungen wirkenden Teilkräfte entgegengesetzt gleich groß sind, muss die vektorielle Summe aller Kräfte auf die vier dargestellten Punktladungen verschwinden. Diese Aussage lässt

1 Man beachte, dass zur Berechnung der Feldstärke in einem beliebigen Raumpunkt die Beiträge aller Punktladungen Q_1 bis Q_4 überlagert werden (Abb. 1.5b). Zur Berechnung der Kraft auf eine Punktladung wird aber der Feldstärkebeitrag derjenigen Ladung, auf die die Kraft berechnet werden soll, nicht mit einbezogen (Abb. 1.5a).

sich verallgemeinern. Besteht eine Ladungsanordnung aus mehreren Punktladungen Q_i mit $i = 1,2,\ldots$, dann verschwindet die vektorielle Summe der auf alle Ladungen wirkenden Kräfte

$$\vec{\mathbf{F}}_{ges} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{0}}\,. \tag{1.7}$$

1.5 Kräfte zwischen Ladungsverteilungen

Wir betrachten jetzt die in ▶Abb. 1.6 dargestellte Anordnung. In den beiden Körpern V_1 und V_2 befinden sich ortsfeste Ladungsverteilungen, z.B. Elektronen in V_1 und Elektronen und Protonen in V_2. Ortsfest soll dabei bedeuten, dass sich die Ladungsträger nicht frei innerhalb des Volumens bewegen können. Da jeder einzelne Ladungsträger Kräfte auf jeden anderen ausübt, wird die Situation sehr schnell unübersichtlich. In den meisten praktischen Fällen ist aber eine umfassende Berechnung aller Teilkräfte auf die einzelnen Elektronen und Protonen nicht erforderlich.

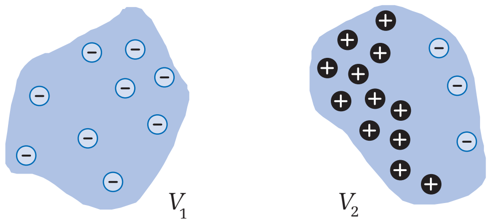


Abbildung 1.6: Mehrere zusammengehörige Ladungsverteilungen

Bei einer solchen Ladungsanordnung sind z.B. folgende Fragen von Interesse:

1. Welche Kräfte treten innerhalb eines Volumens infolge der Ladungsträger in diesem Volumen auf?

2. Welche Kräfte wirken zwischen den beiden Körpern V_1 und V_2?

Zur Beantwortung der ersten Frage für den Körper 1 muss die Summe der Kräfte auf die Elektronen in V_1 infolge aller anderen Elektronen im Volumen V_1 berechnet werden. Diese Frage stellt sich im Zusammenhang mit mechanischen Beanspruchungen des Materials. Aufgrund des größeren Abstands des zweiten Körpers kann dessen Beitrag zu den innerhalb von V_1 wirkenden Kräften in der Regel vernachlässigt werden. Die gleiche Frage stellt sich natürlich auch für das Volumen V_2.

Eine völlig andere Situation ergibt sich im Zusammenhang mit der zweiten Frage. Hier muss die Summe der Kräfte auf alle Elektronen in V_1 berechnet werden, die ausschließlich durch die Ladungsträger in V_2 hervorgerufen werden. Hintergrund der Frage ist die gegenseitige Anziehungskraft zwischen den beiden Körpern, aus der sich bei bekannter Masse der beiden Körper die jeweilige Beschleunigung bestimmen lässt.

Beispiel 1.1: Gedankenexperiment

In diesem Abschnitt wollen wir eine Situation betrachten, die sich in der Praxis nicht realisieren lässt. Um dennoch die gewünschten Aussagen zu erhalten und einen Einblick in bestimmte Zusammenhänge zu bekommen, führen wir dieses Experiment lediglich in Gedanken durch.

Wir entfernen aus 1 mm³ Kupfer alle Elektronen und bringen sie in einen Abstand $a = 10$ km von den Atomkernen (Protonen). Zu bestimmen ist die Anziehungskraft zwischen den beiden Ladungsverteilungen. Um das Ergebnis besser mit der Alltagserfahrung in Einklang zu bringen, soll die Masse eines Körpers bestimmt werden, der bei der Erdbeschleunigung $g = 9{,}81$ m/s² die gleiche Kraft erfährt.

Lösung:

Zunächst muss die Anzahl der Ladungsträger bestimmt werden. 1 mm³ Kupfer wiegt $8{,}96 \cdot 10^{-6}$ kg und enthält nach Gl. (D.3) $8{,}96 \cdot 10^{-6}$ kg/$1{,}055 \cdot 10^{-25}$ kg $= 8{,}5 \cdot 10^{19}$ Atome. Da jedes Kupferatom 29 Protonen und 29 Elektronen enthält, gilt für die Gesamtladungen

$$Q_p = -Q_e = 8{,}5 \cdot 10^{19}\,\text{Atome} \cdot 29\,\frac{\text{Protonen}}{\text{Atom}} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\frac{\text{As}}{\text{Proton}} = 395\,\text{As}\,. \tag{1.8}$$

Die Anziehungskraft zwischen den beiden Ladungsverteilungen kann mit Gl. (1.2) berechnet werden

$$F = \frac{Q_p{}^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{(395\,\text{As})^2\,\text{Vm}}{4\pi\, 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{As}}\frac{1}{(10\,\text{km})^2} = 14 \cdot 10^6\,\frac{\text{Ws}}{\text{m}} = 14 \cdot 10^6\,\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,. \tag{1.9}$$

Mit dem bekannten Kraftgesetz $F = mg$ aus der Mechanik erhält man als Ergebnis

$$m = 14 \cdot 10^6\,\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{9{,}81}\,\frac{\text{s}^2}{\text{m}} = 1{,}427 \cdot 10^6\,\text{kg} \tag{1.10}$$

den erstaunlichen Wert von 1 427 Tonnen! Wegen der Abhängigkeit der Kraft vom Quadrat des reziproken Abstands erhöht sich das Ergebnis um den Faktor 100, wenn der Abstand auf 1/10, d.h. auf 1 km reduziert wird.

Schlussfolgerung:

Aus der Tatsache, dass die in den alltäglichen Situationen auftretenden Kräfte um sehr viele Größenordnungen geringer sind, muss man den Schluss ziehen, dass gemessen an der Gesamtzahl vorhandener Ladungsträger prozentual immer nur eine extrem geringe Anzahl getrennt ist und zur elektrischen Feldstärke beiträgt.

1.6 Ladungsdichten

Bei vielen technischen Problemen werden metallische Leiter unterschiedlicher Abmessungen und Formen verwendet, auf denen freie Ladungen verteilt sein können. Da die atomaren Strukturen praktisch immer vernachlässigbar klein sind gegenüber den Leiterabmessungen, können wir die aus diskreten Ladungsträgern bestehenden Ladungsverteilungen als kontinuierlich, d.h. beliebig fein unterteilt, annehmen. In dieser *makroskopischen* Betrachtungsweise behandeln wir nur noch Ladungsdichten und vernachlässigen dabei ganz bewusst die Tatsache, dass diese im atomaren Bereich von Punkt zu Punkt sehr stark schwanken. Solange wir uns nicht mit Fragestellungen im atomaren Bereich beschäftigen, ist diese Vorgehensweise für die Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge ausreichend. Vergleichbar ist diese Situation mit der Definition der Dichte eines Körpers als Verhältnis von Masse zu Volumen. Auch hier vernachlässigt man die Tatsache, dass die Masse nicht homogen verteilt, sondern in den Atomkernen konzentriert ist.

Die Punktladung als idealisiertes Modell einer Ladungsverteilung in einem sehr kleinen Volumen, verglichen mit den sonstigen Abmessungen der betrachteten Anordnung, haben wir bereits kennen gelernt. Man kann sich aber auch leicht vorstellen, dass eine Gesamtladung Q, bestehend aus einer sehr großen Zahl einzelner Ladungsträger, kontinuierlich auf einem dünnen Stab (eindimensionale Verteilung), auf einer dünnen Folie (zweidimensionale Verteilung) oder in einem ausgedehnten dreidimensionalen Volumen verteilt ist. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einer **Linienladung**, einer **Flächenladung** und einer **Raumladung**. Dimensionsmäßig handelt es sich in allen genannten Fällen um Ladungsdichten. Wir wollen diese Begriffe im Folgenden konkretisieren und beginnen mit der Linienladung.

Ist eine Gesamtladung Q gleichmäßig auf einer Linie der Länge l verteilt, dann bezeichnet man den Quotienten $\lambda = Q/l$ als **Linienladungsdichte**. Diese hat die Dimension As/m. Sind die einzelnen Ladungsträger nicht mehr homogen verteilt, dann ist die Linienladungsdichte ortsabhängig. Befindet sich auf einem elementaren Abschnitt der Länge Δl die elementare Ladungsmenge ΔQ, dann beschreibt der Quotient $\lambda = \Delta Q/\Delta l$ die mittlere Linienladungsdichte auf dem betrachteten Abschnitt. Will man den Wert λ für einen bestimmten Punkt P auf der Linie angeben, dann muss man die elementare Länge Δl gegen Null gehen lassen und zwar so, dass sie den Punkt P jederzeit einschließt. Die Linienladungsdichte in dem betrachteten Punkt P lässt sich dann in der Form

$$\lambda(\mathrm{P}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l} \tag{1.11}$$

als Differentialquotient darstellen. Ist im umgekehrten Fall die ortsabhängige Linienladungsdichte für alle Punkte auf der Linie l bekannt, dann kann die Gesamtladung durch Integration

$$Q = \int_l \lambda \, \mathrm{d}l \tag{1.12}$$

über die gesamte Länge berechnet werden.

Die gleichmäßige Verteilung einer Gesamtladung Q auf einer Fläche A führt auf analoge Weise zu einer **Flächenladungsdichte** $\sigma = Q/A$ der Dimension $\mathrm{As/m^2}$. Für eine ortsabhängige Ladungsverteilung gibt das Verhältnis $\sigma = \Delta Q/\Delta A$ die mittlere Flächenladungsdichte auf dem betrachteten elementaren Flächenelement ΔA an. Im Grenzübergang $\Delta A \to 0$ erhält man wieder die Flächenladungsdichte in einem betrachteten Punkt aus dem Differentialquotienten

$$\sigma(\mathrm{P}) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A} \tag{1.13}$$

und die Gesamtladung einer mit einer ortsabhängigen Dichte verteilten Flächenladung σ berechnet man aus einer Integration über die ladungsbesetzte Fläche

$$Q = \iint_A \sigma \, \mathrm{d}A \,. \tag{1.14}$$

Zum Abschluss führen wir noch die **Raumladungsdichte** $\rho = Q/V$ der Dimension $\mathrm{As/m^3}$ ein, die im Falle einer homogenen Ladungsverteilung aus dem Verhältnis von Gesamtladung Q zu ladungsbesetztem Volumen V gegeben ist. Bei ortsabhängiger Ladungsverteilung beschreibt das Verhältnis $\rho = \Delta Q/\Delta V$ die mittlere Raumladungsdichte in dem betrachteten elementaren Volumenelement ΔV. Im Grenzübergang erhält man wieder die Raumladungsdichte in einem betrachteten Punkt P aus dem Differentialquotienten

$$\rho(\mathrm{P}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} \tag{1.15}$$

und die in einem Volumen V enthaltene Gesamtladung Q kann durch Integration über das ladungsbesetzte Volumen berechnet werden

$$Q = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}V \,. \tag{1.16}$$

1.7 Darstellung von Feldern

Zur grafischen Darstellung des Feldverlaufs verwendet man unterschiedliche Feldbilder. In diesem Abschnitt betrachten wir die Feldlinienbilder, in Kap. 1.8.2 die Äquipotentialflächen.

Als **Feldlinien** bezeichnet man Raumkurven, deren gerichtetes Wegelement immer in Richtung der Feldstärke zeigt. Der vektorielle Charakter des Feldverlaufs wird dadurch zum Ausdruck gebracht, dass die Feldlinien mit Pfeilen versehen werden, deren Spitzen in Richtung der Feldstärke zeigen. Aus der Darstellung in ▶Abb. 1.7 ist zu erkennen, dass die Richtung der Feldstärke an jeder Stelle entlang der Feldlinie durch die Tangente an die Feldlinie gegeben ist.

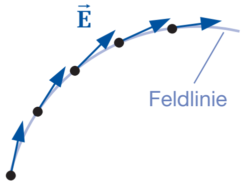


Abbildung 1.7: Konstruktion der Feldlinie

Die Dichte der in einem Feldlinienbild eingezeichneten Feldlinien kann in vielen Fällen so gewählt werden, dass sie ein Maß für den Betrag der Feldstärke darstellt. Die mit zunehmendem Abstand von einer Punktladung geringer werdende elektrische Feldstärke drückt sich in der ▶Abb. 1.8 z.B. dadurch aus, dass der Abstand zwischen den Feldlinien größer wird.

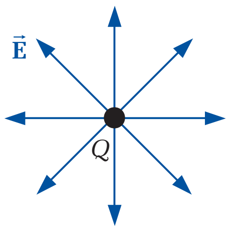


Abbildung 1.8: Feldlinienbild einer positiven Punktladung

Man muss sich jedoch immer darüber im Klaren sein, dass das gezeichnete Feldbild nur einen zweidimensionalen Schnitt durch eine dreidimensionale Feldverteilung darstellt. In der Abb. 1.8 liegen die Punktladung und damit zwangsläufig auch alle dargestellten Feldlinien in der Zeichenebene. Bei umfangreicheren, nicht mehr symmetrischen Ladungsverteilungen oder bei ungünstiger Wahl der Schnittebene wird die Darstellung des Feldlinienbildes schwieriger, da die Feldlinien einen beliebigen Winkel zur Zeichenebene aufweisen können.

Entsprechend der Einführung der elektrischen Feldstärke in Gl. (1.3) gehen die Feldlinien immer von den positiven Ladungen aus und enden auf den negativen. In vielen Fällen sind die Abstände zwischen den Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens sehr groß, z.B. können sich die negativen Ladungen sehr weit entfernt befinden, verglichen mit der räumlichen Verteilung der positiven Ladungen. Das Feldbild in unmittelbarer Umgebung der positiven Ladungen wird dann allein von diesen bestimmt. Zur Vereinfachung nimmt man in diesen Fällen an, dass sich die zugehörigen negativen Ladungen auf der **unendlich fernen Hülle** befinden, ihr Beitrag zur Feldstärke wird dann bei der Berechnung vernachlässigt. Einen derartigen Sonderfall stellt das von einer Punktladung hervorgerufene radialsymmetrische Feld in Abb. 1.8 dar, bei dem die elektrische Feldstärke radial nach außen zeigt und nur vom Abstand zur Punktladung abhängt.

Einen weiteren Sonderfall bildet das **homogene Feld**, bei dem die Feldstärke überall die gleiche Richtung und den gleichen Betrag aufweist. Ein derartiges Feld lässt sich nur näherungsweise und auch nur in einem begrenzten räumlichen Bereich realisieren (▶Abb. 1.20). Den allgemeinen Fall stellt das inhomogene (ortsabhängige) Feld dar.

1.7.1 Feldbild für zwei Punktladungen

Als Beispiel wollen wir in diesem Abschnitt das Feldlinienbild für zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 berechnen, die sich auf der y-Achse an den Stellen $\mathrm{y} = a$ und $\mathrm{y} = -a$ befinden. Zu bestimmen ist zunächst die elektrische Feldstärke in einem allgemeinen Punkt in der xy-Ebene (Zeichenebene).

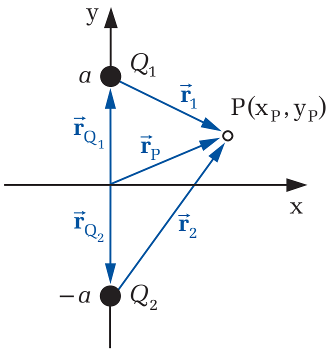


Abbildung 1.9: Zur Berechnung eines Feldlinienbildes

Zur Berechnung der Feldstärke mithilfe der Gl. (1.5) werden die Abstände der Ladungen vom Aufpunkt benötigt. Mit den Quellpunktskoordinaten $\vec{\mathbf{r}}_{Q_1} = \vec{\mathbf{e}}_y a$ und $\vec{\mathbf{r}}_{Q_2} = -\vec{\mathbf{e}}_y a$ sowie den Koordinaten des Aufpunkts $\vec{\mathbf{r}}_P = \vec{\mathbf{e}}_x x_P + \vec{\mathbf{e}}_y y_P$ erhält man die Abstände

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_{Q_1} = \vec{\mathbf{e}}_x x_P + \vec{\mathbf{e}}_y (y_P - a) \quad \text{mit} \quad r_1 = \sqrt{x_P^2 + (y_P - a)^2} \tag{1.17}$$

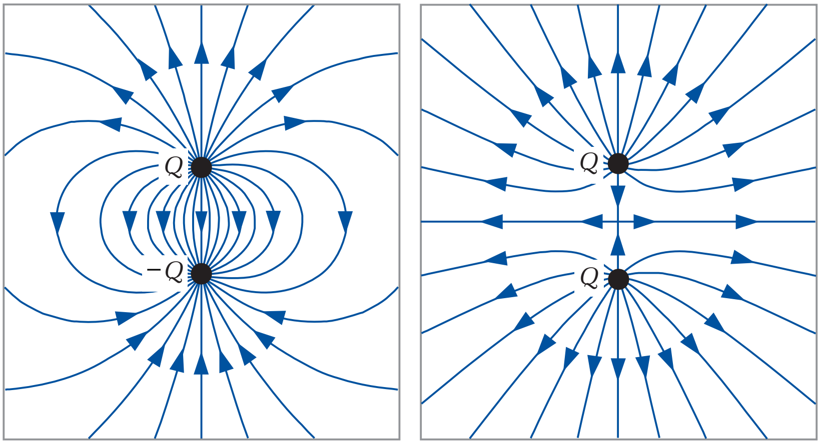
und

$$\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_{Q_2} = \vec{\mathbf{e}}_x x_P + \vec{\mathbf{e}}_y (y_P + a) \quad \text{mit} \quad r_2 = \sqrt{x_P^2 + (y_P + a)^2}\,. \tag{1.18}$$

Durch Einsetzen in die Beziehung (1.5) kann die elektrische Feldstärke unmittelbar angegeben werden

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}_P) &\overset{(1.5)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[Q_1 \frac{\vec{\mathbf{r}}_1}{r_1^3} + Q_2 \frac{\vec{\mathbf{r}}_2}{r_2^3}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\vec{\mathbf{e}}_x\left(Q_1 \frac{x_P}{r_1^3} + Q_2 \frac{x_P}{r_2^3}\right) + \vec{\mathbf{e}}_y\left(Q_1 \frac{y_P - a}{r_1^3} + Q_2 \frac{y_P + a}{r_2^3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Die Auswertung dieser Beziehung für die beiden Sonderfälle gleicher $Q_1 = Q_2 = Q$ bzw. entgegengesetzt gleicher Punktladungen $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$ ist in ▶Abb. 1.10 dargestellt.



a sich anziehende Ladungen b sich abstoßende Ladungen

Abbildung 1.10: Feldlinienbilder

Eine Besonderheit ergibt sich bei den Punktladungen gleichen Vorzeichens in Abb. 1.10b. Hier treffen die Feldlinien in der Mitte zwischen den beiden Ladungen scheinbar aufeinander und laufen dann in zwei dazu senkrechten Richtungen auseinander. Bringen wir nun eine weitere Punktladung genau an diese Position, dann kann die Kraft auf diese Punktladung nicht gleichzeitig in verschiedene Richtungen zeigen. Das bedeutet aber auch, dass die elektrische Feldstärke in diesem Punkt eine eindeutige Richtung haben muss, d.h. die elektrischen Feldlinien dürfen sich nicht schneiden. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich dadurch auf, dass die Feldstärke bei Annäherung an diesen Punkt immer kleiner wird und in dem Punkt selber verschwindet. Diese Aussage lässt sich leicht überprüfen. Für $Q_1 = Q_2 = Q$ erhält man im Ursprung $x_P = y_P = 0$ aus der Gl. (1.19) tatsächlich den Wert $\vec{\mathbf{E}}(0) = \vec{\mathbf{0}}$.

Merke

Eine nicht verschwindende elektrische Feldstärke besitzt immer eine eindeutige Richtung, d.h. die elektrischen Feldlinien können sich nicht schneiden.

1.7.2 Qualitative Darstellung von Feldbildern

In vielen Fällen lässt sich ein Feldbild bereits qualitativ angeben, auch ohne umfangreiche Rechnungen durchzuführen. Dabei können folgende Informationen verwendet werden:

- Das Feld in unmittelbarer Nähe einer Punktladung wird im Wesentlichen von der Punktladung bestimmt und hat den in Abb. 1.8 dargestellten radialsymmetrischen Verlauf.
- In sehr großem Abstand von einer Ladungsanordnung verhält sich das Feld wie bei einer im Ladungsschwerpunkt angebrachten Punktladung, die den gleichen Wert wie die Gesamtladung besitzt. Die Feldlinien zeigen bei positiver Gesamtladung radial nach außen (Abb. 1.10b).
- Bei verschwindender Gesamtladung müssen alle von den positiven Ladungen ausgehenden Feldlinien auf den negativen Ladungen enden. Es verlaufen keine Feldlinien zur unendlich fernen Hülle (Abb. 1.10a). Die einzige Ausnahme bildet hier die Feldlinie auf der Verbindungslinie zwischen den beiden Punktladungen, d.h. auf der y-Achse.
- Oftmals lassen sich Symmetrieebenen finden, auf denen die Feldrichtung angegeben werden kann. In den beiden Feldbildern der Abb. 1.10 betrifft das sowohl die durch beide Punktladungen verlaufende vertikale Verbindungslinie als auch die horizontale Ebene zwischen den Ladungen.

1.8 Das elektrostatische Potential

Wir haben bereits gesehen, dass auf eine Punktladung Q in einem äußeren, d.h. von anderen Ladungen hervorgerufenen, elektrischen Feld eine Kraft ausgeübt wird. Soll diese Ladung von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 verschoben werden, dann muss *gegen* die Feldkräfte eine Arbeit aufgewendet werden. Mit der Beziehung (1.3) für die Kraft $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{E}}Q$ erhält man aus dem Linienintegral (C.7) die erforderliche Arbeit

$$W_e = -\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -Q \int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}_1} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \,. \tag{1.20}$$

An dieser Stelle wollen wir kurz innehalten und die Frage nach dem richtigen Vorzeichen in Gl. (1.20) untersuchen. Stellen wir uns vor, dass wir eine positive Ladung Q im Feld einer zweiten, ebenfalls positiven Ladung bewegen und zwar so, dass der Abstand zwischen beiden Ladungen verringert werden soll (die ausführliche Rechnung folgt in Kapitel 1.8.1). Das vektorielle Wegelement $d\vec{\mathbf{s}}$ zeigt wegen der Annäherung in Richtung auf die zweite Ladung. Die von der zweiten (positiven) Ladung hervorgerufene Feldstärke zeigt aber von dieser Ladung weg, d.h. das Integral über das Skalarprodukt $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ liefert einen negativen Wert. Mit dem bereits in Gl. (1.20) vorhandenen negativen Vorzeichen nimmt W_e insgesamt einen positiven Wert an. Diese zu leistende

Arbeit beim Zusammenschieben zweier sich gegenseitig abstoßender Ladungen führt zu einer Erhöhung der im System gespeicherten Energie. Der Wert W_e in Gl. (1.20) beschreibt also die von außen dem System zugeführte Energie.

Betrachten wir nun den Sonderfall, dass eine Ladung Q entsprechend ▶Abb. 1.11 entlang eines geschlossenen Weges, beginnend beim Punkt P_0 entlang der Kontur C_1 zum Punkt P_1 und anschließend entlang der Kontur C_2 wieder zurück zum Punkt P_0 bewegt wird[2].

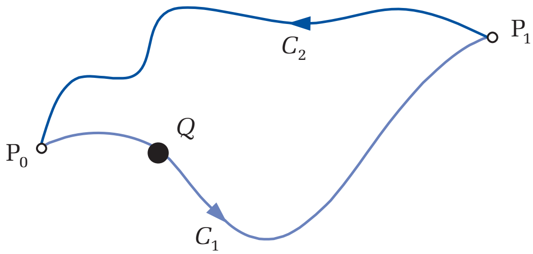


Abbildung 1.11: Bewegung einer Punktladung entlang eines geschlossenen Weges

Die dabei aufzuwendende Arbeit kann mit Gl. (1.20) durch die beiden Teilintegrale

$$W_e = -Q\int_{C_1}\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} - Q\int_{C_2}\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = -Q\int_{P_0}^{P_1}\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} - Q\int_{P_1}^{P_0}\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} \tag{1.21}$$

beschrieben werden. Da sich die Punktladung nach dem Umlauf an der gleichen Position befindet wie vorher, ist auch die Energie des Systems unverändert. Die insgesamt nach Gl. (1.21) geleistete Arbeit verschwindet daher, mit anderen Worten, das Linienintegral der elektrischen Feldstärke entlang der Kontur C_1 ist entgegengesetzt gleich dem Linienintegral der elektrischen Feldstärke entlang der Kontur C_2.

Kennzeichnet man den geschlossenen Integrationsweg durch einen Ring im Integralzeichen, wir sprechen dann von einem **Ringintegral** oder einem Umlaufintegral (vgl. Anhang C), dann erhält man für die Gl. (1.21) folgende mathematische Darstellung

$$W_e = -Q\int_{C_1}\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} - Q\int_{C_2}\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = -Q\oint_{C}\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0 \quad \to \quad \boxed{\oint_{C}\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0}\,. \tag{1.22}$$

Die geschlossene Kontur C in der letzten Gleichung setzt sich aus den beiden Konturen C_1 und C_2 zusammen.

2 Wir wollen hier voraussetzen, dass dieser Bewegungsvorgang hinreichend langsam erfolgt, so dass die Abstrahlung elektromagnetischer Felder vernachlässigt werden kann.

Merke

Im elektrostatischen Feld verschwindet das entlang einer geschlossenen Kontur gebildete Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke.

Diese Aussage trägt natürlich auch der Tatsache Rechnung, dass die elektrischen Feldlinien bei den positiven Ladungen beginnen und bei den negativen enden. Wären die elektrischen Feldlinien in sich geschlossen, z.B. in Form eines Kreises, dann würde die Berechnung des Integrals (1.22) entlang einer derart **geschlossenen Feldlinie** auf jedem elementaren Wegelement einen Beitrag mit jeweils gleichem Vorzeichen zu dem Gesamtergebnis liefern, das somit nicht mehr verschwinden könnte. Die Ladungen stellen die Quellen für das elektrostatische Feld dar. Dieses wird daher als **Quellenfeld** bezeichnet (im Gegensatz zu dem später noch zu behandelnden **Wirbelfeld**).

Auch das Gravitationsfeld ist ein Quellenfeld, wobei die Quellen in diesem Fall durch die Massen gegeben sind. Wird ein Körper der Masse m gegen die Kräfte eines Gravitationsfeldes von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 bewegt, dann ist dafür eine Arbeit aufzuwenden, die zu einer Erhöhung der *potentiellen* Energie des Körpers um den Betrag der geleisteten Arbeit führt. Ganz analog führt die Bewegung einer Ladung gegen die Kräfte des elektrischen Feldes zu einer Erhöhung der Energie dieser Ladung, die auch in diesem Fall gleich dem Betrag der geleisteten Arbeit ist. Man spricht auch hier von der **potentiellen Energie** der Ladung und beschreibt damit die Möglichkeit dieser Ladung, durch Abgabe ihrer potentiellen Energie Arbeit leisten zu können. Nach Gl. (1.20) ist der Zuwachs an potentieller Energie bei einer Bewegung der Ladung Q von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 gegeben durch das Produkt aus dem Wert der Ladung und dem negativen Wegintegral der elektrischen Feldstärke. Wir haben aber bereits in Abb. 1.11 gesehen, dass dieses Wegintegral nicht von dem Verlauf des gewählten Weges, sondern lediglich vom Anfangs- und Endpunkt abhängt. Wählt man jeweils ausgehend von dem gleichen Anfangspunkt P_0 unterschiedliche Endpunkte für den Integrationsweg, dann unterscheiden sich die Ergebnisse bei der Berechnung der potentiellen Energie nach Gl. (1.20) nur durch den Wert einer skalaren Größe. Damit kann jeder Punkt des Raumes, bezogen auf einen willkürlichen Anfangspunkt (Bezugswert) durch eine skalare Größe charakterisiert werden, für die die Bezeichnung φ_e verwendet und die **elektrostatisches Potential** (Dimension V) genannt wird

$$W_e \overset{(1.20)}{=} Q\left[\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}_1}\left(-\vec{\mathbf{E}}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}\right] = Q\left[\varphi_e(\mathrm{P}_1)-\varphi_e(\mathrm{P}_0)\right]. \tag{1.23}$$

Der Zuwachs an potentieller Energie ist proportional zur Größe der bewegten Ladung Q und zur Potentialdifferenz $\varphi_e(\mathrm{P}_1) - \varphi_e(\mathrm{P}_0)$, die bei der Ladungsbewegung durchlaufen wird. Da in dieser Beziehung nicht das Potential selbst, sondern lediglich die Änderung des Potentials zwischen Anfangs- und Endpunkt von Bedeutung ist, kann dem gesamten Raum ein beliebiges konstantes Potential überlagert werden, ohne dass das Ergebnis (1.23) davon beeinflusst wird. Die Festlegung eines Bezugspunktes ist willkürlich und wird üblicherweise so vorgenommen, dass man der Erde oder auch der unendlich fernen Hülle das Bezugspotential $\varphi_e = 0$ zuordnet. Die Erdoberfläche stellt aufgrund ihrer Leitfähigkeit eine Äquipotentialfläche dar (vgl. Kap. 1.8.2). In Schaltungen wird üblicherweise der so genannten *Masse*, d.h. dem Minusanschluss bei einer Batterie oder dem an die Schaltung angeschlossenen metallischen Gehäuse der Bezugswert $\varphi_e = 0$ zugeordnet[3].

Legt man insbesondere den Anfangspunkt P_0 so, dass $\varphi_e(\mathrm{P}_0) = 0$ gilt, dann ist die absolute potentielle Energie einer Punktladung im Punkt P_1 durch die Beziehung

$$W_e(\mathrm{P}_1) \overset{(1.23)}{=} Q\left[\varphi_e(\mathrm{P}_1) - \underbrace{\varphi_e(\mathrm{P}_0)}_{0}\right] = Q\,\varphi_e(\mathrm{P}_1) \tag{1.24}$$

gegeben, umgekehrt lässt sich das absolute Potential in diesem Punkt aus der Beziehung

$$\varphi_e(\mathrm{P}_1) = \frac{W_e(\mathrm{P}_1)}{Q} \overset{(1.23)}{=} -\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}_1} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \tag{1.25}$$

berechnen.

Merke

Das elektrostatische Potential $\varphi_e(\mathrm{P})$ an der Stelle eines Punktes P ist der Quotient aus der Arbeit, die nötig ist, um eine Ladung Q von einem Punkt P_0 mit dem Bezugspotential $\varphi_e(\mathrm{P}_0) = 0$ zu dem betrachteten Punkt P zu bringen, und der Ladung.

1.8.1 Das Potential einer Punktladung

Als Beispiel wollen wir das von einer im Ursprung des Kugelkoordinatensystems befindlichen positiven Punktladung Q in einem beliebigen Punkt P hervorgerufene Potential berechnen. Die radial gerichtete Feldstärke (Abb. 1.8) ist nach Gl. (1.3) gege-

3 Die beschriebene Situation ist vergleichbar der Festlegung von Höhenangaben auf der Erde. Die Aussage, dass sich ein beliebiger Punkt auf der Erdoberfläche auf einer bestimmten Höhe befindet, ist nur sinnvoll bei gleichzeitiger Angabe des willkürlich gewählten Bezugswertes. Dieser wird üblicherweise auf die Höhe des Meeresspiegels gelegt.

ben. Bringen wir eine zweite Punktladung Q_1 von der Stelle $r = r_1$ entgegen der Feldrichtung an die Stelle $r = r_2 < r_1$ (vgl. ▶Abb. 1.12), dann muss die Arbeit

$$\begin{aligned} W_e &\overset{(1.23)}{=} -Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = -Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{r}^2}}_{\vec{\mathbf{E}}} \cdot \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r} \mathrm{dr}}_{\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}} = -Q_1 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\mathrm{r}^2} \mathrm{dr} \\ &= -Q_1 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = Q_1 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \right) \end{aligned} \tag{1.26}$$

geleistet werden. Verlegen wir den Anfangspunkt r_1 auf die unendlich ferne Hülle $r_1 \to \infty$, dann gilt mit dem dort vorliegenden Bezugspotential $\varphi_e(\infty) = 0$ für die Energie der Punktladung Q_1 an der Stelle r_2 nach Gl. (1.26)

$$W_e \overset{(1.26)}{=} Q_1 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \overset{(1.24)}{=} Q_1 \varphi_e(r_2) \quad \to \quad \varphi_e(r_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}. \tag{1.27}$$

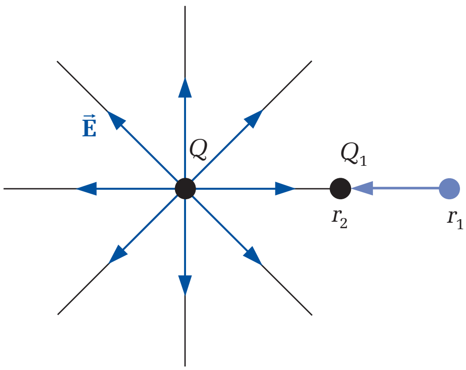


Abbildung 1.12: Verschiebung einer Punktladung im Feld einer zweiten Punktladung

Der Ausdruck $\varphi_e(r_2)$ beschreibt das von der Punktladung Q an der Stelle $\mathrm{r} = r_2$ hervorgerufene Potential. Dieses ist proportional zur Ladung und umgekehrt proportional zum Abstand von der Ladung. Die Flächen konstanten Potentials sind konzentrisch um die Punktladung angeordnete Kugelflächen. An dem ersten Ausdruck in Gl. (1.27) erkennt man, dass die zu leistende Arbeit positiv ist, wenn beide Ladungen gleiche Vorzeichen haben und sich gegenseitig abstoßen.

Betrachten wir noch einmal das Ergebnis (1.26), dann beschreibt dieses in der Form $W_e = Q_1\varphi_e(r_2) - Q_1\varphi_e(r_1)$ die aufzuwendende Arbeit bzw. die Zunahme der potentiellen Energie der Punktladung Q_1, wenn diese von einem Punkt r_1 mit dem Potential $\varphi_e(r_1)$ zu einem Punkt r_2 mit dem Potential $\varphi_e(r_2)$ bewegt wird. Dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\varphi_e(r_2) = \varphi_e(r_1)$ gilt, d.h. das Verschieben einer Ladung zwischen zwei Punkten mit gleichem Potential erfordert als Integral über den gesamten Weg betrachtet keine Arbeit.

1.8.2 Äquipotentialflächen

In diesem Kapitel wollen wir eine weitere Möglichkeit zur grafischen Darstellung von Feldern, nämlich mithilfe von Äquipotentialflächen, kennen lernen. Zur besseren Übersicht zeichnet man die Schnittlinien der Äquipotentialflächen mit der Zeichenebene. Die sich so ergebenden Linien werden als **Äquipotentiallinien** bezeichnet. Für das Beispiel der Punktladung erhält man als Schnittlinien konzentrisch um die Ladung angeordnete Kreise. Eine zusätzliche Information kann man diesen Feldbildern aus der Dichte der Linien entnehmen, wenn die Potentialdifferenzen zwischen jeweils zwei benachbarten Äquipotentiallinien konstant gehalten werden. Das bisherige Feldlinienbild der Punktladung nach Abb. 1.8 kann jetzt entsprechend ▶Abb. 1.13 erweitert werden.

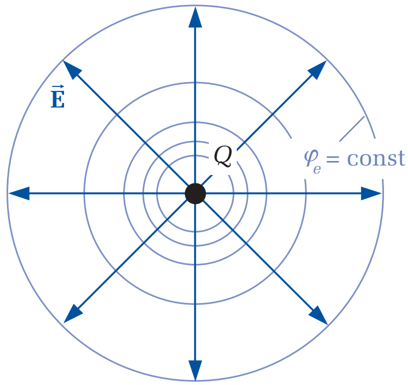


Abbildung 1.13: Feldbild einer Punktladung

Aus diesem Bild ist zu erkennen, dass die Feldlinien an jeder Stelle senkrecht auf den Äquipotentialflächen stehen. Dieser Zusammenhang ist nach Gl. (1.23) allgemein gültig. Bewegt man sich nämlich auf einer Äquipotentialfläche von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1, dann ist das Potential entlang des gerichteten Wegelementes überall gleich groß. Wegen der verschwindenden Potentialdifferenz muss dann aber auch das Linienintegral der elektrischen Feldstärke verschwinden

$$\varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_0) = 0 \overset{(1.23)}{=} -\int_{P_0}^{P_1} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \,. \tag{1.28}$$

Diese Bedingung lässt sich bei nicht verschwindender Feldstärke nur erfüllen, wenn das Skalarprodukt aus Feldstärke und vektoriellem Wegelement in Gl. (1.28) Null wird. Nach Gl. (A.7) folgt daraus unmittelbar, dass Äquipotentialflächen und Feldlinien senkrecht aufeinander stehen.

Betrachten wir nun einen metallischen Leiter, der in ein ortsabhängiges *externes* elektrisches Feld gebracht wird. Mit der Kennzeichnung extern soll verdeutlicht werden, dass das Feld von Ladungen außerhalb des Leiters hervorgerufen wird. Nehmen wir zunächst an, dass sich in dem Leiter infolge des externen Feldes ein nicht konstantes Potential einstellt. Nach Gl. (1.28) tritt dann zwischen den Punkten unterschiedlichen

Potentials eine elektrische Feldstärke auf, die Kräfte auf die in dem Leiter vorhandenen Ladungsträger ausübt. Die frei beweglichen Ladungsträger werden sich in dem Leiter also so lange verschieben, bis keine Kräfte mehr auftreten und die Potentialdifferenzen innerhalb des Leiters verschwinden. Die benötigte Dauer für diese Ladungsverschiebung ist bei metallischen Leitern extrem kurz und liegt in dem Bereich $< 10^{-12}$ s. Bei Materialien mit geringerer Leitfähigkeit (vgl. Kap. 2) wird dieser Ausgleichsvorgang mehr Zeit in Anspruch nehmen. Im statischen Zustand nach Beendigung der Ladungsträgerbewegungen werden die Potentialdifferenzen auch innerhalb der schwach leitfähigen Materialien verschwinden. Eine Ausnahme bilden die so genannten Nichtleiter, bei denen der Ausgleichsvorgang theoretisch unendlich lange dauert.

Da jeder Leiter ein konstantes Potential annimmt, ist er in seinem Inneren feldfrei. Die verschobenen Ladungen im Leiter erzeugen ein elektrisches Feld, das das externe Feld innerhalb des Leiters gerade kompensiert. Die sich einstellende Ladungsverteilung auf der Leiteroberfläche (vgl. Kap. 1.13) hängt von der Geometrie des Körpers und von seiner Lage bezogen auf die externen Ladungsverteilungen ab. Resultierend gilt die Aussage:

Merke

Im elektrostatischen Feld besitzt ein leitender Körper ein konstantes Potential. Seine Oberfläche wird zur Äquipotentialfläche, auf der die elektrische Feldstärke senkrecht steht. Das Leiterinnere ist feldfrei.

Diese Feldfreiheit ist aber nicht nur gewährleistet, wenn sich der Körper in einem externen Feld befindet, sie bleibt auch erhalten, wenn der leitende Körper eine eigene nicht verschwindende Gesamtladung besitzt. Auch diese Ladungsträger werden sich unter dem Einfluss der Coulomb'schen Kräfte so auf der Oberfläche verteilen, dass das Leiterinnere stets feldfrei ist.

1.9 Die elektrische Spannung

Die Potentialdifferenz zwischen zwei beliebigen Punkten P_1 und P_2 kann mit Gl. (1.23) bzw. mit Gl. (1.25) berechnet werden. Wählt man wieder für einen willkürlichen Bezugspunkt P_0 das Potential $\varphi_e(P_0) = 0$, dann gilt

$$\varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_2) \overset{(1.25)}{=} -\int_{P_0}^{P_1} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \,. \tag{1.29}$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes P_0 und wird als elektrische Spannung U (Dimension V) zwischen den Punkten P_1 und P_2 bezeichnet

$$U_{12} = \varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \,. \tag{1.30}$$

1.10 Die elektrische Flussdichte

Die Feldstärke einer positiven Punktladung ist nach Gl. (1.3) radial nach außen gerichtet und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands von der Ladung. Für eine im Ursprung des Kugelkoordinatensystems befindliche Punktladung Q schreiben wir diese Gleichung zunächst in der Form

$$\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{r}} \varepsilon_0 E_{\mathrm{r}}(\mathrm{r}) \overset{(1.3)}{=} \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{r}} \frac{Q}{4\pi \mathrm{r}^2} . \tag{1.31}$$

Denken wir uns eine Kugel vom Radius r mit der Oberfläche $A_K = 4\pi \mathrm{r}^2$ um die Punktladung Q geschlagen, dann ist der rechts stehende Ausdruck in Gl. (1.31) das Verhältnis aus der von der Kugel eingeschlossenen Ladung zur Kugelfläche. Multiplizieren wir also die vektorielle Gl. (1.31) skalar mit dem Einheitsvektor $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{r}}$ und integrieren wir diesen Ausdruck über die Kugelfläche, dann erhalten wir als Ergebnis auf der rechten Seite der Gleichung die innerhalb der Kugel befindliche Ladung

$$\oint\!\!\!\oint_{A_K} \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{r}} \mathrm{d}A = \oint\!\!\!\oint_{A_K} \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{r}} \frac{Q}{4\pi \mathrm{r}^2} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{r}} \, \mathrm{d}A = \frac{Q}{4\pi \mathrm{r}^2} \oint\!\!\!\oint_{A_K} \mathrm{d}A = Q . \tag{1.32}$$

Man beachte, dass die Koordinate r bezüglich der Integration über die Kugeloberfläche eine Konstante ist und somit vor das Integral gezogen werden darf. In dieser Gleichung bezeichnet dA das skalare Flächenelement, das über die Kugelfläche integriert den Wert der Kugeloberfläche ergibt. Dagegen bezeichnet $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{r}} \mathrm{d}A = \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$ das vektorielle Flächenelement, dessen Richtung senkrecht auf der Fläche steht und nach außen zeigt (vgl. Anhang C.2). Damit erhalten wir die Darstellung

$$\oint\!\!\!\oint_{A_K} \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{r}} \mathrm{d}A = \oint\!\!\!\oint_{A_K} \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = Q . \tag{1.33}$$

Das in dem Integral stehende Produkt

$$\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{D}} \tag{1.34}$$

der Dimension As/m² wird als **elektrische Flussdichte** bezeichnet. Das Integral von $\vec{\mathbf{D}}$ über eine Fläche A mit dem gerichteten Flächenelement $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$ (▶Abb. 1.14) gibt den **elektrischen Fluss** Ψ der Dimension As an, der die Fläche A in Richtung der Flächennormalen durchsetzt[4]

$$\Psi = \iint_A \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} . \tag{1.35}$$

4 Die Begriffe Fluss und Flussdichte sind an dieser Stelle irreführend. Es gibt hier keinen physikalischen Vorgang, der durch die Bewegung von Teilchen oder dergleichen beschrieben werden kann. Die Verwendung dieser Begriffe erklärt sich aus dem Aufbau der Gleichung (1.35), die in Kapitel C.2 ausführlich behandelt wird und dort tatsächlich einen Fluss (von Teilchen) durch eine Fläche im Sinne des üblichen Sprachgebrauchs darstellt.

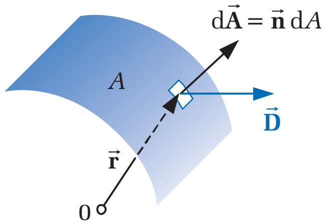


Abbildung 1.14: Elektrischer Fluss Ψ durch die Fläche A

Handelt es sich bei der Fläche um eine geschlossene Hüllfläche, innerhalb der sich eine Punktladung Q befindet, dann liefert das Integral nach Gl. (1.33) den Wert der eingeschlossenen Ladung. Dieser Sachverhalt, den wir am Beispiel einer Kugelfläche und einer im Kugelmittelpunkt angebrachten Punktladung gezeigt haben, lässt sich auch allgemein für eine beliebig gewählte Hüllfläche beweisen. Damit ist der Zusammenhang zwischen eingeschlossener Punktladung und Gesamtfluss durch die Hüllfläche unabhängig davon, an welcher Stelle sich die Ladung in dem umschlossenen Volumen befindet.

Da man sich jede Ladungsanordnung im Elementaren aus Punktladungen aufgebaut denken kann, kommt man zur folgenden allgemein gültigen Aussage:

Merke

Das Hüllflächenintegral der elektrischen Flussdichte über eine beliebig geschlossene Fläche A entspricht der im umschlossenen Volumen enthaltenen Gesamtladung Q. Der Fluss Ψ ist also ein Maß für die vorhandene Ladungsmenge

$$\Psi = \oiint_A \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = Q \quad . \tag{1.36}$$

Die elektrische Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ ist eine **Quantitätsgröße** und beschreibt die **Ursache** für den Raumzustand, der sich durch Kraftwirkungen auf Ladungen bemerkbar macht.

Da die Ladungen als Erregung für den Raumzustand angesehen werden, wird die Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ oft auch als **elektrische Erregung** bezeichnet.

Die Gl. (1.36) kann in einfachen, meist symmetrischen Anordnungen dazu verwendet werden, die Feldstärke im allgemeinen Raumpunkt zu berechnen. Wir werden in den folgenden beiden Kapiteln ausgehend von dieser Beziehung das Verhalten der Flussdichte und der Feldstärke einerseits beim Durchgang durch eine ortsabhängige Flächenladung und andererseits an leitenden Oberflächen untersuchen.

Beispiel 1.2: Feldberechnung

Im zylindrischen Koordinatensystem (ρ,φ,z) ist der gesamte Bereich $\rho \le a$ und $-\infty < z < \infty$ mit einer Raumladung der Dichte ρ_0 ausgefüllt. Von dem unendlich langen Zylinder ist in der ▶Abb. 1.15 nur ein Ausschnitt der Länge l dargestellt.

1. Wie groß ist die Gesamtladung Q in einem Abschnitt der Länge l?

2. Welchen Wert nimmt die elektrische Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ in einem beliebigen Punkt des Raumes an?

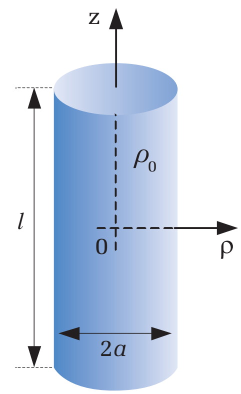


Abbildung 1.15: Raumladungsverteilung

Lösung:

1. Für die Gesamtladung in einem Abschnitt der Länge l gilt:

$$Q \overset{(1.16)}{=} \iiint_V \rho_0 \, \mathrm{d}V = \rho_0 \iiint_V \mathrm{d}V = \rho_0 V \quad \rightarrow \quad Q = \rho_0 \, l \, \pi a^2 \,. \tag{1.37}$$

2. Die Anordnung ist unabhängig von den Koordinaten φ und z. Die aus Symmetriegründen radial gerichtete Flussdichte $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{e}}_\rho D(\rho)$ hängt nur von dem Achsabstand ab. Für einen Zylinder der Länge l gilt:

$$Q \overset{(1.36)}{=} \oiint_A \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \iint_{Mantel} \vec{\mathbf{e}}_\rho D(\rho) \cdot \vec{\mathbf{e}}_\rho \mathrm{d}A = D(\rho) 2\pi \rho \, l \overset{(1.37)}{=} \begin{cases} \rho_0 \, l \, \pi \, \rho^2 & \text{für} \quad \rho \le a \\ \rho_0 \, l \, \pi \, a^2 & \phantom{\text{für}} \quad \rho > a \end{cases}. \tag{1.38}$$

Für die Flussdichte gilt resultierend das Ergebnis

$$\vec{\mathbf{D}}(\rho) = \begin{cases} \vec{\mathbf{e}}_\rho \, \rho_0 \dfrac{\rho}{2} = \vec{\mathbf{e}}_\rho \dfrac{Q}{2\pi a l} \dfrac{\rho}{a} & \text{innerhalb des Zylinders} \\ \vec{\mathbf{e}}_\rho \, \rho_0 \dfrac{a^2}{2\rho} = \vec{\mathbf{e}}_\rho \dfrac{Q}{2\pi a l} \dfrac{a}{\rho} & \text{außerhalb des Zylinders} \end{cases}. \tag{1.39}$$

1.11 Das Verhalten der Feldgrößen bei einer Flächenladung

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der Feldgrößen beim Durchgang durch eine ortsabhängige Flächenladung untersucht werden. Zu diesem Zweck betrachten wir die in ▶Abb. 1.16 dargestellte dünne Kunststofffolie mit vernachlässigbarer Dicke, die z.B. durch Reiben mit einem Wolltuch aufgeladen ist und eine im Allgemeinen ortsabhängige Flächenladungsverteilung aufweist. Zur einfacheren Behandlung des Problems werden wir in diesem und auch in späteren Fällen die vektoriellen Feldgrößen $\vec{\mathbf{E}}$ und $\vec{\mathbf{D}}$, die in Bezug auf die betrachtete Folie eine beliebige Orientierung aufweisen, in eine zur Fläche senkrechte Komponente, die so genannte Normalkomponente (Index n) und in eine Tangentialkomponente (Index t) zerlegen. Die Betrachtung wird für die beiden Komponenten getrennt durchgeführt.

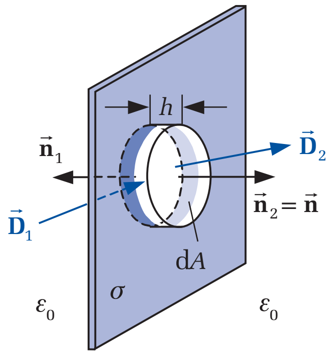


Abbildung 1.16: Flächenladungsverteilung

Um das Verhalten der Normalkomponente zu untersuchen, legen wir gemäß Abb. 1.16 einen kleinen Flachzylinder um die ladungsbesetzte Fläche und lassen die Höhe h des Zylinders gegen Null gehen. Die elementare Fläche dA des Zylinders wählen wir so klein, dass wir die Flächenladung σ innerhalb des Zylinders als konstant, d.h. ortsunabhängig ansehen können. Nach Gl. (1.36) muss der insgesamt durch die Zylinderoberfläche austretende elektrische Fluss der innerhalb des Zylinders eingeschlossenen Gesamtladung σdA entsprechen. Wegen $h \to 0$ liefert die Mantelfläche keinen Beitrag und wegen der innerhalb von dA voraussetzungsgemäß ortsunabhängigen Flächenladungsdichte geht die Integration der Flussdichte über die Deckflächen in eine einfache Multiplikation mit dem als dA bezeichneten Flächenelement über. Mit den Bezeichnungen $\vec{\mathbf{n}}_1$ und $\vec{\mathbf{n}}_2$ für die beiden von der Folie jeweils nach außen zeigenden Einheitsvektoren kann der gesamte aus dem Flachzylinder austretende Fluss nach Gl. (1.36) folgendermaßen geschrieben werden

$$\vec{\mathbf{D}}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2 \, \mathrm{d}A + \vec{\mathbf{D}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_1 \, \mathrm{d}A = \sigma \, \mathrm{d}A \,. \tag{1.40}$$

Bezeichnen wir nun eine der beiden Flächennormalen zur Vereinfachung mit $\vec{\mathbf{n}}$, z.B. $\vec{\mathbf{n}}_2 = \vec{\mathbf{n}}$, dann gilt $\vec{\mathbf{n}}_1 = -\vec{\mathbf{n}}$ und die Gl. (1.40) nimmt die neue Form

$$\vec{\mathbf{D}}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2 \,\mathrm{d}A + \vec{\mathbf{D}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_1 \,\mathrm{d}A = \vec{\mathbf{D}}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}} \,\mathrm{d}A - \vec{\mathbf{D}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}} \,\mathrm{d}A = D_{n2} \,\mathrm{d}A - D_{n1} \,\mathrm{d}A = \sigma \,\mathrm{d}A \tag{1.41}$$

an. Die Werte D_{n1} und D_{n2} bezeichnen die Komponenten der Flussdichten $\vec{\mathbf{D}}_1$ und $\vec{\mathbf{D}}_2$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{\mathbf{n}}$. Die Gl. (1.41) lässt sich nun auf einfache Weise interpretieren: die Differenz zwischen dem auf der rechten Seite der Folie in Richtung der Flächennormalen $\vec{\mathbf{n}}$ aus dem Flachzylinder austretenden Fluss $D_{n2}\mathrm{d}A$ und dem auf der gegenüberliegenden Seite in Richtung des gleichen Einheitsvektors $\vec{\mathbf{n}}$ in den Zylinder eintretenden Fluss $D_{n1}\mathrm{d}A$ ist durch die eingeschlossene Ladung gegeben. Nach Kürzen des auf beiden Gleichungsseiten identischen Flächenelementes $\mathrm{d}A$ folgt unmittelbar die gesuchte Beziehung

$$\boxed{D_{n2} - D_{n1} = \sigma} \tag{1.42}$$

für die Normalkomponente der Flussdichte. Bei verschwindender Flächenladung $\sigma = 0$ folgt aus dieser Gleichung die triviale Aussage, dass sich die Normalkomponente der Flussdichte dann auch nicht ändert, d.h. $D_{n1} = D_{n2}$.

Mit der auf beiden Seiten der Flächenladung gleichen Dielektrizitätskonstanten ε_0 erhält man mithilfe der Gl. (1.34) die Übergangsbedingung für die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke

$$\boxed{\varepsilon_0 E_{n2} - \varepsilon_0 E_{n1} = \sigma}\;. \tag{1.43}$$

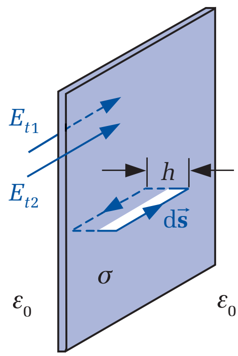


Abbildung 1.17: Flächenladungsverteilung

Im zweiten Schritt soll das Verhalten der Tangentialkomponenten untersucht werden. Zu diesem Zweck betrachten wir das in ▶Abb. 1.17 um die Trennfläche gelegte Rechteck mit den tangential zur Trennebene verlaufenden elementaren Seitenlängen $\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$ und der wiederum verschwindenden Abmessung $h \to 0$. Bilden wir gemäß Gl. (1.22) das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke entlang dieses Rechtecks, dann liefern wegen $h \to 0$ nur die auf beiden Seiten entlang der Folie verlaufenden Wegelemente $\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$ einen Beitrag. Wir wählen die Strecke $\mathrm{d}s$ so klein, dass die elektrische Feldstärke in diesem Abschnitt als konstant, d.h. ortsunabhängig angesehen werden kann. Das Wegintegral der Feldstärke geht dann über in eine einfache Multiplikation der Feldstärke mit der Länge ds. Aus dem geforderten Verschwinden des Umlaufintegrals nach Gl. (1.22) folgt unmittelbar die Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke auf beiden Seiten der Flächenladung

$$E_{t2}\,\mathrm{d}s - E_{t1}\,\mathrm{d}s = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{E_{t1} = E_{t2}}\,. \tag{1.44}$$

Die Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke erfordert wegen der auf beiden Seiten der Flächenladung gleichen Dielektrizitätskonstanten auch die Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Flussdichte

$$E_{t1} = \frac{1}{\varepsilon_0} D_{t1} = E_{t2} = \frac{1}{\varepsilon_0} D_{t2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{D_{t1} = D_{t2}}\,. \tag{1.45}$$

Die in diesem Abschnitt am Beispiel der Flächenladung abgeleiteten Beziehungen für die Komponenten der beiden vektoriellen Feldgrößen werden allgemein als **Randbedingungen** bezeichnet. In den folgenden Abschnitten werden wir weitere Randbedingungen, z.B. an Sprungstellen von Materialeigenschaften kennen lernen.

Wegen der besonderen Bedeutung der Randbedingungen bei der Feldberechnung und wegen der immer wieder gleichen Vorgehensweise bei der Ableitung dieser Beziehungen fassen wir die einzelnen Schritte noch einmal zusammen:

- Zerlegung der vektoriellen Feldgrößen in Normal- und Tangentialkomponenten
- Betrachtung der *Normalkomponente der Flussdichte*, da hier bereits eine bekannte Gesetzmäßigkeit vorliegt, z.B. Gl. (1.36)
- Betrachtung der *Tangentialkomponente der Feldstärke*, hier liegt ebenfalls eine bekannte Gesetzmäßigkeit vor, z.B. Gl. (1.22)
- Aufstellung der Randbedingungen für die Tangentialkomponente der Flussdichte und die Normalkomponente der Feldstärke mithilfe einer bekannten Beziehung zwischen den beiden Feldgrößen, z.B. Gl. (1.34)

Für die Randbedingungen bei einer Flächenladung gilt allgemein die Aussage:

Merke

Beim Durchgang durch eine ladungsbesetzte Fläche erleidet die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte einen der Flächenladungsdichte am Durchgangsort proportionalen Sprung (1.42), während die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke stetig ist (1.44). Die Forderungen für die beiden anderen Komponenten (1.43) und (1.45) ergeben sich aus der Beziehung $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}$.

Beispiel 1.3: Zwei parallel angeordnete homogene Flächenladungen der Dichten $\pm\sigma$

In den Ebenen $y_1 = \text{const}$ und $y_2 = \text{const}$ befinden sich homogene Flächenladungsverteilungen $\pm\sigma$, die zur Vereinfachung in x- und in z-Richtung als unendlich ausgedehnt angenommen werden sollen. Unter der Voraussetzung, dass sich die Anordnung in Luft befindet, sind im allgemeinen Raumpunkt die elektrische Flussdichte und die elektrische Feldstärke zu bestimmen.

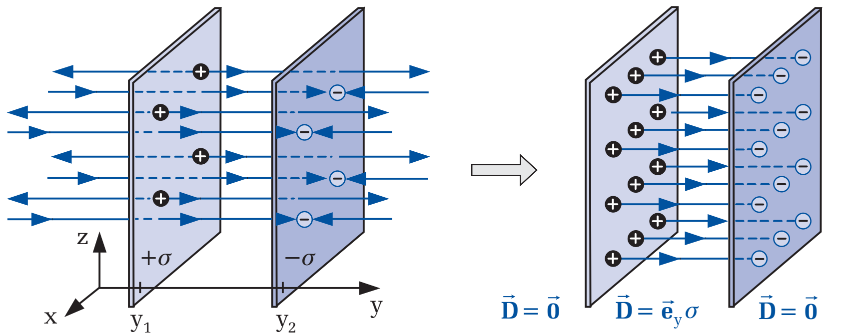


Abbildung 1.18: Zwei parallel angeordnete, unendlich ausgedehnte homogene Flächenladungsverteilungen

Lösung:

Da die gesamte Ladungsverteilung von den beiden Koordinaten x und z unabhängig ist, muss auch das elektrische Feld von diesen Koordinaten unabhängig sein. Betrachten wir zunächst nur das Feld infolge der Flächenladung $+\sigma$ in der Ebene $y = y_1$. Aus Symmetriegründen wird die Feldstärke auf beiden Seiten der Flächenladung betragsmäßig gleich sein. Da die Feldlinien von den positiven Ladungen ausgehen, zeigt das Feld im Bereich $y > y_1$ in die positive y-Richtung, im Bereich $y < y_1$ dagegen in die negative y-Richtung. Mit der willkürlich gewählten Flächennormalen $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{e}}_y$ kann die Flussdichte in der folgenden Form dargestellt werden

$$\vec{\mathbf{D}}_{+\sigma} = \begin{matrix} \vec{\mathbf{e}}_y D_{y2} \\ \vec{\mathbf{e}}_y D_{y1} \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} y > y_1 \\ y < y_1 \end{matrix} . \tag{1.46}$$

Aus der Randbedingung (1.42) folgt wegen der zur Ebene $y = y_1$ schiefsymmetrischen Flussdichteverteilung das Ergebnis

$$D_{y2} - D_{y1} = D_{y2} - \left(-D_{y2}\right) = \sigma \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{D}}_{+\sigma} = \pm\vec{\mathbf{e}}_y \frac{\sigma}{2} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} y > y_1 \\ y < y_1 \end{matrix} . \tag{1.47}$$

Für die negative Flächenladungsverteilung in der Ebene $y = y_2$ gilt entsprechend

$$\vec{\mathbf{D}}_{-\sigma} = \mp\vec{\mathbf{e}}_y \frac{\sigma}{2} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} y > y_2 \\ y < y_2 \end{matrix} . \tag{1.48}$$

Überlagert man die beiden Teillösungen (1.47) und (1.48), dann stellt man fest, dass sich im Bereich zwischen den beiden Ebenen $y_1 < y < y_2$ ein von der Koordinate y unabhängiges homogenes Feld vom Gesamtwert

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{D}}_{+\sigma} + \vec{\mathbf{D}}_{-\sigma} = \vec{\mathbf{e}}_y\,\sigma \tag{1.49}$$

einstellt. In den Bereichen $y < y_1$ und $y > y_2$ kompensieren sich die beiden Teillösungen, so dass dieser Raum feldfrei ist (rechte Seite der ▶Abb. 1.18). Die elektrische Feldstärke nimmt in dem Zwischenraum $y_1 < y < y_2$ den Wert $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{e}}_y \sigma / \varepsilon_0$ an und verschwindet ebenfalls in den Bereichen $y < y_1$ und $y > y_2$.

1.12 Feldstärke an leitenden Oberflächen

Als zweites Anwendungsbeispiel für die Gl. (1.36) untersuchen wir das Verhalten der Feldgrößen an einer leitenden Oberfläche. Zu diesem Zweck betrachten wir die in ▶Abb. 1.19 dargestellte leitende metallische Kugel des Durchmessers $2a$, auf der sich die Gesamtladung $Q > 0$ befindet. Wegen der kugelsymmetrischen Anordnung ist die Feldstärke und damit auch die Flussdichte außerhalb der Kugel radial nach außen gerichtet und nur von der Kugelkoordinate r abhängig. Die Integration der Flussdichte nach Gl. (1.36) über eine um den gleichen Mittelpunkt geschlagene, in der Abbildung gestrichelt angedeutete Kugel des Radius $r > a$ liefert wegen der von den Integrationsvariablen ϑ und φ unabhängigen Flussdichte $D(r)$ das Ergebnis

$$\begin{gathered} \oiint_A \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oiint_A \vec{\mathbf{e}}_r D(r) \cdot \vec{\mathbf{e}}_r dA = D(r) \oiint_A dA = D(r)\, 4\pi r^2 = Q \quad \rightarrow \\ D(r) = \varepsilon_0 E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\,. \end{gathered} \tag{1.50}$$

Ein Vergleich mit der Beziehung (1.31) zeigt, dass die geladene Kugel in ihrem Außenraum das gleiche Feld wie eine Punktladung Q im Ursprung erzeugt. Die Kugel besitzt nach Kapitel 1.8.2 ein konstantes Potential und ist in ihrem Inneren feldfrei. Diese Aussage bedeutet aber gleichzeitig, dass die Ladungen homogen auf der Kugeloberfläche als Flächenladung

$$\sigma = \frac{Q}{A_K} = \frac{Q}{4\pi a^2} \tag{1.51}$$

verteilt sein müssen. Integrieren wir nämlich die Flussdichte über eine konzentrisch um den Mittelpunkt angeordnete kugelförmige Hüllfläche, deren Radius kleiner ist als der Kugelradius a, dann folgt wegen der Feldfreiheit im Inneren $D(r) = 0$ für $r < a$ nach Gl. (1.50) unmittelbar das Verschwinden der innerhalb der Hüllfläche vorhandenen Gesamtladung.

Ein Vergleich der beiden letzten Beziehungen zeigt, dass der Betrag der Flussdichte $D(r)$ unmittelbar an der Kugeloberfläche $r \rightarrow a$ dem Wert der Flächenladung entspricht

$$D(a) = \varepsilon_0 E(a) = \sigma\,. \tag{1.52}$$

Der Sprung der Flussdichte vom Wert Null für $r < a$ auf den Wert σ nach Gl. (1.52) beim Durchgang durch die Kugeloberfläche $r = a$ entspricht genau der Randbedingung (1.42). Der Verlauf der Flussdichte als Funktion des Mittelpunktsabstandes r ist ebenfalls in Abb. 1.19 dargestellt.

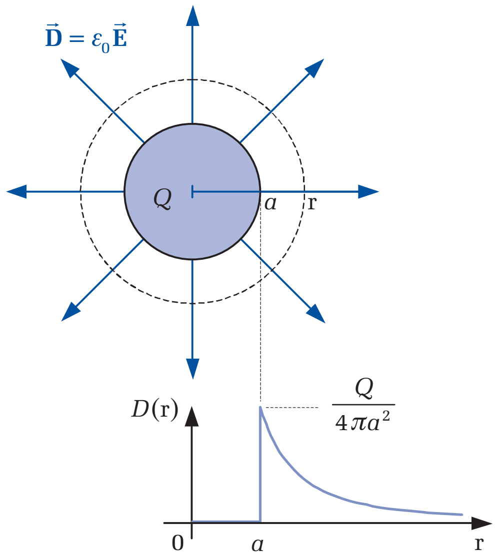


Abbildung 1.19: Geladene metallische Kugel

Da die elektrische Feldstärke von den positiven Ladungen ausgeht, ist die in Gl. (1.52) festgestellte Proportionalität zwischen Feldstärke und Flächenladung leicht einzusehen. Dieser aus Symmetriegründen am Beispiel einer Kugel demonstrierte Zusammenhang ist auch bei ortsabhängiger Ladungsverteilung an jeder Stelle der leitenden Oberfläche gültig. Bezeichnet man mit $\vec{\mathbf{n}}$ die Flächennormale, d.h. den auf der Oberfläche senkrecht stehenden Einheitsvektor, und mit D_n bzw. E_n die beiden Normalkomponenten, dann lässt sich die auf der Leiteroberfläche geltende Beziehung (1.52) $D_n = \varepsilon_0 E_n = \sigma$ mithilfe der Gl. (A.12) in der vektoriellen Form

$$D_n = \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \sigma\Big|_{\text{auf der Oberfläche}} \tag{1.53}$$

schreiben. Zerlegt man die beiden Vektoren in ihre auf der leitenden Oberfläche senkrecht stehende Normalkomponente und in die Tangentialkomponente, dann gelten die skalaren Beziehungen

$$D_n = \sigma, \; D_t = 0 \quad \text{und} \quad E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \; E_t = 0 \tag{1.54}$$

für die entsprechenden Komponenten auf der Oberfläche. Innerhalb des Leiters verschwinden die Feldgrößen.

1.13 Die Influenz

Wir wollen jetzt noch einmal die bereits in Kap. 1.8.2 diskutierte Situation untersuchen, bei der sich ein leitender Körper in einem externen elektrischen Feld befindet. Wir haben bereits festgestellt, dass der leitende Körper ein konstantes Potential annimmt und in seinem Inneren feldfrei ist. Die Folgerungen aus dieser Aussage wollen wir an zwei unterschiedlichen Beispielen detailliert untersuchen, indem wir die zur Erzeugung der Feldfreiheit notwendige Ladungsträgerverschiebung in den Körpern quantitativ bestimmen.

1.13.1 Dünne leitende Platten im homogenen Feld

Im ersten Beispiel verwenden wir zur Felderzeugung die in ▶Abb. 1.20 dargestellte Anordnung mit zwei parallelen Platten der Gesamtladungen $\pm Q$, die sich in einem im Vergleich mit den Plattenabmessungen kleinen Abstand gegenüberstehen.

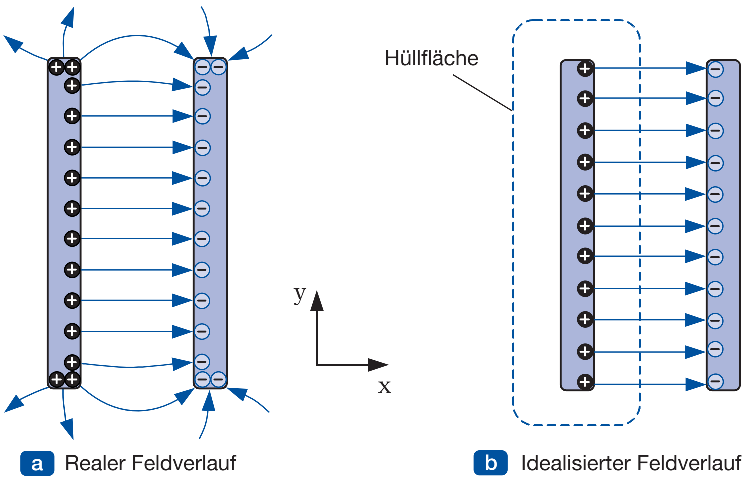


Abbildung 1.20: Elektrisch geladene Platten

Die in der Abb. 1.20a angedeutete Ladungsträgerverteilung innerhalb der beiden Platten lässt sich auf einfache Weise verstehen. Aufgrund der Anziehungskräfte zwischen den positiven und negativen Ladungsträgern müssen sich diese zwangsläufig auf den Innenseiten der Platten, d.h. auf den sich gegenüberliegenden Oberflächen konzentrieren. Man kann diese Verteilung auch noch anders begründen. Betrachten wir die rechte Platte, dann befindet sich diese in dem von den positiven Ladungsträgern hervorgerufenen externen x-gerichteten Feld. Feldfreiheit in der rechten Platte kann aber nur erreicht werden, wenn das von den Elektronen innerhalb der Platte erzeugte Feld die entgegengesetzte Richtung aufweist. Da die Feldlinien zu den negativen Ladungsträgern hinzeigen, müssen sich diese auf der innen liegenden Oberfläche befinden. Diese Feldfreiheit innerhalb der rechten Platte wird auf die gleiche Weise erreicht wie die Feldfreiheit im Bereich $y > y_2$ in der Abb. 1.18.

Das elektrische Feld wird sich in der dargestellten Weise zwischen den beiden Platten konzentrieren und einen näherungsweise homogenen Verlauf aufweisen. Außerhalb der Platten verschwindet das Feld fast völlig. Es wird hier umso kleiner, je größer die Plattenfläche und je kleiner der Abstand zwischen den Platten wird. In dem Übergangsbereich an den Plattenrändern bildet sich ein so genanntes **Streufeld** aus. Sein Verlauf ist in Abb. 1.20a angedeutet.

Zur näherungsweisen Berechnung der Feldstärke zwischen den Platten können das Streufeld und auch das Feld außerhalb der Platten vernachlässigt werden. Man erkennt, dass die idealisierte Feldverteilung in Abb. 1.20b identisch ist mit der Feldverteilung in Abb. 1.18. Mit der Bezeichnung A für die Fläche der Platten und mit den Gesamtladungen $\pm Q$ erhält man die homogen verteilten Flächenladungsdichten $\pm\sigma = \pm Q/A$. Nach Gl. (1.49) wird sich auf den innen liegenden Oberflächen der beiden Platten das x-gerichtete Feld der Flussdichte $D_x = \varepsilon_0 E_x = \sigma$ einstellen. Wegen der Homogenität des Feldes wird es überall zwischen den Platten diesen Wert aufweisen. Da es unter den gemachten Voraussetzungen außerhalb der Platten verschwindet, steht diese Feldverteilung auch in Einklang mit der Aussage (1.36). Das Flächenintegral der Flussdichte über die in Abb. 1.20b gestrichelt angedeutete Hüllfläche liefert wegen der Feldfreiheit außerhalb nur im Bereich zwischen den Platten einen Beitrag zum elektrischen Fluss, der nach Auswertung des Integrals der eingeschlossenen Ladung entspricht

$$\Psi \overset{(1.36)}{=} \underset{\text{Hüllfläche}}{\oiint} \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \underset{\text{Plattenfläche}}{\iint} \vec{\mathbf{e}}_x D_x \cdot \vec{\mathbf{e}}_x \mathrm{d}A \overset{(1.49)}{=} \sigma \underset{\text{Plattenfläche}}{\iint} \mathrm{d}A = \sigma A = Q\,. \tag{1.55}$$

In das homogene Feld zwischen den beiden Platten bringen wir jetzt gemäß ▶Abb. 1.21 einen aus zwei dünnen leitenden Scheiben bestehenden ungeladenen Körper.

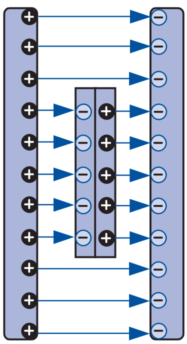


Abbildung 1.21: Leitender Körper im elektrischen Feld

Auf die in den Scheiben vorhandenen Ladungsträger werden infolge der Feldstärke Kräfte ausgeübt. Die freien Elektronen werden in Richtung der linken, positiv geladenen Platte angezogen, so dass die linke Scheibe einen Elektronenüberschuss und die rechte Scheibe einen Elektronenmangel aufweist (zur Ladungsträgerbewegung vgl.

Kap. 2). Diese Ladungstrennung, man spricht hier von **influenzierten Ladungen** auf den beiden Scheiben, kann man leicht nachweisen, indem man die beiden Scheiben getrennt aus dem Feld herausnimmt und die Ladungen auf den einzelnen Scheiben getrennt untersucht.

Unter der Voraussetzung, dass die beiden leitenden Scheiben sehr dünn sind, werden sie das ursprünglich vorhandene elektrische Feld $\vec{\mathbf{E}}$ praktisch nicht beeinflussen. Die auf ihrer Oberfläche influenzierte (*verschobene*) Ladung entspricht nach Gl. (1.53) der elektrischen Flussdichte $\sigma = D_x$. Aus diesem Grund wird $\vec{\mathbf{D}}$ oft auch als **Verschiebungsdichte** bezeichnet.

1.13.2 Im leitenden Körper eingeschlossener Hohlraum

Im zweiten Beispiel betrachten wir eine ungeladene leitende Hohlkugel mit Innenradius a und Außenradius b. Im Mittelpunkt der Hohlkugel befindet sich eine Punktladung Q. Wegen der von den Koordinaten ϑ und φ unabhängigen kugelsymmetrischen Feldverteilung wird das Feld sowohl im Hohlraum $\mathrm{r} < a$ als auch im Außenraum $\mathrm{r} > b$ entsprechend der Ableitung in Gl. (1.50) identisch sein zu dem Feld der im Ursprung angeordneten Punktladung.

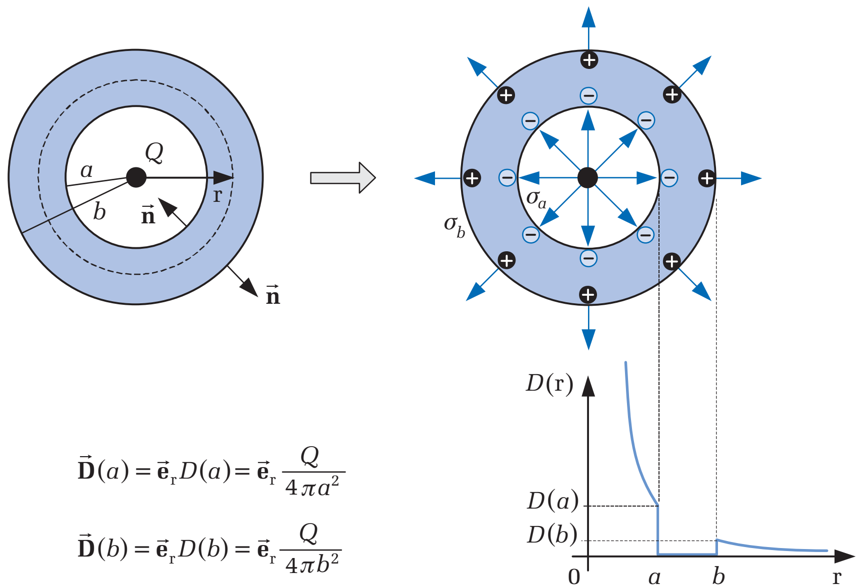


Abbildung 1.22: Leitende Hohlkugel mit Punktladung im Mittelpunkt

Damit ist aber auch bereits festgelegt, wie sich die Influenzladungen auf der Hohlkugel verteilen. Die Flussdichte infolge der Punktladung verlangt nach Gl. (1.54) auf der inneren Oberfläche $\mathrm{r} = a$ das Vorhandensein einer negativen Flächenladungsverteilung gleichen Betrages. Die Flächennormale auf der inneren Kugeloberfläche $\vec{\mathbf{n}} = -\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r}$ zeigt entgegen der Flussdichte, so dass die Gl. (1.53) das Ergebnis

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{D}} = -\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r} D_\mathrm{r}(\mathrm{r}=a) \overset{(1.31)}{=} -\frac{Q}{4\pi a^2} \overset{(1.53)}{=} \sigma_a \quad \rightarrow \quad \sigma_a = -\frac{Q}{4\pi a^2} \tag{1.56}$$

liefert. Auf der Kugeloberfläche $\mathrm{r} = b$ gilt $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r}$ und damit

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r} D_\mathrm{r}(\mathrm{r}=b) \overset{(1.31)}{=} \frac{Q}{4\pi b^2} \overset{(1.53)}{=} \sigma_b \quad \rightarrow \quad \sigma_b = \frac{Q}{4\pi b^2}\,. \tag{1.57}$$

Es lässt sich leicht verifizieren, dass die Gesamtladung der Hohlkugel Q_K verschwindet

$$Q_K = \sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 = 0\,. \tag{1.58}$$

Als zusätzliche Kontrolle kann man die Flussdichte innerhalb des leitenden Bereichs $a < \mathrm{r} < b$ berechnen. Bildet man das Hüllflächenintegral über die in ▶Abb. 1.22 gestrichelt eingezeichnete Kugelfläche vom Radius r, dann verschwindet die Flussdichte wegen der ebenfalls verschwindenden eingeschlossenen Ladung

$$\oiint_A \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \overset{(1.50)}{=} D(\mathrm{r})\, 4\pi \mathrm{r}^2 = Q + \sigma_a 4\pi a^2 = 0 \quad \rightarrow \quad D(\mathrm{r}) = 0 \quad \text{für} \quad a < \mathrm{r} < b\,. \tag{1.59}$$

Merke

Befindet sich ein leitender Körper in einem von externen Ladungsverteilungen hervorgerufenen elektrischen Feld, dann werden auf seiner Oberfläche Ladungen influenziert. Der Wert der influenzierten Flächenladungsdichte in einem Punkt P der Oberfläche entspricht genau dem Wert der senkrecht auftreffenden Flussdichte an dieser Stelle P. Die Flussdichte springt aber infolge der Randbedingung (1.42) genau um den Wert der Flächenladungsdichte und damit auf den Wert Null auf der Innenseite des leitenden Körpers. Die Felder der externen Ladungsverteilungen und der Influenzladungen kompensieren sich innerhalb des leitenden Körpers, der somit feldfrei ist.

Erweitern wir die Problemstellung jetzt dahingehend, dass die Hohlkugel eine nicht verschwindende Gesamtladung $Q_K \neq 0$ aufweist, dann wird die Flussdichte im Bereich $\mathrm{r} > b$ nach Gl. (1.50) den Wert

$$D(\mathrm{r}) = \frac{Q + Q_K}{4\pi \mathrm{r}^2} \tag{1.60}$$

aufweisen und die Ladung Q_K wird sich wie in Abb. 1.19 dargestellt ebenfalls auf der Oberfläche r = b homogen verteilen, so dass die Flächenladung σ_b den Wert

$$\sigma_b = \frac{Q + Q_K}{4\pi b^2} \tag{1.61}$$

annimmt. Die Feldfreiheit innerhalb des leitenden Körpers ist somit unabhängig davon, ob der Körper eine Ladung besitzt oder ob er ungeladen ist.

Betrachten wir noch den Sonderfall, dass sich die Feld erzeugenden Ladungen außerhalb der Hohlkugel befinden und der Hohlraum ladungsfrei ist. In diesem Fall werden sich nur an der äußeren Oberfläche r = b Influenzladungen ausbilden, so dass nicht nur das Leiterinnere, sondern auch der nicht leitende Hohlraum vollständig gegenüber dem elektrischen Feld abgeschirmt ist. Dieses Prinzip der elektrostatischen Abschirmung ist als **Faraday'scher Käfig** bekannt und findet vielfältige Anwendung. Empfindliche Halbleiterbauelemente werden z.B. zum Schutz gegen elektrostatische Entladungen in leitfähige Materialien verpackt.

Auch in den Fällen, in denen der Hohlraum nicht vollständig von einem leitenden Körper umschlossen wird, ist er dennoch sehr gut gegen äußere elektrostatische Felder abgeschirmt. Selbst bei Verwendung eines Drahtgitters ist das Feld im Innenraum sehr stark reduziert, lediglich in der unmittelbaren Umgebung der Löcher ist die Schirmwirkung gering. Diese Abschirmung funktioniert auch noch bei zeitlich langsam veränderlichen Feldern, erst bei schnell veränderlichen darf der Abstand zwischen den Gitterstäben einen von der Geschwindigkeit der zeitlichen Änderung abhängigen Maximalwert nicht überschreiten, um eine entsprechende Schirmwirkung zu erzielen.

1.14 Die dielektrische Polarisation

In diesem Abschnitt gehen wir noch einmal von dem idealisierten Feldverlauf der Abb. 1.20 aus. Wird in das Feld zwischen den im Abstand d befindlichen Platten der ▶Abb. 1.23a ein leitender Körper eingebracht, dann werden an seiner Oberfläche Ladungen influenziert und das Innere des Körpers bleibt feldfrei (▶Abb. 1.23c). Hält man die Ladungen $\pm Q = \pm\sigma A$ auf den äußeren Platten beim Einbringen des leitenden Körpers konstant, dann bleibt auch die von ihnen hervorgerufene elektrische Flussdichte nach Gl. (1.53) unverändert. In den Zwischenräumen zwischen den äußeren Platten und dem leitenden Körper muss dann auch die elektrische Feldstärke $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{D}}/\varepsilon_0$ gleich bleiben. Die zwischen den beiden Platten anliegende Spannung kann nach Gl. (1.30) als das Wegintegral der elektrischen Feldstärke berechnet werden. Da die Feldstärke und das gerichtete Wegelement zwischen den Platten parallel verlaufen und sich die Feldstärke im homogenen Feld längs des Weges nicht ändert, kann die Spannung von der positiv zur negativ geladenen Platte im Teilbild a durch eine Multiplikation des Feldstärkebetrages E mit der Weglänge d ersetzt werden. Im Teilbild c wird die elektrische Spannung entsprechend der verkürzten Weglänge kleiner sein als im Teilbild a.

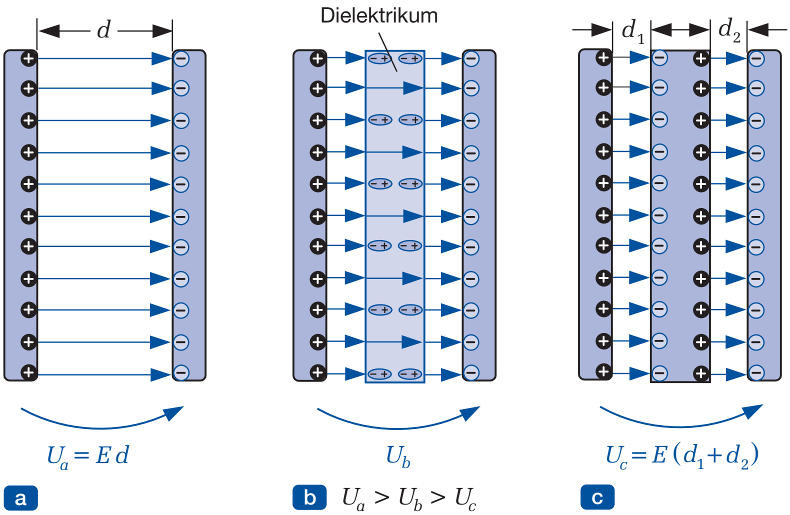


Abbildung 1.23: Reduzierung der Spannung zwischen den Platten durch unterschiedliche Materialien

Bringt man dagegen anstelle des Metallkörpers ein homogenes, isolierendes Material gleicher Abmessungen zwischen die geladenen Platten, dann stellt man bei wiederum unveränderter Gesamtladung auf den äußeren Platten eine Spannung zwischen den Platten fest, die kleiner ist als im Teilbild a, jedoch größer als bei dem leitenden Körper im Teilbild c. Die Ursache für dieses Verhalten liegt in dem inneren Aufbau des isolierenden Materials. Im Gegensatz zu dem Leiter sind die Elektronen zwar nicht frei beweglich, dennoch tritt eine Ladungsverschiebung innerhalb der atomaren Strukturen auf. Infolge des von außen angelegten elektrischen Feldes wirken Kräfte auf die Ladungsträger, die dazu führen, dass die Atome bzw. Moleküle in der einen Richtung negativ und in der entgegengesetzten Richtung positiv **polarisiert** werden.

Als Ursache für die Polarisation können unterschiedliche Mechanismen verantwortlich sein. Von **Verschiebungspolarisation** spricht man, wenn die positiven und negativen Ladungsträger beim Anlegen eines äußeren Feldes gegeneinander verschoben werden. Die an zwei gegenüberliegenden Seiten entgegengesetzt geladenen Teilchen werden als **Dipole** bezeichnet. Befinden sich zwei Punktladungen $\pm Q$ im Abstand d, dann bezeichnet man das Produkt aus dem von der negativen zur positiven Ladung zeigenden Abstandsvektor $\vec{\mathbf{d}}$ mit dem positiven Wert der Ladung Q als **Dipolmoment** $\vec{\mathbf{p}}$

$$\vec{\mathbf{p}} = Q\vec{\mathbf{d}} \,. \tag{1.62}$$

Diese Definition lässt sich verallgemeinern. Handelt es sich bei den Ladungen nicht um konzentrierte Punktladungen, sondern um räumlich verteilte Ladungen, dann verwendet man für $\vec{\mathbf{d}}$ den vektoriellen Abstand zwischen den Schwerpunkten der beiden Ladungsanordnungen $+Q$ und $-Q$. Ein Beispiel für die Verschiebungspolarisation ist in ▶Abb. 1.24 dargestellt. Unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes verschiebt sich die Elektronenhülle gegenüber dem Atomkern. Man spricht in diesem Fall von **Elektronenpolarisation**.

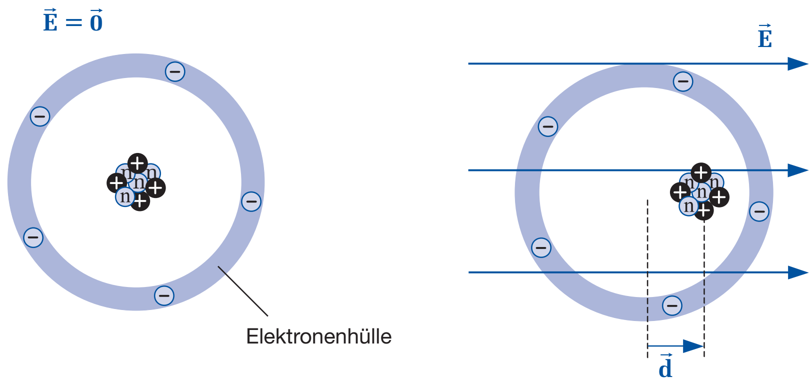


Abbildung 1.24: Elektronenpolarisation

Ein weiteres Beispiel für die Verschiebungspolarisation tritt in Substanzen auf, die Ionen enthalten. Die Situation bei der so genannten Ionenpolarisation ist vergleichbar dem vorhergehenden Beispiel. Die positiven Ionen werden in Richtung der elektrischen Feldstärke und die negativen Ionen in Gegenrichtung verschoben.

Ein etwas anderer Mechanismus liegt der **Orientierungspolarisation** zugrunde. Manche Moleküle besitzen aufgrund ihres unsymmetrischen Aufbaus bereits ein permanentes Dipolmoment. Bei dem in ▶Abb. 1.25 dargestellten Wassermolekül ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für die Hüllenelektronen der beiden Wasserstoffatome in der Nähe des Sauerstoffkerns größer als in der Nähe der beiden H-Kerne (Protonen). Als Folge dieser Ionenbindung enthält das Sauerstoffatom eine mittlere negative Ladung und die Wasserstoffatome enthalten eine mittlere positive Ladung.

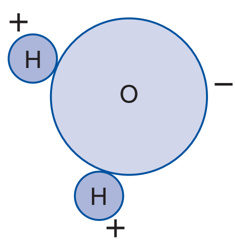


Abbildung 1.25: Wassermolekül H_2O

Das Dipolmoment entsteht dadurch, dass die Schwerpunkte der positiv bzw. negativ geladenen Ionen nicht zusammenfallen. Solange kein elektrisches Feld vorhanden ist, sind die Dipolmomente der Moleküle innerhalb der Flüssigkeit statistisch verteilt und es ist keine Polarisation nach außen feststellbar. Unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes erfahren die beiden Ladungen eines Dipols Kräfte in entgegengesetzter Richtung. Die Zerlegung dieser Vektoren gemäß ▶Abb. 1.26 zeigt, dass neben einer Kraftkomponente in Längsrichtung des Dipols eine weitere Kraftkomponente entsteht, die ein Drehmoment auf den Dipol ausübt. Die Dipole werden in Abhängigkeit von dem Wert der Feldstärke mehr oder weniger in Feldrichtung ausgerichtet, so dass auch makroskopisch betrachtet eine Polarisation auftritt. Dieser Effekt ist im Gegensatz zur Verschiebungspolarisation stark temperaturabhängig, da die Wärmebewegungen der Moleküle einer geordneten Ausrichtung entgegenwirken.

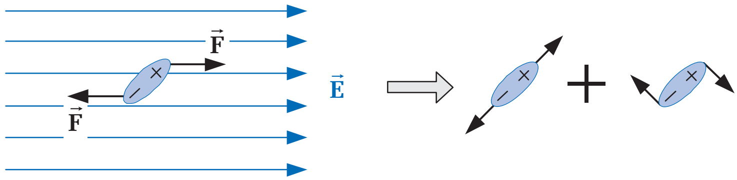


Abbildung 1.26: Drehmoment auf einen Dipol im homogenen Feld

Befinden sich N Dipole in einem Volumen V, dann wird die auf das Volumen bezogene vektorielle Summe der Dipolmomente als **dielektrische Polarisation** $\vec{\mathbf{P}}$

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{1}{V}\sum_{n=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_n \tag{1.63}$$

und das nicht leitende Material als **Dielektrikum** bezeichnet. Für den Sonderfall gleich gerichteter Dipole vereinfacht sich die Beziehung (1.63) zu

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{N\,\vec{\mathbf{p}}}{V}\,. \tag{1.64}$$

Die Ladungen der Dipole bezeichnet man als **Polarisationsladungen**, die frei beweglichen Ladungen bei den Metallen dagegen als **freie Ladungen**. Diese Unterscheidung ist physikalisch begründet. Während man die freien Ladungen voneinander trennen kann, ist diese Trennung bei den Polarisationsladungen nicht möglich. Aus diesem Grund ist die gesamte Polarisationsladung in einem Dielektrikum immer gleich Null. Die influenzierten Ladungen auf den beiden Scheibchen der Abb. 1.21 sind in diesem Sinne freie Ladungen, da sie durch getrennte Herausnahme der beiden Scheibchen aus dem Feld separiert werden können.

Durch die besondere Ausrichtung der Dipole im homogenen Feld heben sich ihre Wirkungen im Inneren des Dielektrikums auf. Betrachtet man die ▶Abb. 1.27, dann erkennt man jedoch, dass sich infolge der Ladungsträgerverschiebung an den Oberflächen des Dielektrikums Ladungsverteilungen ausbilden, die in ihrer Wirkung den Flächenladungen bei den Leitern vergleichbar sind[5].

5 Die geordnete Ausrichtung aller Dipole in der Abb. 1.27 dient nur zur Veranschaulichung der entstehenden Flächenladungen, in der Praxis werden die Dipole bei den üblichen Temperaturen relativ ungeordnet bleiben und die makroskopisch wirksame Polarisation kommt lediglich durch die Mittelwertbildung über die unvorstellbar große Zahl der nur zum Teil ausgerichteten Moleküle entsprechend Gl. (1.63) zustande.

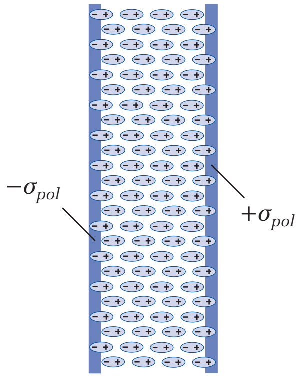


Abbildung 1.27: Polarisationsflächenladung

Als Folge der Polarisation wird das elektrische Feld $\vec{\mathbf{E}}$ im Dielektrikum bei gleicher Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ zwar schwächer, es verschwindet aber nicht völlig wie beim Leiter. Dieser Zustand ist schematisch in ▶Abb. 1.23b durch den größeren Abstand zwischen den Feldlinien im Dielektrikum angedeutet. Auch hier ist die Situation im mikroskopischen Bereich sehr kompliziert. Die elektrische Feldstärke wird zwischen den Molekülen sehr stark ortsabhängig sein, so dass die angesprochene Reduzierung der Feldstärke im Dielektrikum nicht für einen beliebigen Punkt innerhalb des Materials gilt, sondern wiederum als Mittelwert über einen Bereich, dessen Ausdehnung wesentlich größer als die Abmessungen der Moleküle sein muss.

Vom Standpunkt einer makroskopischen Betrachtungsweise aus kann die Reduzierung der elektrischen Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$ im Dielektrikum bei gleicher Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ durch einen dimensionslosen Faktor ε_r erfasst werden, der als (relative) **Dielektrizitätszahl** bezeichnet wird. Die Gl. (1.34) wird also folgendermaßen erweitert

$$\boxed{\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon\,\vec{\mathbf{E}}} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \varepsilon_r\,\varepsilon_0 = \text{Dielektrizitätskonstante.} \tag{1.65}$$

Merke

Die Dielektrizitätszahl ε_r beschreibt das Verhältnis der elektrischen Feldstärke ohne Dielektrikum zur elektrischen Feldstärke im Dielektrikum bei gleicher Flussdichte.

Die Beziehung (1.65) setzt voraus, dass zwischen den beiden Feldgrößen $\vec{\mathbf{D}}$ und $\vec{\mathbf{E}}$ ein linearer Zusammenhang besteht und dass beide Feldgrößen gleich gerichtet sind. Mit den Materialien, bei denen diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, werden wir uns im weiteren Verlauf nicht beschäftigen. In der Praxis tritt zudem häufig der Fall auf, dass ε_r ortsabhängig ist und von weiteren physikalischen Einflussgrößen abhängt wie z.B. von der Temperatur, vom Druck oder von der Frequenz bei zeitlich veränderlichen Feldgrößen.

In der folgenden Tabelle ist die Dielektrizitätszahl für verschiedene Materialien angegeben.

Tabelle 1.1

Dielektrizitätszahl ε_r für verschiedene Materialien

Stoff	ε_r	Stoff	ε_r
Trockene Luft	1,000594	Polyäthylen	2,3
Bariumtitanat	1 000 ... 4 000	Polystyrol	2,3 ... 2,7
Bernstein	2,8	Porzellan	6,0 ... 8,0
Glimmer	7	Quarz	3,5 ... 4,5
Gummi	2,6	Quarzglas	4
Hartpapier	5,0 ... 6,0	Transformatorenöl	2,2 ... 2,5
Papier	1,2 ... 3,0	Destilliertes Wasser	81
Pertinax	3,5 ... 5,5		

In Luft unterscheidet sich der Wert ε_r nur unwesentlich von dem Wert im Vakuum $\varepsilon_r = 1$, d.h. in Luft kann praktisch in allen Fällen $\varepsilon = \varepsilon_0$ gesetzt werden.

Im Gegensatz zur Gl. (1.65) kann der Zusammenhang zwischen den beiden vektoriellen Feldgrößen als Folge der dielektrischen Materialeigenschaften auch auf andere Weise formelmäßig erfasst werden. Man kann nämlich die Dielektrizitätszahl ε_r auch auffassen als die Erhöhung der elektrischen Flussdichte im Dielektrikum gegenüber der elektrischen Flussdichte im Vakuum bei gleicher elektrischer Feldstärke. Denkt man sich also die elektrische Flussdichte im Dielektrikum zusammengesetzt aus der Flussdichte, die bereits bei Abwesenheit des Dielektrikums vorliegt $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}$, und dem zusätzlich durch das Dielektrikum verursachten Anteil $\vec{\mathbf{P}}$, dann erhält man die Darstellung

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} \,. \tag{1.66}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Beziehungen (1.65) und (1.66) findet man den Zusammenhang

$$\vec{\mathbf{P}} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\,\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0\, \chi \vec{\mathbf{E}} \,. \tag{1.67}$$

Nach dieser Gleichung sind Polarisation und Feldstärke zueinander proportional. Die Differenz χ zwischen der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ der Materie und dem Wert 1 des Vakuums wird **dielektrische Suszeptibilität** genannt.

Nach den vorstehenden Gleichungen ergeben sich prinzipiell zwei Möglichkeiten, die besonderen Eigenschaften eines Dielektrikums in den Rechnungen zu berücksichtigen, zum einen mithilfe der Dielektrizitätszahl ε_r nach Gl. (1.65), zum anderen mithilfe der

Polarisation $\vec{\mathbf{P}}$ nach Gl. (1.66). Die Rechnung mit der Polarisation setzt aber die Kenntnis der **Polarisationsflächenladungen** voraus, die sich z.B. an den Oberflächen des Dielektrikums in Abb. 1.23b ausbilden. Bei nicht homogenen Materialeigenschaften heben sich die Wirkungen der Dipole im Inneren der Dielektrika nicht vollständig auf, so dass in diesem Fall zusätzlich mit einer ortsabhängigen **Polarisationsraumladung** gerechnet werden muss. Aus diesem Grund werden wir in den folgenden Abschnitten den Einfluss der Dielektrika auf die Feldverteilung nicht durch die Polarisationsladungen, sondern durch die skalare Dielektrizitätszahl ε_r erfassen.

1.15 Kräfte im inhomogenen Feld

In den vorausgegangenen Abschnitten haben wir die Influenz und die Polarisation als Folge-Erscheinungen der Kräfte auf die Ladungsträger im elektrischen Feld kennen gelernt. Damit verbunden war die vollkommene Abschirmung des Leiterinneren gegenüber dem äußeren Feld bzw. die Reduzierung der Feldstärke im Inneren eines Dielektrikums.

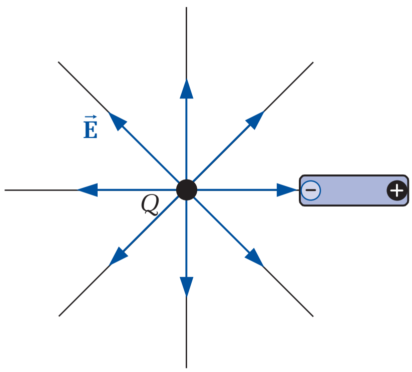


Abbildung 1.28: Leitender ungeladener Körper im Feld einer Punktladung

Befindet sich ein leitender ungeladener Körper oder ein aus dielektrischem Material bestehender Körper in einem *homogenen* elektrischen Feld wie in der Abb. 1.23, dann heben sich die Kräfte auf die positiven und auf die negativen Ladungsträger gegenseitig auf. Es kann zwar im allgemeinen Fall ein Drehmoment auf den Körper ausgeübt werden (Abb. 1.26), die Gesamtkraft verschwindet aber. Bringen wir dagegen einen leitenden ungeladenen Körper in ein *inhomogenes* Feld, z.B. in das Feld einer positiven Punktladung gemäß ▶Abb. 1.28, dann wird wegen der mit wachsendem Abstand von der Punktladung abnehmenden Feldstärke die Kraft auf die influenzierten negativen Ladungsträger dominieren und es wird sich eine resultierende (anziehende) Kraft einstellen. Besitzt die Feld erzeugende Ladung Q einen Wert $Q < 0$, dann wird sich auch das Vorzeichen bei den influenzierten Ladungen umkehren und es tritt auch in diesem Fall eine anziehende Kraft auf. Aus der Tatsache, dass sich zwei Körper gegenseitig anziehen, kann also nicht zwangsläufig geschlossen werden, dass beide Körper

Gesamtladungen unterschiedlichen Vorzeichens tragen. Im vorliegenden Beispiel entsteht eine anziehende Kraft zwischen einem geladenen und einem ungeladenen Körper. Da sowohl Influenz- als auch Polarisationserscheinungen immer zu einer anziehenden Kraft führen, kann aber umgekehrt aus der Abstoßung zweier Körper auf vorhandene Gesamtladungen gleichen Vorzeichens geschlossen werden.

1.16 Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten

In Kap. 1.14 haben wir gesehen, dass die senkrecht in das Dielektrikum eintretende elektrische Feldstärke unstetig ist, wie z.B. durch die Feldliniendichte in Abb. 1.23b angedeutet. Daher werden wir in diesem Abschnitt das Verhalten der beiden Feldgrößen $\vec{\mathbf{D}}$ und $\vec{\mathbf{E}}$ an den Sprungstellen der Materialeigenschaften etwas genauer untersuchen. Dazu betrachten wir die Oberfläche A des in ▶Abb. 1.29 dargestellten quaderförmigen Körpers, der aus einem Material der Dielektrizitätskonstanten ε_1 besteht, und der sich im umgebenden Raum der Dielektrizitätskonstanten ε_2 befindet. Die Feldgrößen in den beiden Bereichen werden mit den gleichen Indizes gekennzeichnet wie die Dielektrizitätskonstanten.

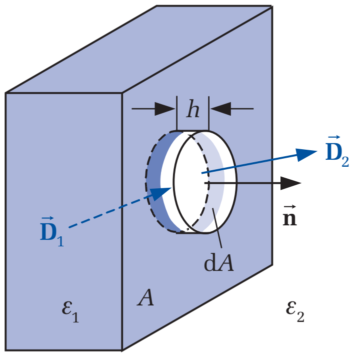


Abbildung 1.29: Grenzfläche mit Sprung der Dielektrizitätskonstanten

Die Vorgehensweise ist die gleiche wie bereits in Kapitel 1.11 beschrieben. Im ersten Schritt betrachten wir die Normalkomponente der Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$. Zu diesem Zweck legen wir um die Trennfläche zwischen den beiden Materialien einen kleinen Flachzylinder mit der verschwindenden Höhe $h \to 0$. Da sich innerhalb des Zylinders keine freie Gesamtladung befindet, muss der insgesamt durch die Oberfläche austretende elektrische Fluss nach Gl. (1.36) verschwinden. Wegen $h \to 0$ liefert der Zylindermantel keinen Beitrag, so dass der Fluss durch das elementare Flächenelement dA auf beiden Seiten der Trennfläche gleich ist. Der auf der einen Seite eintretende Fluss muss auf der anderen Seite wieder austreten

$$D_{n1}\mathrm{d}A = D_{n2}\mathrm{d}A \quad \rightarrow \quad \boxed{D_{n1} = D_{n2}}\,. \tag{1.68}$$

Die Stetigkeit der Normalkomponente der Flussdichte erfordert aber wegen der auf beiden Seiten unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten nach Gl. (1.65) einen Sprung in der Normalkomponente der elektrischen Feldstärke

$$D_{n1} = \varepsilon_1 E_{n1} = D_{n2} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}} \,. \tag{1.69}$$

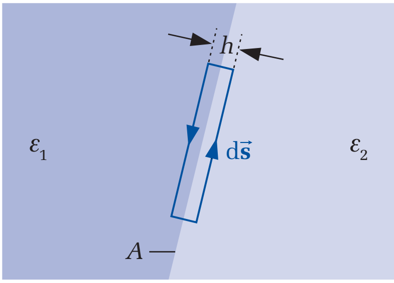


Abbildung 1.30: Grenzfläche mit Sprung der Dielektrizitätskonstanten

Im zweiten Schritt soll das Verhalten der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke untersucht werden. Zu diesem Zweck betrachten wir das in ▶Abb. 1.30 um die Trennfläche gelegte Rechteck mit der elementaren Seitenlänge ds und der wiederum verschwindenden Abmessung $h \rightarrow 0$. Bilden wir das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke entlang dieses Rechtecks, dann liefern wegen $h \rightarrow 0$ nur die Seiten ds einen Beitrag. Nach Gl. (1.22) muss aber dieses Umlaufintegral verschwinden, so dass die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke auf beiden Seiten der Trennfläche den gleichen Wert aufweist

$$E_{t1}\,\mathrm{d}s - E_{t2}\,\mathrm{d}s = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{E_{t1} = E_{t2}} \,. \tag{1.70}$$

Die Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke erfordert aber wegen der auf beiden Seiten unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten nach Gl. (1.65) einen Sprung in der Tangentialkomponente der Flussdichte

$$E_{t1} = \frac{1}{\varepsilon_1} D_{t1} = E_{t2} = \frac{1}{\varepsilon_2} D_{t2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \,. \tag{1.71}$$

Zusammengefasst gilt die Aussage:

Merke

Bei einer sprunghaften Änderung der Dielektrizitätskonstanten auf einer Fläche der Normalen $\vec{\mathbf{n}}$ sind die Normalkomponente der Flussdichte D_n und die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke E_t stetig. Die Forderungen für die beiden anderen Komponenten D_t und E_n ergeben sich aus den Beziehungen $\vec{\mathbf{D}}_1 = \varepsilon_1 \vec{\mathbf{E}}_1$ und $\vec{\mathbf{D}}_2 = \varepsilon_2 \vec{\mathbf{E}}_2$.

Diese Zusammenhänge sind in ▶Abb. 1.31 nochmals dargestellt. Aus den Beziehungen

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{E_{t1}}{E_{n1}}\frac{E_{n2}}{E_{t2}} \overset{(1.70)}{=} \frac{E_{n2}}{E_{n1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{D_{t1}}{D_{n1}}\frac{D_{n2}}{D_{t2}} \overset{(1.68)}{=} \frac{D_{t1}}{D_{t2}} \tag{1.72}$$

folgt für beide Feldvektoren das gleiche Brechungsgesetz

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{1.73}$$

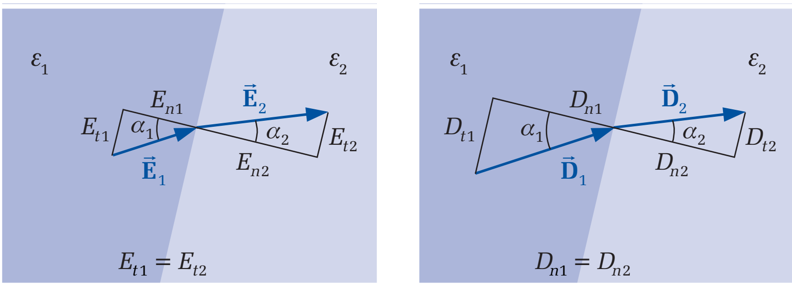


Abbildung 1.31: Zum Brechungsgesetz

1.17 Die Kapazität

Betrachten wir noch einmal die Abb. 1.23a. Wird die Gesamtladung $\pm Q$ auf den beiden Platten auf einen Wert $\pm kQ$ erhöht, dann wird sich nach Gl. (1.36) bzw. (1.53) die elektrische Flussdichte und wegen Gl. (1.65) auch die elektrische Feldstärke um den gleichen Faktor k erhöhen. Da aber auch die Spannung U als das Wegintegral der Feldstärke um diesen Faktor k ansteigen wird, sind die beiden Größen Ladung und Spannung zueinander proportional

$$Q \sim U \quad \rightarrow \quad \boxed{Q = CU}\,. \tag{1.74}$$

Diese Proportionalität gilt unabhängig von der Geometrie der Anordnung. Der Proportionalitätsfaktor C wird **Kapazität** genannt und hat die Dimension As/V. Wegen der großen Bedeutung wird eine eigene Bezeichnung Farad (nach Michael Faraday, 1791 – 1867) für die Dimension der Kapazität eingeführt: 1 F = 1 As/V (vgl. Tabelle D.2).

Merke

Unter der Kapazität C versteht man das Verhältnis aus der aufgenommenen Ladung Q zu der angelegten Spannung U. Sie ist ein Maß für die Fähigkeit eines Körpers, Ladungen zu speichern.

Der große Vorteil bei der Rechnung mit Kapazitäten besteht darin, dass hier integrale Größen verwendet werden, bei denen die zugrunde liegende dreidimensionale Feldverteilung nicht mehr explizit berechnet werden muss. Sie ist als Information gemäß der folgenden Gleichung bereits in dem Wert der Kapazität enthalten

$$Q \overset{(1.36)}{=} \oiint_A \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \overset{(1.53)}{=} \oiint_A \sigma \,\mathrm{d}A\,, \qquad U \overset{(1.30)}{=} \int_s \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}\,, \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \oiint_A \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}}{\int_s \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}}\,. \tag{1.75}$$

Während die Kapazität die Eigenschaft der Leiteranordnung (ihr *Fassungsvermögen*) beschreibt, wird eine Anordnung mit dieser Eigenschaft (das Bauelement) als **Kondensator** bezeichnet. Allgemein spricht man von einem Kondensator, wenn zwei leitende Beläge mit entgegengesetzten, gleich großen Ladungen vorhanden sind und alle Feldlinien, d.h. der gesamte elektrische Fluss, von der mit den positiven Ladungen besetzten Fläche zu der mit den negativen Ladungen besetzten Fläche gelangen. Bei dem Beispiel in Abb. 1.23a spricht man von einem Plattenkondensator. Je nach Anwendungsfall findet man sehr unterschiedliche Bauformen von Kondensatoren. Einige dieser Bauformen werden wir in den folgenden Kapiteln kennen lernen.

1.17.1 Der Plattenkondensator

Wir berechnen die Kapazität der in Abb. 1.23a dargestellten Anordnung unter den dort gemachten vereinfachenden Annahmen, dass das Feld zwischen den Platten homogen und das Streufeld am Rand der Platten vernachlässigbar sei[6]. Diese Annahme ist hinreichend gut erfüllt, wenn der Plattenabstand klein ist im Vergleich zu den Plattenabmessungen. Die Ladungen $\pm Q$ sind als homogene Flächenladungen $\pm\sigma = \pm Q/A$ auf den Plattenflächen A verteilt. Nach Gl. (1.54) ist die Flussdichte an der Plattenoberfläche gleich der Flächenladungsdichte. Die elektrische Feldstärke ist im Luftbereich zwischen den Platten durch die Gl. (1.34) gegeben

$$E \overset{(1.34)}{=} \frac{D}{\varepsilon_0} \overset{(1.54)}{=} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\,. \tag{1.76}$$

Die Spannung zwischen den Platten berechnet sich in diesem Sonderfall aus dem Produkt von Feldstärke E und Plattenabstand d, so dass die Kapazität des Plattenkondensators bereits bekannt ist

$$U \overset{(1.30)}{=} E\,d \qquad \to \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\,. \tag{1.77}$$

6 Durch die Vernachlässigung des Streufeldes ist der im Folgenden berechnete Wert für die Kapazität des Plattenkondensators etwas kleiner als der mit der exakten Feldverteilung berechnete Wert.

Verallgemeinern wir die Aufgabenstellung dahingehend, dass der Raum zwischen den beiden Platten mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätszahl ε_r ausgefüllt ist, dann ändert sich die Gl. (1.76) und damit die Kapazität in der folgenden Weise

$$E \overset{(1.65)}{=} \frac{D}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0} \overset{(1.54)}{=} \frac{\sigma}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 A} \quad \rightarrow \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0\,A}{d} = \frac{\varepsilon\,A}{d}}\,. \tag{1.78}$$

Die Kapazität des idealen Plattenkondensators ist proportional zur Fläche A, umgekehrt proportional zum Plattenabstand d und proportional zur Dielektrizitätskonstanten. Sie hängt also nur von der Geometrie und den Materialeigenschaften ab, nicht jedoch von der auf dem Kondensator befindlichen Ladung.

Beispiel 1.4: Zahlenbeispiel

Welche Fläche müssen die Platten eines Kondensators haben, der in Luft bei einem Plattenabstand von 1 mm die Kapazität von 1 F aufweisen soll?

Lösung:

$$A = \frac{C\,d}{\varepsilon_0} = \frac{1\dfrac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}\cdot 1\,\mathrm{mm}}{8{,}854\cdot 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}} = \frac{1\,\mathrm{mm}}{8{,}854\cdot 10^{-12}\,\dfrac{1}{\mathrm{m}}} = \frac{10^9}{8{,}854}\,\mathrm{m}^2 = 113\,\mathrm{km}^2 \tag{1.79}$$

Man erkennt an diesem Zahlenbeispiel, dass die Einheit F sehr groß ist. Die üblicherweise verwendeten Kondensatoren besitzen Kapazitätswerte im Bereich µF, nF oder pF.

1.17.2 Der Kugelkondensator

Als zweites Beispiel soll die Kapazität eines Kugelkondensators berechnet werden. Dieser besteht aus den in der ▶Abb. 1.32 dargestellten konzentrischen, leitenden Kugelschalen der Radien a und $b > a$.

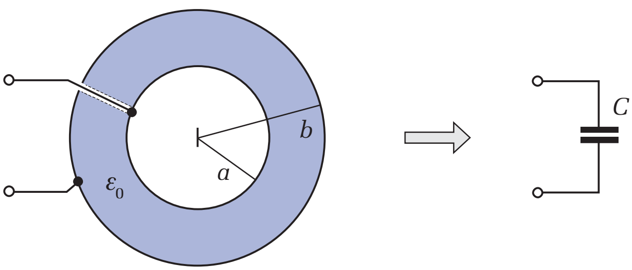


Abbildung 1.32: Kugelkondensator

Im ersten Schritt wird angenommen, dass sich auf der inneren Kugelschale die Ladung $+Q$ und auf der äußeren die Ladung $-Q$ befindet. Die Aufgabe besteht dann darin, die zu dieser Ladungsverteilung gehörige Spannung (Potentialdifferenz) zwischen den beiden Kugelschalen zu berechnen. Vernachlässigen wir den Einfluss des von der inneren Kugelschale nach außen geführten Anschlussdrahtes, dann werden sich die Ladungen aus Symmetriegründen gleichmäßig auf den Kugelflächen verteilen und wir können die Flussdichte im Bereich zwischen den beiden Kugeln aus der Gl. (1.50) übernehmen. Für die Spannung von der inneren zur äußeren Kugel erhalten wir mithilfe der Gl. (1.30) das gesuchte Ergebnis, aus dem die Kapazität des Kugelkondensators unmittelbar folgt

$$U_{ab} \overset{(1.30)}{=} \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \overset{(1.50)}{=} \int_a^b \vec{\mathbf{e}}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{\mathbf{e}}_r dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{ba} \overset{(1.74)}{=} \frac{Q}{C} \quad \rightarrow$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ba}{b-a} . \tag{1.80}$$

Mit diesem Ergebnis kann die reale dreidimensionale Ausgangsanordnung in Abb. 1.32 durch eine einfache skalare Größe beschrieben werden. Dargestellt wird dieses Bauelement dann durch das für einen Kondensator übliche Schaltzeichen auf der rechten Seite der Abbildung, wobei der in Abhängigkeit von den Abmessungen und von der Materialeigenschaft berechnete Kapazitätswert an dem Schaltzeichen mit angegeben werden kann.

Wir wollen das Ergebnis in Gl. (1.80) noch für einen Sonderfall kontrollieren. Lässt man nämlich die Abmessung b gegen a gehen, so dass $b = a + d$ mit einem kleinen Abstand $d \to 0$ gilt, dann sind die beiden Kugelschalen sehr dicht beieinander und die Abhängigkeit der Feldstärke vom reziproken Abstand $1/r^2$ spielt keine Rolle mehr. Die Gl. (1.80) geht dann in die Gleichung des Plattenkondensators über

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ba}{b-a} \approx \varepsilon_0 \frac{4\pi a^2}{d} = \varepsilon_0 \frac{A_K}{d} , \tag{1.81}$$

wobei die Größe der Platten durch die Kugelfläche A_K gegeben ist.

Aus der Gl. (1.80) lässt sich auch die Beziehung für die Kapazität einer Kugel gegen die unendlich ferne Hülle ableiten. Mit dem Grenzübergang $b \to \infty$ findet man unmittelbar das Ergebnis

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ba}{b-a} \approx 4\pi\varepsilon_0 \frac{ba}{b} = 4\pi\varepsilon_0 a . \tag{1.82}$$

Dieses ist proportional zum Kugelradius. Um einen Eindruck von der Größenordnung zu erhalten, kann man die Kapazität der Erdkugel gegen die unendlich ferne Hülle berechnen. Mit dem Radius $a \approx 6\,360$ km erhält man näherungsweise den sehr kleinen Wert $C \approx 700\ \mu$F.

Beispiel 1.5: Kapazität eines Koaxialkabels

Gegeben ist ein Koaxialkabel mit einem Innenleiter des Durchmessers $2a$ und einem üblicherweise aus metallischem Geflecht bestehenden Außenleiter, der den Innendurchmesser $2b$ und den Außendurchmesser $2c$ aufweist. In dem Zwischenraum befindet sich ein Material mit der Dielektrizitätskonstante ε. Die um den Außenleiter angebrachte Schutzisolierung spielt bei der folgenden Betrachtung keine Rolle. Zu bestimmen ist die Kapazität des Kabels pro Längeneinheit.

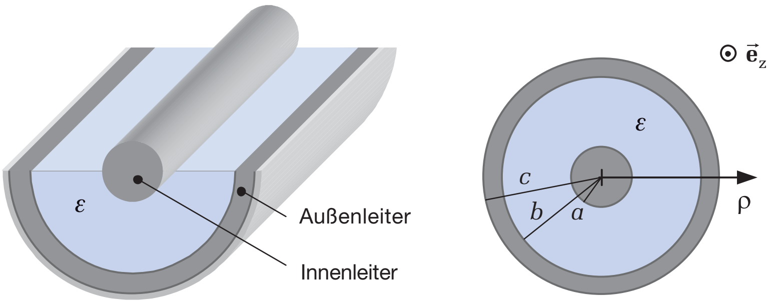


Abbildung 1.33: Querschnitt durch die Koaxialleitung

Lösung:

Im ersten Schritt wird pro Längeneinheit des Kabels eine Ladung $+Q$ auf dem Innenleiter und eine Ladung $-Q$ auf dem Außenleiter vorgegeben. Die Ladung auf dem Innenleiter wird sich als homogene Flächenladung auf der Leiteroberfläche verteilen. Die Berechnung der von dieser Ladung ausgehenden Flussdichte erfolgt analog zum Beispiel 1.2 und liefert das Ergebnis (1.39). Mit der Spannung zwischen Innen- und Außenleiter

$$U = \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} \overset{(1.39)}{=} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \vec{\mathbf{e}}_\rho \frac{Q}{2\pi a l} \frac{a}{\rho} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\rho \mathrm{d}\rho = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \int_a^b \frac{1}{\rho} \mathrm{d}\rho = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \ln\frac{b}{a} \tag{1.83}$$

erhalten wir die gesuchte Kapazität pro Länge

$$\frac{C}{l} = \frac{Q/l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} . \tag{1.84}$$

1.18 Einfache Kondensatornetzwerke

In der praktischen Schaltungstechnik kann der Fall eintreten, dass mehrere Kondensatoren zusammengeschaltet werden. Von den vielfältigen Möglichkeiten sollen hier nur die beiden grundlegenden Fälle betrachtet werden, nämlich die Parallelschaltung und die Reihenschaltung. Die Aufgabe besteht darin, die Anordnung mit mehreren Kondensatoren C_k mit $k = 1,2,...$ durch einen einzigen Kondensator C_{ges} zu ersetzen, der bezogen auf die beiden Anschlussklemmen das gleiche Verhalten aufweist.

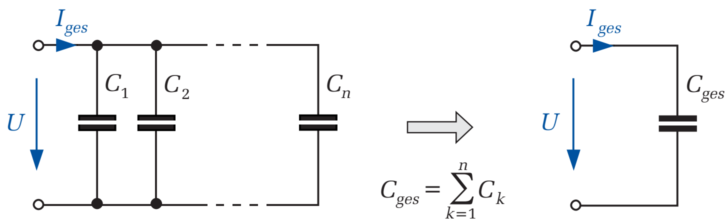


Abbildung 1.34: Parallelschaltung von Kondensatoren

Betrachten wir zunächst die **Parallelschaltung** in ▶Abb. 1.34. Alle oberen Kondensatorplatten sind leitend miteinander verbunden und liegen daher auf dem gleichen Potential. Da auch die unteren Kondensatorplatten auf gleichem Potential liegen, ist die Potentialdifferenz und damit die Spannung U für alle Kondensatoren gleich. An den einzelnen Kondensatoren gelten die Beziehungen $Q_k = C_k U$ und für den Gesamtkondensator muss $Q_{ges} = C_{ges} U$ gelten, wobei die Gesamtladung Q_{ges} der Summe der Ladungen Q_k auf den einzelnen Kondensatoren entsprechen muss. Addiert man die Beziehungen für die einzelnen Kondensatoren, dann gilt

$$Q_{ges} = \sum_{k=1}^{n} Q_k \overset{(1.74)}{=} \sum_{k=1}^{n} C_k U = U \sum_{k=1}^{n} C_k = U C_{ges} \quad \rightarrow \quad \boxed{C_{ges} = \sum_{k=1}^{n} C_k} . \tag{1.85}$$

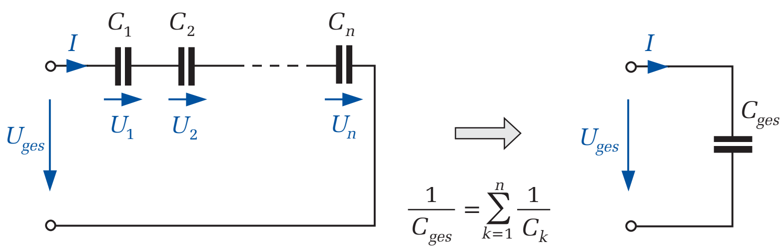


Abbildung 1.35: Reihenschaltung von Kondensatoren

Bei der **Reihenschaltung** kann man von folgender Überlegung ausgehen. Die gesamte an den Eingangsanschlüssen vorhandene Spannung (Potentialdifferenz) U_{ges} setzt sich aus der Summe der Teilspannungen U_k an den einzelnen Kondensatoren zusammen. Bringt man auf die beiden äußeren, mit den Anschlussklemmen verbundenen Platten eine Ladung $\pm Q$, dann werden auf den inneren Platten Ladungen influenziert und zwar so, dass sich auf jeweils zwei gegenüberliegenden Platten gleich große Gesamtladungen $\pm Q$ gegenüberstehen (vgl. Abb. 1.23c), d.h. alle Kondensatoren weisen die gleichen Ladungen $\pm Q$ auf und es gelten die Beziehungen $U_k = Q/C_k$. Addiert man diese Ausdrücke, dann findet man durch Vergleich mit der Beziehung für den Gesamtkondensator $Q = C_{ges} U_{ges}$ das Ergebnis

$$U_{ges} = \sum_{k=1}^{n} U_k \overset{(1.74)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{Q}{C_k} = Q \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k} = Q \frac{1}{C_{ges}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}} \,. \tag{1.86}$$

Für zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren C_1 und C_2 folgt daraus

$$C_{ges} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \,. \tag{1.87}$$

Bei der Reihenschaltung ist die Gesamtkapazität kleiner als die kleinste vorkommende Einzelkapazität.

Merke

Bei der Parallelschaltung von Kondensatoren addieren sich die Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren, bei der Reihenschaltung ist der Kehrwert der Gesamtkapazität gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten.

Beispiel 1.6: Kondensatornetzwerk

Gegeben ist das Kondensatornetzwerk in ▶Abb. 1.36 mit den Kapazitäten $C_1 = C$, $C_2 = 2C$ und $C_3 = C_4 = 10C$. Zwischen den Anschlussklemmen 1-0 wird eine Gleichspannungsquelle mit der unbekannten Spannung U_1 angeschlossen. Zwischen den Anschlussklemmen 2-0 wird eine Gleichspannung U_2 gemessen.

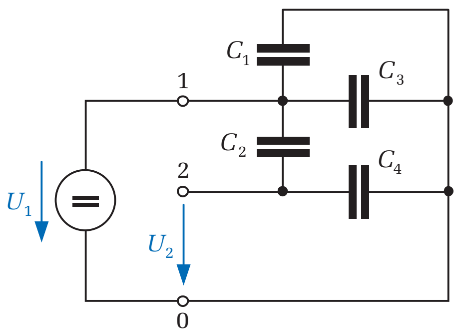


Abbildung 1.36: Kondensatornetzwerk

1. Welchen Wert hat die Spannung U_1?

2. Die Gleichspannungsquelle U_1 wird durch ein Kapazitätsmessgerät ersetzt. Welche Gesamtkapazität C_{10} wird zwischen den Klemmen 1-0 gemessen?

3. Die Gleichspannungsquelle U_1 wird durch einen Kurzschluss (leitende Verbindung zwischen den Klemmen 1-0) ersetzt. Welche Gesamtkapazität C_{20} wird zwischen den Klemmen 2-0 gemessen?

Die Ergebnisse sind in Abhängigkeit von C und U_2 anzugeben.

Lösung:

1. Auf den in Reihe geschalteten Kondensatoren C_2 und C_4 befinden sich gleiche Ladungen:

$$Q \overset{(1.74)}{=} C_4 U_2 = C_2 (U_1 - U_2) \quad \rightarrow \quad U_1 = \frac{C_2 + C_4}{C_2} U_2 = 6U_2 \tag{1.88}$$

2. Mit den Beziehungen (1.85) und (1.86) erhalten wir

$$C_{10} = C_1 + C_3 + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = C + 10C + \frac{2C \cdot 10C}{2C + 10C} = \frac{38}{3} C\,. \tag{1.89}$$

3. C_1 und C_3 sind kurzgeschlossen:

$$C_{20} = C_2 + C_4 = 2C + 10C = 12C \tag{1.90}$$

1.19 Praktische Ausführungsformen von Kondensatoren

Der Plattenkondensator ist die einfachste Form eines kapazitiven Bauelementes. Während der Kugelkondensator mehr zur Übung berechnet wurde, wollen wir jetzt einige in der Praxis häufig anzutreffende Bauformen betrachten.

1.19.1 Der Vielschichtkondensator

Der Vielschichtkondensator besteht aus mehreren übereinandergeschichteten Platten, die abwechselnd dem einen oder anderen Anschluss zugeordnet sind. Die Kapazität C zwischen jeweils zwei Platten ist mit deren Flächeninhalt $A = ab$ nach Gl. (1.78) bekannt. Im Gegensatz zum einfachen Plattenkondensator tragen alle inneren Platten mit ihren beiden Oberflächen zur Kapazität bei. Besteht jeder Kondensatoranschluss aus n Platten (in ▶Abb. 1.37 gilt $n = 5$), dann sind $2n - 1$ Kondensatoren parallel geschaltet und für die Gesamtkapazität dieses Bauelementes gilt die Beziehung

$$C_{ges} = (2n-1)\, C = (2n-1)\, \frac{\varepsilon ab}{d}\,. \tag{1.91}$$

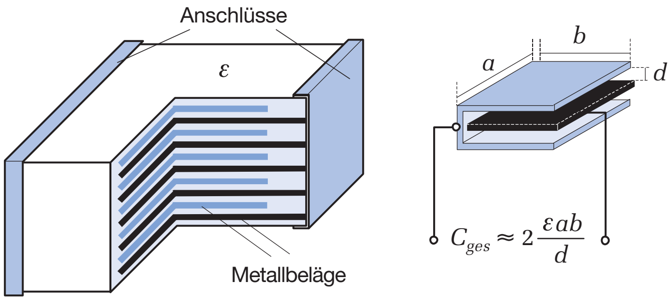


Abbildung 1.37: Vielschichtkondensator im Querschnitt

Will man große Kapazitätswerte bei gleichzeitig kleinem Bauelementevolumen realisieren, dann müssen nach Gl. (1.78) Materialien mit großen Dielektrizitätskonstanten verwendet werden. Alternativ kann auch der Plattenabstand d reduziert werden. Dieser Möglichkeit sind jedoch Grenzen gesetzt, da es zu Spannungsdurchbrüchen zwischen den beiden Elektroden kommen kann, sofern die Feldstärke einen Maximalwert überschreitet. Wegen $U = Ed$ dürfen die Kondensatoren nur bis zu einer maximalen Spannung betrieben werden.

1.19.2 Der Drehkondensator

Der Drehkondensator besteht aus einem fest stehenden Plattenpaket (Stator) und einem drehbar gelagerten Plattenpaket (Rotor). In Abhängigkeit von der Rotorposition ändert sich die überdeckte Fläche A und damit auch die Kapazität.

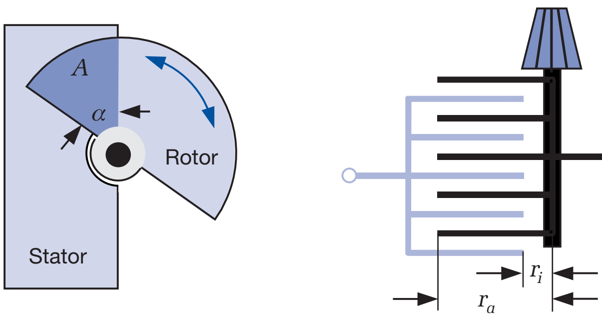


Abbildung 1.38: Drehkondensator

Da Drehkondensatoren meist ohne Dielektrikum aufgebaut werden, gilt mit den Bezeichnungen der ▶Abb. 1.38 für deren Kapazität

$$C_{ges} = (2n-1)\,\frac{\varepsilon_0 A}{d} = (2n-1)\,\frac{\varepsilon_0}{d}\left(\pi r_a^{\,2} - \pi r_i^{\,2}\right)\frac{\alpha}{2\pi} = (2n-1)\,\frac{\varepsilon_0\,\alpha\left(r_a^{\,2} - r_i^{\,2}\right)}{2d}\;. \tag{1.92}$$

Bei den halbkreisförmigen Platten steigt die Kapazität linear mit dem Drehwinkel an. Durch andere Formgebung der Platten kann für spezielle Anwendungen ein anderer, z.B. logarithmischer Zusammenhang zwischen C und α realisiert werden.

1.19.3 Der Wickelkondensator

Ebenfalls sehr weit verbreitet sind Wickelkondensatoren. Diese können z.B. aus zwei Metallfolien und zwei Kunststofffolien bestehen, die abwechselnd aufeinandergelegt und aufgerollt werden (▶Abb. 1.39). Die Kapazität im nicht aufgerollten Zustand kann mit der Beziehung für den Plattenkondensator berechnet werden, infolge des Aufrollens wird die Kapazität etwa doppelt so groß, da abgesehen von der inneren und äußeren Windung beide Seiten der Metallfolien zur Kapazität beitragen.

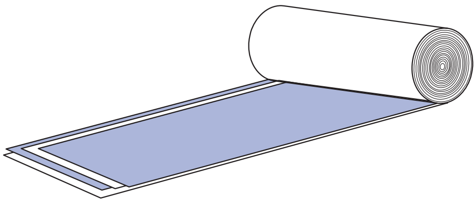


Abbildung 1.39: Aufbau eines Wickelkondensators

Anstatt separate Metallfolien zu verwenden, können auch dünne Metallschichten auf die Kunststofffolien aufgedampft werden. Zum Schutz gegen mechanische Beschädigungen werden die Wickel mit Kunstharz vergossen und in einem Gehäuse aus Metall oder Kunststoff untergebracht.

1.20 Die Teilkapazitäten

Besteht eine Anordnung im Gegensatz zu den bisher betrachteten Beispielen aus mehreren leitenden Teilen wie z.B. die drei in ▶Abb. 1.40 dargestellten Stränge einer Freileitung, dann ist die Kapazität im Sinne der Gl. (1.74) nicht mehr definierbar. Der von einer Leitung ausgehende elektrische Fluss endet teilweise auf den anderen Leitungen und zum Teil auf der unendlich fernen Hülle bzw. auf dem Erdboden. Man spricht in diesem Fall von **Teilkapazitäten** zwischen den einzelnen Leitern und verwendet als **Ersatzschaltbild** eine Anordnung mit mehreren Kondensatoren. Die Werte der einzelnen Teilkapazitäten sind proportional zu den jeweiligen elektrischen Teilflüssen zwischen den betreffenden Leitern. Die diese Teilflüsse verursachenden Teilladungen werden im Ersatzschaltbild den jeweiligen Kondensatorplatten zugeordnet.

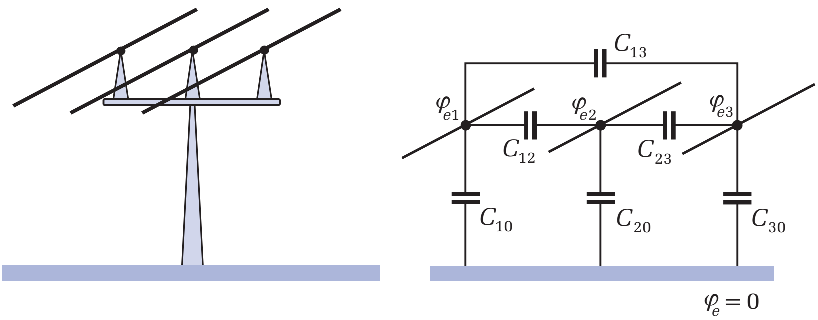


Abbildung 1.40: Teilkapazitäten bei einer Freileitungsanordnung

1.21 Der Energieinhalt des Feldes

Da Kondensatoren häufig zur Speicherung elektrischer Energie eingesetzt werden, wollen wir die Frage untersuchen, wie viel Energie in einem Kondensator gespeichert werden kann und welcher Zusammenhang zur Kapazität (zum *Fassungsvermögen*) des Kondensators besteht.

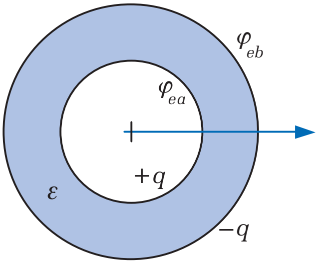


Abbildung 1.41: Zur Berechnung der in einem Kondensator gespeicherten Energie

Zu diesem Zweck untersuchen wir den Ladevorgang des in ▶Abb. 1.41 dargestellten Kugelkondensators, der, ausgehend von dem ungeladenen Anfangszustand, so lange aufgeladen werden soll, bis seine beiden Kugelschalen im Endzustand die Gesamtladungen $\pm Q$ tragen. Wir betrachten einen willkürlichen Zeitpunkt während des Ladevorgangs, bei dem auf beiden Kugelschalen momentan die Ladungen $\pm q$ vorliegen. Die Ladungen werden jetzt mit Kleinbuchstaben bezeichnet, um deutlich zu machen, dass es sich nicht mehr um konstante Größen, sondern um zeitveränderliche bzw. von dem momentanen Zustand des Ladevorgangs abhängige Größen handelt. Zur Fortsetzung des Ladevorgangs wird eine elementare Ladung $\mathrm{d}q$ von der äußeren Schale zur inneren transportiert. Der dadurch entstehende Energiezuwachs $\mathrm{d}W_e$ ist nach Gl. (1.23) proportional zur bewegten Ladung $\mathrm{d}q$ und zur Potentialdifferenz $\varphi_{ea} - \varphi_{eb}$, die von der Ladung durchlaufen wird. Die Potentialdifferenz entspricht aber nach Gl. (1.30) der momentan zwischen den Kugelschalen anliegenden Spannung u_{ab}, die nach Gl. (1.74) selbst eine Funktion der momentanen Ladungsverteilung $\pm q$ und damit ebenfalls zeitabhängig ist

$$\mathrm{d}W_e \overset{(1.23)}{=} \left(\varphi_{ea} - \varphi_{eb}\right) \mathrm{d}q \overset{(1.30)}{=} u_{ab}\,\mathrm{d}q \overset{(1.74)}{=} \frac{1}{C} q \,\mathrm{d}q \,. \tag{1.93}$$

Die gesamte in dem Kondensator gespeicherte elektrische Energie W_e kann durch Integration der elementaren Beiträge über den gesamten Ladevorgang berechnet werden

$$W_e = \frac{1}{C} \int_0^Q q \,\mathrm{d}q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \overset{(1.74)}{\rightarrow} \quad \boxed{W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U} \,. \tag{1.94}$$

Bei der mathematischen Herleitung wurde zu keinem Zeitpunkt die spezielle Geometrie des Kondensators berücksichtigt, d.h. die abgeleitete Beziehung ist unabhängig von der Bauform des Kondensators und gilt allgemein.

Merke

Die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie ist proportional zum Produkt aus der Kapazität C und dem Quadrat der angelegten Spannung U.

Beispiel 1.7: Parallelschaltung von Kondensatoren

Zwei Kondensatoren C_1 und C_2 mit den unterschiedlichen Spannungen U_1 und U_2 sollen parallel geschaltet werden, d.h. die Anschlüsse mit dem jeweils höheren Potential und die Anschlüsse mit dem jeweils niedrigeren Potential werden leitend miteinander verbunden. Wie ändert sich die Gesamtenergie durch diese Maßnahme?

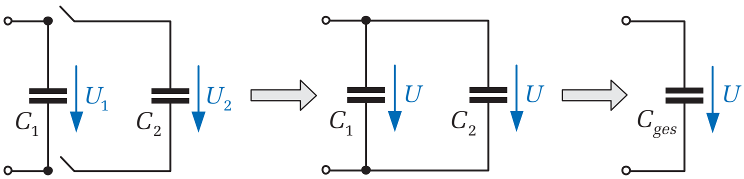


Abbildung 1.42: Zusammenschaltung der Kondensatoren

Lösung:

Im Ausgangszustand beträgt die Energie

$$W_{e0} \overset{(1.94)}{=} \frac{1}{2} C_1 U_1^2 + \frac{1}{2} C_2 U_2^2 . \tag{1.95}$$

Nach dem Zusammenschalten beträgt die Gesamtkapazität nach Gl. (1.85) $C_{ges} = C_1 + C_2$. Da die Ladungssumme erhalten bleiben muss (vgl. Kap. 1.1), befindet sich auf dem Kondensator C_{ges} die Gesamtladung $Q_{ges} = Q_1 + Q_2 = C_1 U_1 + C_2 U_2$. Für die Energie in den parallel geschalteten Kondensatoren gilt demnach

$$W_e \overset{(1.94)}{=} \frac{1}{2} \frac{Q_{ges}^2}{C_{ges}} = \frac{1}{2} \frac{(C_1 U_1 + C_2 U_2)^2}{C_1 + C_2} . \tag{1.96}$$

Die Energiedifferenz infolge des Zusammenschaltens

$$\Delta W_e = W_e - W_{e0} = \frac{-C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} (U_1 - U_2)^2 < 0 \tag{1.97}$$

ist negativ und entspricht daher einer Energieabnahme. Dieser Energieverlust wird verursacht durch die Ladungsträgerbewegung in den Verbindungsleitungen (vgl. Kap. 2) sowie durch die Abstrahlung elektromagnetischer Felder und ist umso größer, je größer die Spannungsdifferenz $U_1 - U_2$ vor dem Zusammenschalten ist.

Nach dem Zusammenschalten ist die Spannung an beiden Kondensatoren gleich und nimmt den Wert

$$U = \frac{Q_{ges}}{C_{ges}} = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} \tag{1.98}$$

an. Bei dem Sonderfall zweier Kondensatoren mit gleicher Kapazität $C_1 = C_2 = C$, von denen der eine die Spannung U_1 aufweist und der andere zunächst ungeladen ist ($U_2 = 0$), werden infolge der Parallelschaltung sowohl die Gesamtenergie als auch die Spannung halbiert, d.h. es gelten die Gleichungen

$$W_e = \frac{1}{2} W_{e0} \qquad \text{und} \qquad U = \frac{1}{2} U_1 \,. \tag{1.99}$$

In der Gl. (1.75) wurden zwei Möglichkeiten zur Berechnung der Kapazität aufgezeigt, entweder aus den integralen Größen Q und U oder aus den Feldgrößen $\vec{\mathbf{D}}$ und $\vec{\mathbf{E}}$. Die Berechnung der Energie aus den integralen Größen ist in Gl. (1.94) angegeben. Die mathematische Formulierung zur Berechnung der Energie aus den Feldgrößen lässt sich am Beispiel des idealen Plattenkondensators (Abb. 1.23a) relativ einfach ableiten. Ersetzt man in der Gl. (1.94) die Spannung und die Kapazität entsprechend den Beziehungen (1.77) und (1.78), dann erhält man unmittelbar das Ergebnis

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon A}{d} (E\,d)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \underbrace{A\,d}_{V} \overset{(1.65)}{=} \frac{1}{2} E\,D\,V \,. \tag{1.100}$$

Für den Sonderfall des bei dem Plattenkondensator zugrunde gelegten homogenen Feldes erhält man die Energie durch Multiplikation des Ausdruckes $ED/2$ mit dem Volumen V. Der Faktor $ED/2$ (= Energie pro Volumen) wird **Energiedichte** genannt und hat die Dimension VAs/m^3. Bei gleich gerichteten Vektoren $\vec{\mathbf{E}}$ und $\vec{\mathbf{D}}$ kann die mit w_e bezeichnete Energiedichte auch als Skalarprodukt der vektoriellen Feldgrößen dargestellt werden

$$w_e = \frac{1}{2} E\,D = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} \,. \tag{1.101}$$

Betrachtet man den allgemeinen Fall eines nicht homogenen Feldes wie z.B. bei dem in Abb. 1.41 dargestellten Kugelkondensator, dann ist die Energiedichte ortsabhängig. Die in einem elementaren Volumenelement dV gespeicherte Energie dW_e erhält man in diesem Fall aus dem Produkt der an der betrachteten Stelle vorliegenden Energiedichte mit dem Volumenelement. Die gesamte in einem Volumen V gespeicherte Energie findet man durch Integration der elementaren Beiträge über das Volumen

$$W_e = \iiint_V w_e \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2} \iiint_V E\,D \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} \,\mathrm{d}V \,. \tag{1.102}$$

Beispiel 1.8: Energie im Kugelkondensator

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch die im Kugelkondensator der Abb. 1.41 nach Beendigung des Ladevorgangs gespeicherte Energie berechnen und zwar einmal mit den Feldgrößen $\vec{\mathbf{E}}$ und $\vec{\mathbf{D}}$ und zum Vergleich mit den skalaren Größen U und C.

Lösung:

Beginnen wir mit den Feldgrößen. Befindet sich auf der inneren Kugel die Ladung Q, dann ist die Flussdichte im Zwischenraum $a < \mathrm{r} < b$ nach Gl. (1.50) gegeben. Für die Energie erhalten wir das Integral

$$W_e \overset{(1.102)}{=} \frac{1}{2}\iiint_V E\,D\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon}\iiint_V \frac{1}{\mathrm{r}^4}\mathrm{d}V, \tag{1.103}$$

das mit dem Volumenelement in Kugelkoordinaten $\mathrm{d}V = \mathrm{r}^2 \sin\vartheta\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$ nach Gl. (B.23) zunächst das Zwischenergebnis

$$\iiint_V \frac{1}{\mathrm{r}^4}\mathrm{d}V = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\mathrm{r}=a}^{b} \frac{1}{\mathrm{r}^4}\mathrm{r}^2 \sin\vartheta\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 2\cdot 2\pi\int_a^b \frac{1}{\mathrm{r}^2}\mathrm{dr} = 4\pi\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = 4\pi\frac{b-a}{ba} \tag{1.104}$$

und durch Einsetzen in Gl. (1.103) die gespeicherte Energie

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{b-a}{ba} \tag{1.105}$$

liefert. Berechnen wir die Energie zur Kontrolle mit den skalaren Größen, dann erhalten wir unmittelbar dasselbe Ergebnis

$$W_e \overset{(1.94)}{=} \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \overset{(1.80)}{=} \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{b-a}{ba}. \tag{1.106}$$

An diesem Beispiel zeigt sich der Vorteil der skalaren Größen. Ist die Kapazität C eines Kondensators, unabhängig davon, wie kompliziert sein dreidimensionaler Aufbau auch immer sein mag, vorab durch Rechnung mit den Feldgrößen oder auch durch Messung bereits bekannt, dann werden die folgenden Berechnungen wesentlich einfacher. Dies gilt insbesondere für die Analyse von Schaltungen mithilfe der Netzwerktheorie, in der die Bauelemente nur noch durch geeignete **Ersatzschaltbilder** repräsentiert werden. Auf der anderen Seite ist die Feldberechnung immer dann notwendig, wenn entweder die Ersatzschaltbilder abgeleitet werden sollen oder wenn die Feldverteilung innerhalb der Bauelemente eine Rolle spielt. Dies kann z.B. der Fall sein, wenn die innerhalb des Kondensators auftretende ortsabhängige Feldstärke einen Maximalwert nicht überschreiten darf, damit das Bauelement nicht zerstört wird. In anderen Fällen stellt sich z.B. die Frage nach der örtlichen Verteilung der in einem Bauelement entstehenden Verluste (vgl. Kap. 2), um eine lokale Überhitzung und damit ebenfalls eine Zerstörung zu vermeiden. Diese Fragestellungen können naturgemäß mit den skalaren Größen nicht beantwortet werden.

ZUSAMMENFASSUNG

- Ausgangspunkt für die gesamte Elektrostatik ist das **Coulomb'sche Gesetz**, das die Kraftwirkungen zwischen Ladungen mathematisch beschreibt.
- Zur Erklärung der Kraftwirkungen zwischen Ladungen wird der Begriff des **elektrischen Feldes** eingeführt. Die elektrische Feldstärke ist ein Vektor, dessen Richtung mit der Richtung der Kraft auf eine positive Ladung übereinstimmt.
- Das **Feld mehrerer Ladungen** ergibt sich durch **Überlagerung der Beiträge** der einzelnen Ladungen.
- **Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld**, die Feldlinien beginnen bei den positiven und enden bei den negativen Ladungen.
- An den physikalisch beobachtbaren Kraftwirkungen ist immer nur eine extrem geringe Anzahl der in der Materie enthaltenen Ladungsträger beteiligt.
- Das **elektrostatische Feld** kann durch eine skalare Größe, nämlich das **elektrostatische Skalarpotential** beschrieben werden. Dieses ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Üblicherweise wird der unendlich fernen Hülle das Bezugspotential Null zugewiesen.
- **Die Potentialdifferenz** zwischen zwei Punkten wird als **elektrische Spannung** bezeichnet. Sie wird aus dem Wegintegral der elektrischen Feldstärke zwischen den beiden Punkten berechnet.
- **Räumliche Flächen** mit gleichem Potential werden als **Äquipotentialflächen** bezeichnet. Die elektrische Feldstärke steht senkrecht auf ihnen.
- Neben der elektrischen Feldstärke wird ein zweiter Feldvektor, die **elektrische Flussdichte**, eingeführt. Das über eine geschlossene Hüllfläche gebildete Integral der elektrischen Flussdichte entspricht der im Volumen eingeschlossenen Ladung. Für einfache, meist symmetrische Ladungsanordnungen lässt sich aus dieser Aussage die ortsabhängige Feldverteilung bestimmen.
- Auf einem leitenden Körper sind die Ladungen auf der Oberfläche so verteilt, dass er ein konstantes Potential annimmt. Im Leiterinneren verschwindet die elektrische Feldstärke. Auf der Oberfläche entspricht die Normalkomponente der Flussdichte dem Wert der Flächenladung. Die Tangentialkomponente verschwindet.
- An Materialsprungstellen treten so genannte Randbedingungen für die Feldgrößen auf. Befinden sich an der Trennstelle keine flächenhaft verteilten Ladungen, dann sind die Normalkomponente der Flussdichte und die Tangentialkomponente der Feldstärke stetig.
- Enthalten zwei leitende Körper entgegengesetzt gleiche Ladungen und verläuft der gesamte elektrische Fluss vom Körper mit den positiven Ladungen zum Körper mit den negativen Ladungen, dann bezeichnen wir das Verhältnis aus der positiven Ladung zur Spannung zwischen den beiden Körpern als **Kapazität**. Im verallgemeinerten Fall mit mehreren geladenen Körpern erhalten wir ein Netzwerk aus Teilkapazitäten.
- Ein Bauelement mit der Eigenschaft Kapazität nennen wir **Kondensator**. Es wird z.B. zur Speicherung elektrischer Energie verwendet.

Übungsaufgaben

Lösungen

Aufgabe 1.1 Kraftberechnung

Drei Punktladungen liegen in der Ebene $z = 0$. Die erste Punktladung Q_1 befindet sich im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems (x, y), die zweite Punktladung Q_2 liegt an der Stelle $x = 0$, $y = -a$ und die dritte Punktladung Q_3 auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius a. Die Position der dritten Punktladung Q_3 wird durch den Winkel φ beschrieben.

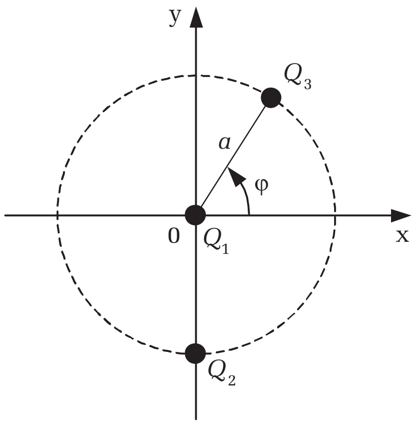


Abbildung 1.43: Punktladungsanordnung

1. Welche Kraft $\vec{\mathbf{F}}$ wirkt auf die Punktladung Q_1 im Ursprung?
2. Bestimmen Sie für den Sonderfall $Q_2 = Q_3$ alle Winkel $\varphi = \varphi_0$ so, dass der Betrag der Kraft $|\vec{\mathbf{F}}_0|$ auf die Punktladung Q_1 infolge der Punktladung Q_2 allein genauso groß ist wie der Betrag der Kraft $|\vec{\mathbf{F}}|$ infolge der beiden Punktladungen Q_2 und Q_3 zusammen.

Aufgabe 1.2 Flussberechnung

Gegeben ist ein homogenes elektrisches Feld $\vec{\mathbf{E}} = E_x \vec{\mathbf{e}}_x$. Das Feld durchsetzt eine senkrecht dazu angeordnete halbkugelförmige Fläche A_K mit der Flächennormalen $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{e}}_r$ und dem Kugelradius a. Der Mittelpunkt dieser halbkugelförmigen Fläche A_K liegt im Ursprung eines Kugelkoordinatensystems (r,ϑ,φ). Auf der z-Achse befindet sich an der Stelle $z = a/2$ eine Punktladung Q.

Welchen Wert muss die Punktladung annehmen, damit der elektrische Fluss Ψ durch die Fläche A_K insgesamt verschwindet?

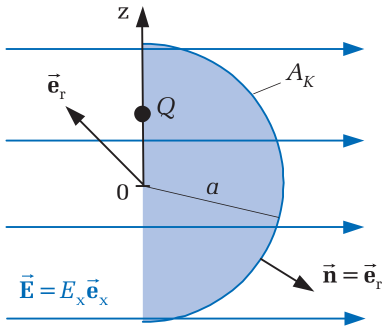


Abbildung 1.44: Fluss durch Hüllfläche

Aufgabe 1.3 Ladungsträgeranzahl

Gegeben ist ein Plattenkondensator der Abmessungen $A = 2 \times 2\ \text{cm}^2$, $d = 1$ mm mit Luftzwischenraum.

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Ladungsträger auf einer Platte, wenn eine Spannung von 100 V angelegt wird.
2. Wie viele Ladungsträger befinden sich auf der Fläche von 1 mm^2?

Aufgabe 1.4 Kapazitätsberechnung

Die beiden Platten eines Kondensators mit den Abmessungen a (in y-Richtung) und b (in z-Richtung) und dem Plattenabstand d sind an eine Gleichspannung U angeschlossen. Bis zur Höhe h befindet sich der Plattenkondensator in einer nichtleitenden Flüssigkeit mit $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ($\varepsilon_r > 1$), sonst in Luft ($\varepsilon_r = 1$).

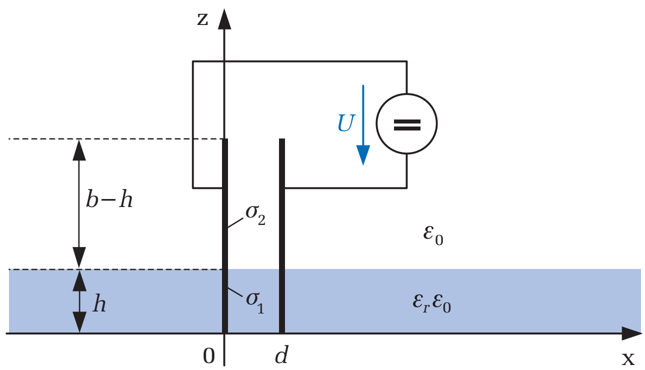


Abbildung 1.45: Kondensator mit bereichsweise unterschiedlichen Dielektrika

1. Geben Sie die Flächenladungsdichten σ_1 und σ_2 auf der Innenseite der linken Platte an.
2. Berechnen Sie die Kapazität C des Plattenkondensators unter Vernachlässigung der Streufelder am Rand.

Aufgabe 1.5 Kapazitätsberechnung

Der im Querschnitt gezeichnete Vielschichtkondensator ist abwechselnd mit einem Dielektrikum und mit Luft gefüllt. Die Breite der einzelnen Zellen beträgt jeweils a, die Dicke sei $d \ll a$. Senkrecht zur Zeichenebene besitzt der Kondensator die Länge l.

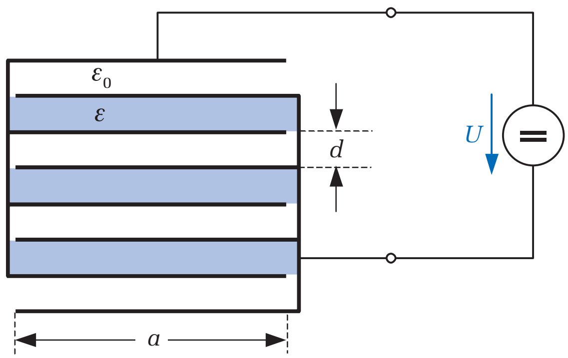


Abbildung 1.46: Vielschichtkondensator

1. Skizzieren Sie für dieses Bauelement ein Ersatzschaltbild, in dem jede einzelne Zelle durch einen Kondensator beschrieben wird.
2. Bestimmen Sie die Gesamtkapazität dieses Bauelements unter Vernachlässigung der Streueffekte im Randbereich.
3. Welche Ladungen befinden sich auf den einzelnen Platten, wenn das Bauelement an eine Gleichspannungsquelle U angeschlossen wird?

Aufgabe 1.6 Kapazitätsberechnung

Zwei Metallkugeln mit den Radien r_1 und r_2 befinden sich im Mittelpunktsabstand a mit $a \gg r_1$ und $a \gg r_2$. Die Dielektrizitätskonstante des umgebenden Raumes sei ε_0.

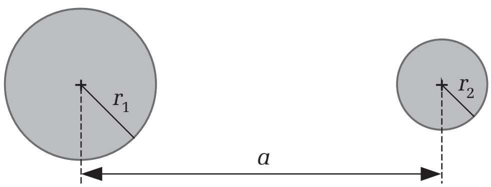


Abbildung 1.47: Zwei leitende Kugeln

Bestimmen Sie die Teilkapazität zwischen den beiden Metallkugeln.

Aufgabe 1.7 Energieberechnung

▶Abb. 1.48a zeigt eine leitende Kugel vom Radius a, auf die eine Gesamtladung Q aufgebracht ist. In ▶Abb. 1.48b ist die gleiche Gesamtladung homogen im Vakuum verteilt und zwar ebenfalls in einem kugelförmigen Bereich mit Radius a.

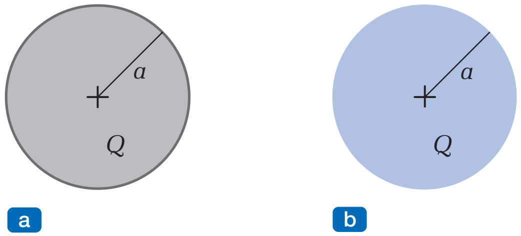


Abbildung 1.48: Ladungsverteilungen

1. Wie ist die Ladung auf der Kugel in Abb. 1.48a verteilt? Geben Sie die Ladungsdichte an.
2. Geben Sie für beide Anordnungen die elektrische Feldstärke in einem beliebigen Punkt P an.
3. Berechnen Sie die in den beiden Anordnungen jeweils gespeicherte Energie.

Das stationäre elektrische Strömungsfeld

2

ÜBERBLICK

Einführung

» Nachdem in dem bisherigen Kapitel ausschließlich Anordnungen mit ruhenden Ladungen betrachtet wurden, soll in den folgenden Abschnitten der physikalische Vorgang einer im zeitlichen Mittel konstanten Ladungsträgerbewegung untersucht werden. Wir werden aufbauend auf den Zusammenhang zwischen Stromdichte und elektrischer Feldstärke das Ohm'sche Gesetz sowie die Begriffe Energie und Leistung im stationären Strömungsfeld kennen lernen. Ein weiteres wichtiges Thema sind wieder die Randbedingungen an Materialsprungstellen. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- die Stromdichteverteilung in einfachen Anordnungen zu berechnen,
- den ohmschen Widerstand von einfachen Leiteranordnungen zu berechnen,
- die Temperaturabhängigkeit der ohmschen Widerstände anzugeben,
- das Ohm'sche Gesetz in differentieller und integraler Form anzuwenden,
- das Verhalten der Stromdichte an Materialsprungstellen mit unterschiedlichen Leitfähigkeiten zu bestimmen sowie
- die Energie und Leistung im stationären Strömungsfeld zu berechnen.

2.1 Der elektrische Strom

Auf den beiden geladenen Körpern der ▶Abb. 2.1, die wir im Folgenden als **Elektroden** bezeichnen wollen, befinden sich die entgegengesetzt gleichen Gesamtladungen $+Q$ und $-Q$. Die Elektrode 1 besitzt das Potential φ_{e1} und die Elektrode 2 das Potential $\varphi_{e2} < \varphi_{e1}$.

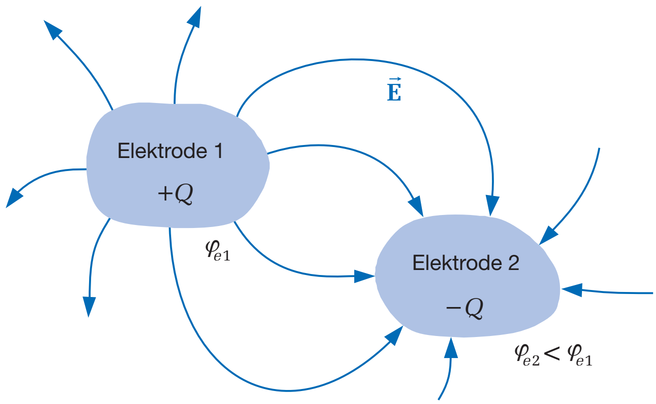


Abbildung 2.1: Zwei Elektroden mit entgegengesetzt gleichen Ladungen

Die elektrischen Feldlinien verlaufen von den positiven Ladungen der Elektrode 1 zu den negativen Ladungen der Elektrode 2. Zwischen den Elektroden besteht nach Gl. (1.30) die Spannung

$$U_{12} = \varphi_{e1} - \varphi_{e2} \, . \tag{2.1}$$

Stellen wir nun mithilfe eines dünnen Drahtes entsprechend ▶Abb. 2.2 eine leitende Verbindung zwischen den beiden Elektroden her, in der sich die Elektronen frei bewegen können, dann wird die auf die Ladungsträger wirkende Kraft dazu führen, dass ein Ladungsausgleich zwischen den beiden Elektroden stattfindet. Dieser Vorgang ist erst dann beendet, wenn im Draht zwischen den Elektroden keine elektrische Feldstärke, d.h. zwischen ihnen keine Spannung mehr vorhanden ist. Beide Elektroden besitzen in diesem Endzustand das gleiche Potential. Die Dauer dieses Ausgleichsvorganges hängt von verschiedenen Faktoren ab, die in den folgenden Abschnitten näher untersucht werden sollen.

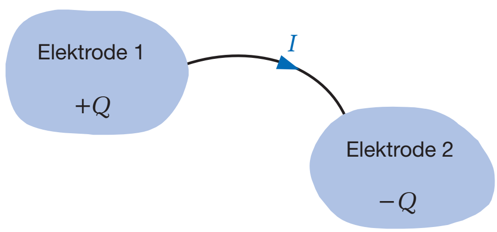


Abbildung 2.2: Ladungsträgerbewegung zwischen Elektroden unterschiedlichen Potentials

Die Bewegung der Ladungsträger bezeichnet man als **elektrischen Strom**. Die Richtung eines positiven Stromes ist so definiert, dass er von der Elektrode höheren Potentials zur Elektrode niedrigeren Potentials fließt. Er hat damit innerhalb der leitenden Verbindung die gleiche Richtung wie die elektrische Feldstärke.

Vorsicht

Die negativen Ladungsträger (Elektronen) bewegen sich entgegengesetzt zur festgelegten (technischen) Stromrichtung, d.h. von der Elektrode niedrigeren Potentials zur Elektrode höheren Potentials.

Hinweis

Physikalisch gesehen gibt es verschiedene Mechanismen, die zu dem elektrischen Strom beitragen können. Den durch einen Transport von Ladungsträgern verursachten Strom nennt man **Konvektionsstrom**. Im Gegensatz dazu tritt bei zeitabhängigen Vorgängen der so genannte **Verschiebungsstrom** auf, der proportional zur zeitlichen Ableitung der Verschiebungsdichte $\partial\vec{\mathbf{D}}/\partial t$ ist. Dieser existiert auch im Vakuum (Wellenausbreitung) und ist nicht an einen Ladungsträgertransport gebunden. Im nichtleitenden Dielektrikum kann man sich den Verschiebungsstrom vorstellen als eine infolge einer zeitlich veränderlichen Feldstärke hervorgerufene, zeitlich veränderliche Polarisation, d.h. eine Verschiebung der Polarisationsladungen. Wir werden uns aber im Folgenden ausschließlich mit dem Konvektionsstrom beschäftigen.

Um eine quantitative Aussage zur Größe des elektrischen Stromes zu erhalten, können wir folgendes Gedankenexperiment durchführen: An einer beliebigen Stelle der leitenden Verbindung betrachten wir deren gesamte Querschnittsfläche. Während eines kleinen Zeitabschnitts Δt erfassen wir alle Ladungsträger, die diese Querschnittsfläche in einer bestimmten Richtung durchströmen (vgl. auch ▶Abb. C.4 im Anhang). Das Produkt aus der Summe dieser Ladungsträger und dem Wert der Elementarladung stellt eine Ladungsmenge dar, die wir mit ΔQ bezeichnen wollen. Wir können also beobachten, dass in der Zeitspanne Δt während des Ausgleichsvorganges insgesamt die Ladungsmenge ΔQ durch die leitende Verbindung von der Elektrode 1 zur Elektrode 2 fließt. Das Verhältnis aus der transportierten Ladungsmenge ΔQ und der betrachteten Zeit Δt bezeichnet man als **Stromstärke**[1] I

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \,. \tag{2.2}$$

Die elektrische Stromstärke gehört zu den Basisgrößen im MKSA-System (vgl. Tab. D.1) und ihre Einheit ist das Ampère $[I] = \mathrm{A}$ (nach André Marie Ampère, 1775 – 1836).

1 Oftmals wird vereinfachend vom Strom gesprochen, obwohl die Stromstärke gemeint ist.

Das Ergebnis der Gl. (2.2) ist die mittlere Stromstärke in dem betrachteten Zeitabschnitt Δt. Ist die Anzahl der die Querschnittsfläche durchströmenden Ladungsträger zeitlich konstant, dann ist auch der Strom zeitlich konstant. Betrachten wir allerdings den Ausgleichsvorgang in Abb. 2.2, dann wird die Stromstärke von einem Anfangswert beim Zustandekommen der Verbindung auf den Wert Null bei nicht mehr vorhandener Spannung U_{12} abnehmen. Interessiert man sich nicht für den mittleren Wert der Stromstärke in einem endlichen Zeitabschnitt, sondern für den Augenblickswert der Stromstärke zu einem beliebigen Zeitpunkt t, dann muss man die Dauer des Zeitabschnitts Δt gegen Null gehen lassen und zwar so, dass der Zeitpunkt t immer innerhalb von Δt verbleibt. Die Stromstärke in dem betrachteten Zeitpunkt lässt sich dann als Differentialquotient in der Form

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{2.3}$$

schreiben. Mit der Festlegung der technischen Stromrichtung als Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger bedeutet ΔQ in der Gl. (2.2) die in der Zeit Δt von der positiv geladenen zur negativ geladenen Elektrode durch eine beliebige Querschnittsfläche hindurchfließende Ladungsmenge.

Ähnlich wie die Gesamtladung Q und die Spannung U in Gl. (1.75) ist auch die Stromstärke I in Gl. (2.3) eine integrale Größe. Wir haben bisher lediglich die Zählrichtung beim Durchtritt der Ladungsträger durch die gedachte Querschnittsfläche festgelegt und als Ergebnis nur die Summe der Ladungsträger in dem betrachteten Zeitabschnitt in die Gln. (2.2) bzw. (2.3) eingesetzt. Diese Gleichungen enthalten daher keine Informationen über die örtliche Verteilung der Ladungsträgerbewegung innerhalb der leitenden Verbindung.

2.2 Die Stromdichte

Die Bewegung von Ladungsträgern ist im allgemeinen Fall eine gerichtete Größe. Zur Untersuchung dieser Zusammenhänge betrachten wir die ▶Abb. 2.3. In dieser Anordnung besteht der gesamte Raum zwischen den beiden Elektroden aus einem leitfähigen Material. Der von der Elektrode 1 zur Elektrode 2 fließende Gesamtstrom I wird sich mit einer ortsabhängigen Dichte über den gesamten Raum verteilen.

Im nun folgenden Schritt legen wir um die Elektrode 1 eine geschlossene Hüllfläche A. Nehmen wir zunächst vereinfachend an, dass A so gewählt sei, dass die Bewegungsrichtung der Ladungsträger an jeder Stelle senkrecht zu der Hüllfläche verläuft, d.h. der in Abb. 2.3 eingezeichnete Winkel α zwischen der Ladungsträgerbewegung in Richtung $\vec{\mathbf{J}}$ und der Flächennormalen $\vec{\mathbf{n}}$ sei überall Null. Durch ein elementares Flächenelement ΔA wird der elementare Anteil des Stromes ΔI hindurchtreten. Das Verhältnis aus elementarem Stromanteil und elementarem Flächenelement nennt man **Stromdichte**. Diese wird mit J bezeichnet und hat die Dimension $\mathrm{A/m^2}$

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta A}\,. \tag{2.4}$$

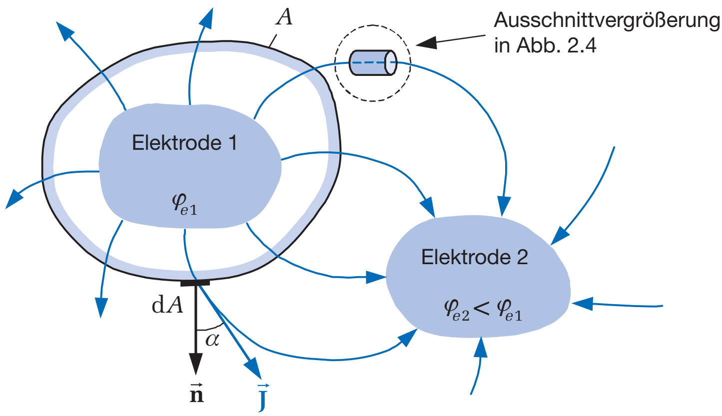


Abbildung 2.3: Räumlich verteilter Stromfluss zwischen Elektroden unterschiedlichen Potentials

Für die weitere Betrachtung schneiden wir aus dem stromführenden Bereich zwischen den beiden Elektroden der Abb. 2.3 ein elementares Volumenelement (Stromröhre) mit den Stirnseiten ΔA und der Mantelfläche M heraus. Dieses Volumenelement sei so gewählt, dass sich die Ladungsträger parallel zur Mantelfläche bewegen und seine Länge sei so klein, dass sich die Querschnittsfläche ΔA dieser in ▶Abb. 2.4 vergrößert dargestellten Stromröhre längs der Abmessung $\Delta \mathrm{x}$ nicht ändert. Wir können diese elementare Stromröhre mit den an den beiden Stirnseiten ein- bzw. austretenden Ladungsträgern auch als einen endlichen Abschnitt der leitenden Verbindung zwischen den beiden Elektroden in Abb. 2.2 ansehen.

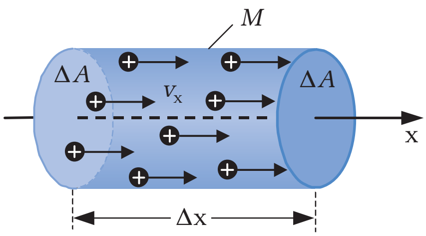


Abbildung 2.4: Bewegung einer Raumladung in x-Richtung

Zur einfacheren Beschreibung legen wir die x-Achse eines willkürlich gewählten Koordinatensystems parallel zur Bewegungsrichtung der Ladungsträger. Bewegen sich die Ladungsträger mit der Geschwindigkeit v_x, dann benötigen sie zum Durchlaufen einer Strecke $\Delta \mathrm{x}$ die Zeit Δt

$$\Delta \mathrm{x} = v_\mathrm{x} \, \Delta t \, . \tag{2.5}$$

In einem Zeitabschnitt Δt werden somit genau diejenigen Ladungsträger die rechte Stirnseite der Stromröhre durchfließen, die sich zum Beginn des Beobachtungszeitraumes innerhalb der Stromröhre mit der Länge $\Delta \mathrm{x}$ befinden. Wird die in dem Volumenelement

$$\Delta V = \Delta A \, \Delta \mathrm{x} \tag{2.6}$$

enthaltene elementare Ladungsmenge ΔQ nach Gl. (1.15) durch das Produkt von mittlerer Raumladungsdichte und Volumen ausgedrückt

$$\Delta Q = \rho\,\Delta V\,, \tag{2.7}$$

dann entspricht die x-gerichtete Stromdichte dem Produkt aus Raumladungsdichte und Geschwindigkeit

$$J_{\mathrm{x}} \overset{(2.4)}{=} \frac{\Delta I}{\Delta A} \overset{(2.2)}{=} \frac{\Delta Q}{\Delta A\,\Delta t} \overset{(2.6)}{=} \frac{\Delta Q}{\Delta V}\frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta t} \overset{(2.5,2.7)}{=} \rho v_{\mathrm{x}}\,. \tag{2.8}$$

Eine größere Stromdichte kann entweder durch eine größere Anzahl der am Ladungsträgertransport beteiligten Elementarladungen im Volumen oder durch eine höhere Geschwindigkeit zustande kommen.

Die Gleichung (2.8) beschreibt den Sonderfall einer allein x-gerichteten Bewegung. Im allgemeinen Fall wird die aus drei Komponenten bestehende Geschwindigkeit durch einen Vektor beschrieben, der in kartesischen Koordinaten z.B. die Form $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}} v_{\mathrm{x}} + \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}} v_{\mathrm{y}} + \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{z}} v_{\mathrm{z}}$ annimmt. Damit muss auch die Stromdichte im allgemeinen Fall als Vektor dargestellt werden

$$\vec{\mathbf{J}} = \rho\,\vec{\mathbf{v}}\,. \tag{2.9}$$

Bei einer positiven Raumladung ($\rho > 0$) zeigen Stromdichte $\vec{\mathbf{J}}$ und Geschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}}$ in die gleiche Richtung. Bei einer negativen Raumladung ($\rho < 0$) zeigt die Kraft auf die Ladungsträger in die entgegengesetzte Richtung, so dass sich die Bewegungsrichtung und damit auch das Vorzeichen von $\vec{\mathbf{v}}$ ebenfalls umkehrt. Das Produkt $\vec{\mathbf{J}} = \rho\vec{\mathbf{v}} = (-\rho)(-\vec{\mathbf{v}})$ ist also für beide Ladungsträgerarten gleich.

An dieser Stelle kehren wir noch einmal zur Abb. 2.3 zurück. Wir hatten dort zunächst den Sonderfall betrachtet, bei dem die Stromdichte überall senkrecht zur Hüllfläche A gerichtet war. Wir lassen diese Einschränkung jetzt fallen und betrachten eine bezogen auf die Richtung der Stromdichte beliebig geformte Hüllfläche (vgl. auch ▶Abb. C.5). Mit der senkrecht auf der Fläche stehenden Flächennormalen $\vec{\mathbf{n}}$ der Länge $|\vec{\mathbf{n}}| = 1$ erweitern wir das skalare Flächenelement $\mathrm{d}A$ auf das vektorielle Flächenelement $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{n}}\mathrm{d}A$, das mit der an dem Ort des Flächenelementes vorliegenden Stromdichte $\vec{\mathbf{J}}$ den Winkel α einschließt. Den elementaren Strom durch $\mathrm{d}A$ erhält man aus der Multiplikation von $\mathrm{d}A$ mit der senkrecht zu $\mathrm{d}A$ stehenden Komponente der Stromdichte $\vec{\mathbf{J}}$ bzw. aus dem Skalarprodukt der beiden Vektoren

$$\mathrm{d}I \overset{(2.4)}{=} |\vec{\mathbf{J}}|\,\mathrm{d}A\cos\alpha = \vec{\mathbf{J}}\bullet\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}\,. \tag{2.10}$$

Zur Berechnung des Gesamtstromes durch eine Fläche A müssen die Beiträge (2.10) über die Fläche integriert werden

$$I = \iint_A \vec{\mathbf{J}}\bullet\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}\,. \tag{2.11}$$

Für die Problemstellung der Abb. 2.3 findet man den gesamten von der Elektrode 1 zur Elektrode 2 fließenden (Konvektions-)Strom durch Integration über die geschlossene Hüllfläche

$$I = \oint\!\!\!\oint_A \vec{\mathbf{J}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \; . \tag{2.12}$$

2.3 Definition des stationären Strömungsfeldes

Der in dem Beispiel des vorangegangenen Kapitels betrachtete Ladungsausgleich zwischen den beiden Elektroden wird in Abhängigkeit von dem leitenden Material zwischen den Elektroden zwar eine bestimmte Zeit in Anspruch nehmen, irgendwann aber beendet sein. Soll der Strom zwischen den Elektroden jedoch unabhängig von der Zeit immer einen konstanten Wert aufweisen, dann müssen die von den Elektroden abfließenden Ladungsträger immer wieder nachgeliefert werden. Da die Ladungsträger weder erzeugt noch vernichtet werden können, ist im stationären Zustand die innerhalb eines umschlossenen Volumens, z.B. innerhalb der Hüllfläche der Abb. 2.3, vorhandene Summe der Ladungsträger zeitlich konstant. Diese Aussage ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass das Hüllflächenintegral (2.12) verschwindet.

Merke

Beim stationären Strömungsfeld ist die ortsabhängige Stromdichte zeitlich konstant und ihr Integral über eine geschlossene Fläche verschwindet

$$\oint\!\!\!\oint_A \vec{\mathbf{J}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = 0 \; . \tag{2.13}$$

Der zeitlich konstante Strom wird als **Gleichstrom** bezeichnet.

2.4 Ladungsträgerbewegung im Leiter

Bei der Einführung des elektrischen Stromes haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass sich die Ladungsträger in dem Material zwischen den beiden Elektroden bewegen können.

Diesen Vorgang wollen wir uns nun etwas näher ansehen. Bei Metallen sind die Elektronen auf der äußeren Schale praktisch ungebunden. Sie können sich relativ frei innerhalb des Atomverbandes bewegen. Ein Material mit frei beweglichen Elektronen bezeichnet man als **Leiter**. Die positiven Ladungsträger (Protonen) sind dagegen ortsfest. In einem Metall bewegen sich die Elektronen ohne äußere Einflüsse ungeordnet zwischen den Atomen hin und her (▶Abb. 2.5). Da sie sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jede Richtung bewegen können, verschwindet der über alle Elektronen gebildete Mittelwert ihrer Bewegungen. Ein Konvektionsstrom ist nach außen nicht feststellbar. Diese Situation ändert sich, wenn eine elektrische Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$ vorhanden ist (▶Abb. 2.6). Die Elektronen erfahren als negative Ladungsträger nach dem Coulomb'schen Gesetz eine Kraft, die entgegengesetzt zur elektrischen Feldstärke gerichtet ist. Ihrer bisherigen stückweise geradlinigen Bewegung (nach dem vereinfachten Modell) ist eine permanente Beschleunigung in eine von der Feldstärke aufgeprägte Richtung überlagert. Diese beschleunigte Bewegung wird immer wieder unterbrochen durch Zusammenstöße, einerseits mit den ortsfesten Atomen im Gitter und andererseits infolge der Unregelmäßigkeiten im Gitteraufbau. Dabei werden die Elektronen an den Stoßstellen sowohl gestreut, d.h. ihre Bewegungsrichtung ändert sich, als auch abgebremst, wobei sie ihre kinetische Energie zum Teil verlieren. Die fortwährend erneute Beschleunigung verleiht den Elektronen im Mittel aber eine so genannte **Driftgeschwindigkeit** $\vec{\mathbf{v}}_e$, die proportional zum Betrag der elektrischen Feldstärke ist. Den Proportionalitätsfaktor μ_e zwischen der Driftgeschwindigkeit und der Feldstärke bezeichnet man als Beweglichkeit

$$\vec{\mathbf{v}}_e = -\mu_e \vec{\mathbf{E}} \,. \tag{2.14}$$

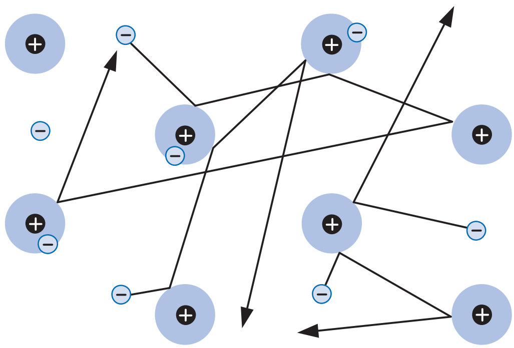


Abbildung 2.5: Ungeordnete Bewegung der Elektronen in einem Atomgitter

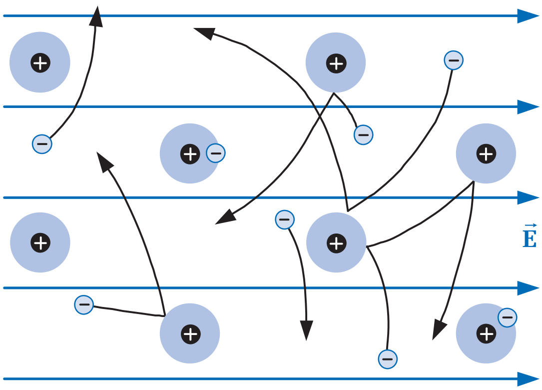


Abbildung 2.6: Driftbewegung der Elektronen

Das Minuszeichen bringt die unterschiedlichen Richtungen der beiden Vektoren, nämlich der Feldstärke und der ihr entgegengesetzt gerichteten Elektronenbewegung zum Ausdruck. Die Beweglichkeit μ_e ist also eine positive Größe.

Nehmen wir an, die elektrische Feldstärke in Abb. 2.6 sei x-gerichtet, dann legen die Elektronen in einem endlichen Zeitintervall Δt einen mittleren Weg Δs in negativer x-Richtung zurück. Verlässt ein Elektron sein Atom, dann entsteht ein als **Ion** bezeichnetes positiv geladenes Atom. Wird diese freigewordene Stelle von einem nachrückenden Elektron besetzt, dann haben sich nicht nur Elektronen entgegen der Feldstärkerichtung bewegt, sondern die frei werdenden Stellen (Löcher) bewegen sich in Richtung der Feldstärke. Die Richtung dieses Löcherstromes stimmt mit der festgelegten technischen Stromrichtung überein.

Beispiel 2.1: Driftgeschwindigkeit der Elektronen in Kupfer

Durch ein Kupferkabel mit einer Querschnittsfläche $A = 1\ \text{mm}^2$ fließt ein Strom $I = 5$ A. Zu bestimmen ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen.

Lösung:

Zur Bestimmung der gesuchten Größe nach Gl. (2.9) wird die Raumladungsdichte im Kupferdraht benötigt. Aus dem Beispiel 1.1 ist bekannt, dass 1 mm^3 Kupfer $8{,}5 \cdot 10^{19}$ Atome enthält. Da jeweils 1 Elektron pro Atom am Ladungstransport beteiligt ist, kann die Raumladungsdichte mit der Ladung eines Elektrons $-e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As folgendermaßen berechnet werden

$$\rho = \frac{Q}{V} = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{As}\ \frac{8{,}5 \cdot 10^{19}}{\text{mm}^3} = -13{,}62 \frac{\text{As}}{\text{mm}^3}\ . \tag{2.15}$$

Mit der angenommenen Stromdichte liegt die Driftgeschwindigkeit

$$|v| \overset{(2.9)}{=} \left|\frac{J}{\rho}\right| = \frac{5\,\text{A}\,\text{mm}^3}{1\,\text{mm}^2 \cdot 13{,}62\,\text{As}} = 0{,}37 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \tag{2.16}$$

betragsmäßig in einem Bereich unterhalb von 1 mm pro Sekunde!

Wird ein Stromkreis geschlossen, dann beginnt der Strom trotz der geringen Driftgeschwindigkeit an allen Stellen gleichzeitig zu fließen. Die Ursache ist die sich mit der Lichtgeschwindigkeit entlang des Drahtes ausbreitende elektrische Feldstärke, die die Elektronen längs des gesamten Drahtes praktisch gleichzeitig in Bewegung setzt.

2.5 Die spezifische Leitfähigkeit und der spezifische Widerstand

Mit den Gln. (2.9) und (2.14) können wir einen Zusammenhang zwischen der Stromdichte $\vec{\mathbf{J}}$ und der elektrischen Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$ angeben. Bezeichnen wir jetzt mit n die Ladungsträgerkonzentration, d.h. die Anzahl der freien Elektronen (Leitungselektronen) pro Volumen, dann gilt mit der Raumladungsdichte $\rho = -ne$ und der Driftgeschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}}_e$ der Elektronen die Beziehung

$$\vec{\mathbf{J}} \overset{(2.9)}{=} (-ne)\vec{\mathbf{v}}_e \overset{(2.14)}{=} ne\mu_e\vec{\mathbf{E}} = \kappa\vec{\mathbf{E}}\,. \tag{2.17}$$

Die Abkürzung κ wird als **spezifische Leitfähigkeit** bezeichnet und hat die Dimension

$$[\kappa] = \frac{[J]}{[E]} = \frac{\text{A/m}^2}{\text{V/m}} = \frac{\text{A}}{\text{Vm}} = \frac{1}{\Omega\,\text{m}}\,. \tag{2.18}$$

In vielen Fällen wird anstelle der spezifischen Leitfähigkeit deren Kehrwert verwendet. Diese als **spezifischer Widerstand** bezeichnete Materialeigenschaft

$$\rho_R = \frac{1}{\kappa} \tag{2.19}$$

ist zusammen mit der spezifischen Leitfähigkeit in der Tabelle 2.1 für verschiedene Materialien angegeben. Der Index R (*resistivity*) wird hier verwendet, um Verwechslungen mit der mit gleichem Buchstaben bezeichneten Raumladungsdichte zu vermeiden. Aus technischen Gründen wird vielfach nicht die Einheit Ωm, sondern $\Omega\text{mm}^2/\text{m}$ verwendet (vgl. Anhang D.2.2).

Tabelle 2.1

Spezifische Leitfähigkeit κ, spezifischer Widerstand ρ_R und Temperaturkoeffizient α für verschiedene Materialien bei 20°C nach [16], [22]. Prozentuale Zusammensetzung: (1): 54 Cu, 45 Ni, 1 Mn, (2): 84 Cu, 4 Ni, 12 Mn

Leiter	$\kappa \cdot \text{m}^{-1}\Omega\text{mm}^2$	$\rho_R \cdot \text{m}\Omega^{-1}\text{mm}^{-2}$	$\alpha \cdot 10^3\ {}^\circ\text{C}$
Aluminium	35	0,0287	3,8
Chromnickel	0,91	1,1	0,2
Eisen	10	0,10	6,1
Gold	44	0,022	3,9
Grafit	0,125	8	−0,2
Konstantan(1)	2	0,5	0,0035
Kupfer	56	0,0178	3,9
Manganin(2)	2,3	0,43	0,02
Messing	12,5	0,08	1,5
Silber	62,5	0,016	3,8
Wolfram	18	0,055	4,1

In der Praxis lässt sich eine Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes von der Temperatur feststellen. In den meisten technischen Anwendungen ist der auftretende Temperaturbereich soweit begrenzt, dass die Temperaturabhängigkeit $\rho_R(T)$ durch eine lineare Näherung hinreichend genau beschrieben werden kann. Mathematisch stellt man diesen Zusammenhang durch folgende Gleichung dar

$$\rho_R(T) = \rho_{R,20°\mathrm{C}} \cdot \left[1 + \alpha(T - 20°\mathrm{C})\right] = \rho_{R,20°\mathrm{C}} \cdot (1 + \alpha\,\Delta T) . \qquad (2.20)$$

Darin beschreibt $\rho_{R,20°\mathrm{C}}$ den auch in der Tabelle 2.1 angegebenen spezifischen Widerstand bei der Umgebungstemperatur $T_u = 20°\mathrm{C}$ und der Temperaturkoeffizient α beschreibt den linearen Anstieg des spezifischen Widerstandes mit der Temperatur T. Der in der Tabelle 2.1 angegebene Zahlenwert entspricht der Zunahme des spezifischen Widerstandes $\rho_{R,20°\mathrm{C}}$ in Promille bei einer Temperaturerhöhung um 1°C.

Eine noch bessere Beschreibung der Temperaturabhängigkeit lässt sich erreichen, wenn in der Beziehung (2.20) ein weiterer Korrekturfaktor hinzugefügt wird, der sich quadratisch mit der Temperatur ändert

$$\rho_R(T) = \rho_{R,20°\mathrm{C}} \cdot \left[1 + \alpha\,\Delta T + \beta(\Delta T)^2\right] \qquad (2.21)$$

und die Abweichung des temperaturabhängigen spezifischen Widerstandes von dem linearen Verlauf beschreibt.

Die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes wird von verschiedenen Faktoren beeinflusst. Betrachten wir zunächst die Metalle mit ihrem relativ regelmäßigen Gitteraufbau. Man kann sich leicht vorstellen, dass die Beweglichkeit der freien Elektronen in Gl. (2.14) von der mittleren freien Weglänge zwischen zwei Zusammenstößen abhängt. Der Wert für die Beweglichkeit μ_e wird geringer mit abnehmender freier Weglänge. In Abhängigkeit von der Temperatur schwingen die Atome um ihre feste Gleichgewichtslage und zwar umso mehr, je höher die Temperatur wird. Dadurch nimmt die Wahrscheinlichkeit für Zusammenstöße mit steigender Temperatur zu, die mittlere freie Weglänge wird kürzer und der spezifische Widerstand steigt an. Der Temperaturkoeffizient α ist daher positiv und liegt bei allen reinen Metallen in ähnlicher Größenordnung. Bei Legierungen führt der unregelmäßige Gitteraufbau zu einer erhöhten Wahrscheinlichkeit für Zusammenstöße der Elektronen mit den Gitteratomen. Der spezifische Widerstand ist bei Legierungen daher wesentlich größer. Gleichzeitig spielt der Einfluss der thermischen Gitterschwingungen auf die Anzahl der Zusammenstöße nur noch eine untergeordnete Rolle, so dass der Temperaturkoeffizient deutlich geringer ist. Solche Legierungen werden bevorzugt benutzt zur Herstellung temperaturunabhängiger Präzisionswiderstände.

Aus der Tabelle ersieht man, dass es auch Materialien mit negativem Temperaturkoeffizienten gibt. Bei Halbleitern (vgl. Kap. 4) nimmt die Beweglichkeit μ_e der freien Ladungsträger mit steigender Temperatur zwar ebenfalls ab, ihre Zahl pro Volumen steigt aber an, so dass die Leitfähigkeit in Gl. (2.17) dennoch zunimmt und der Temperaturkoeffizient einen negativen Zahlenwert besitzt.

2.6 Das Ohm'sche Gesetz

Die bereits in Gl. (2.17) angegebene Beziehung

$$\vec{\mathbf{J}} = \kappa \vec{\mathbf{E}} \tag{2.22}$$

wird als Ohm'sches Gesetz (*in differentieller Form*) bezeichnet (nach Georg Simon Ohm, 1789 – 1854). Diese Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen der im allgemeinen Fall dreidimensionalen Stromdichteverteilung und der zugehörigen Feldstärkeverteilung an jeder Stelle des Raumes.

Merke

Im Gegensatz zur Elektrostatik besitzt die elektrische Feldstärke im stromdurchflossenen Leiter einen nicht verschwindenden Wert.

Die Stromdichte kann sich aus drei vektoriellen Komponenten zusammensetzen, die ihrerseits wiederum von allen drei Koordinaten abhängen können. In manchen Fällen ist diese aufwändige Berechnung der Strömungsfelder unumgänglich, sehr häufig ist jedoch die Beschreibung und Lösung eines Problems mit integralen Größen ausreichend. Ähnlich wie in Kap. 1.17 wollen wir auch hier versuchen, die Beziehung (2.22) durch eine einfache skalare Gleichung zu ersetzen. Zu diesem Zweck betrachten wir die ▶Abb. 2.7. Ein zylindrischer Leiter der Länge l und der Querschnittsfläche A besteht aus einem homogenen Material der Leitfähigkeit κ. Die beiden Stirnseiten befinden sich auf den Potentialen φ_{e1} und $\varphi_{e2} < \varphi_{e1}$ und spielen die gleiche Rolle wie die beiden Elektroden in Abb. 2.3. Nehmen wir an, dass die beiden Elektroden außen an eine Quelle angeschlossen werden, die die abfließenden Ladungsträger immer wieder nachliefert, dann wird von der Elektrode höheren Potentials ein Gleichstrom I zu der Elektrode mit niedrigerem Potential fließen, der sich aus Symmetriegründen gleichmäßig über den Leiterquerschnitt verteilt. Damit gilt

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{e}}_x J_x \quad \text{mit} \quad J_x \overset{(2.4)}{=} \frac{I}{A}\,. \tag{2.23}$$

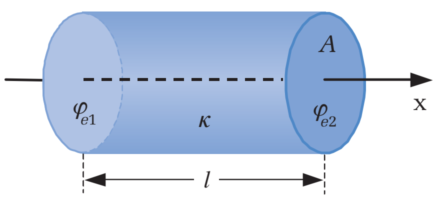


Abbildung 2.7: Widerstand eines zylindrischen Leiters

Die elektrische Feldstärke innerhalb des Leiters ist mit Gl. (2.22) ebenfalls bekannt

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\kappa}\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{e}}_x E_x \quad \text{mit} \quad E_x = \frac{I}{\kappa A}\,. \tag{2.24}$$

Drückt man die zwischen den Elektroden anliegende Spannung (2.1) nach Gl. (1.30) durch das Wegintegral der Feldstärke aus

$$U_{12} = \varphi_{e1} - \varphi_{e2} \overset{(1.30)}{=} \int_{x=0}^{l} \vec{\mathbf{e}}_x E_x \bullet \vec{\mathbf{e}}_x \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{l} E_x \mathrm{d}x \overset{(2.24)}{=} \frac{I}{\kappa A} \int_{x=0}^{l} \mathrm{d}x = \frac{I\,l}{\kappa A}, \tag{2.25}$$

dann erhält man einen Zusammenhang zwischen der anliegenden Spannung und dem insgesamt fließenden Strom

$$U_{12} = R\,I\,. \tag{2.26}$$

Der Proportionalitätsfaktor R heißt **elektrischer Widerstand** und hat die Dimension V/A = Ω. Der Widerstand des betrachteten Zylinders ist durch die Beziehung

$$\boxed{R = \frac{l}{\kappa A} = \frac{\rho_R\, l}{A}} \tag{2.27}$$

gegeben. Er hängt von der Geometrie der Anordnung und von den Materialeigenschaften ab. Die in Gl. (2.20) angegebene Beziehung für den spezifischen Widerstand ρ_R des Materials als Funktion der Temperatur gilt in gleicher Weise für den Widerstand (2.27)

$$R(T) = \rho_R(T)\,\frac{l}{A} = \rho_{R,20^\circ\mathrm{C}}\,\frac{l}{A}\cdot(1+\alpha\,\Delta T) = R_{20^\circ\mathrm{C}}\cdot(1+\alpha\,\Delta T)\,. \tag{2.28}$$

In der Gl. (2.26) ist die Spannung noch mit den beiden Indizes 12 behaftet, die die Zählrichtung der Spannung von der Elektrode 1 mit höherem Potential zu der Elektrode 2 mit niedrigerem Potential zum Ausdruck bringen. Da der Strom aber in der gleichen Richtung positiv gezählt wird, kann auf die beiden Indizes verzichtet werden. Resultierend gilt die der Gl. (2.22) entsprechende Beziehung

$$\boxed{U = R\,I} \tag{2.29}$$

für die beiden integralen Größen Strom und Spannung, die ebenfalls als Ohm'sches Gesetz (*in integraler Form*) bezeichnet wird. Zum Vergleich sind die Beziehungen zur Berechnung des Widerstandes mit den skalaren Größen und den Feldgrößen nochmals angegeben

$$I = \iint_A \vec{\mathbf{J}} \bullet \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \kappa \iint_A \vec{\mathbf{E}} \bullet \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}, \qquad U = \int_s \vec{\mathbf{E}} \bullet \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}, \qquad R = \frac{U}{I} = \frac{\int_s \vec{\mathbf{E}} \bullet \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}}{\kappa \iint_A \vec{\mathbf{E}} \bullet \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}}\,. \tag{2.30}$$

Merke

Unter dem elektrischen Widerstand R versteht man das Verhältnis von der angelegten Spannung U zu dem Gesamtstrom I.

Während in dem früheren Kapitel von dem Kondensator (Bauelement) und der Kapazität (seiner Eigenschaft) die Rede war, wird der Begriff Widerstand gleichzeitig sowohl für das Bauelement als auch für dessen Eigenschaft verwendet.

Betrachten wir als einfaches Beispiel einen Kupferdraht, der bei 20°C einen Widerstand von 1 Ω besitzt. In dem in ▶Abb. 2.8 dargestellten Strom-Spannungs-Diagramm erhält man nach Gl. (2.29) eine Gerade, deren Steigung $\Delta I/\Delta U$ dem Kehrwert des Widerstandes entspricht. Ein größerer Widerstand bedeutet demnach eine geringere Steigung. Der gleiche Kupferdraht hat bei 100°C nach Gl. (2.28) einen Widerstand von

$$R(100°\mathrm{C}) = R_{20°\mathrm{C}} \cdot (1+\alpha\Delta T) = 1\Omega \cdot \left(1+\frac{3{,}9}{10^3\,°\mathrm{C}} 80\,°\mathrm{C}\right) \approx 1{,}31\,\Omega\,. \tag{2.31}$$

Die zugehörige Widerstandsgerade im Strom-Spannungs-Diagramm hat jetzt einen flacheren Verlauf, d.h. bei gleichem Strom durch den Kupferdraht nimmt der Spannungsabfall entlang des Drahtes mit steigender Temperatur zu. Wird dagegen die an den Draht angelegte Spannung konstant gehalten, dann fließt bei niedrigerer Temperatur wegen des geringeren Widerstandes ein größerer Strom.

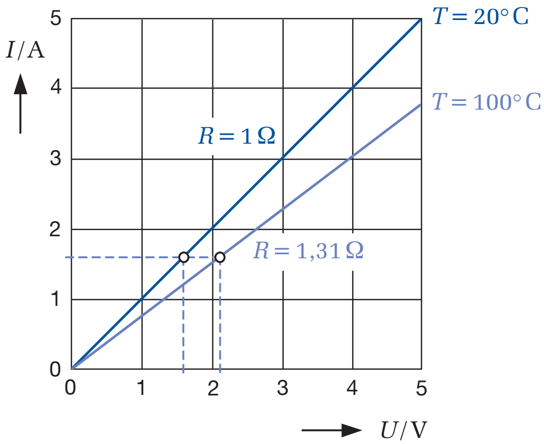


Abbildung 2.8: Widerstandsgerade eines Kupferdrahtes bei unterschiedlichen Temperaturen

In vielen Fällen wird die Berechnung von Schaltungen dadurch erleichtert, dass man nicht den Widerstand, sondern seinen Kehrwert

$$G = \frac{1}{R} \tag{2.32}$$

verwendet. G heißt **elektrischer Leitwert** und besitzt die Dimension 1/Ω = A/V. In Abb. 2.8 entspricht die Steigung der Geraden genau dem Leitwert.

Beispiel 2.2: Widerstand einer Hohlkugel

Die Berechnung des Widerstandes wollen wir an der gleichen, bereits bei der Kapazitätsberechnung zugrunde gelegten Geometrie in Abb. 1.32 üben. Allerdings befindet sich jetzt zwischen den beiden perfekt leitenden Kugelschalen (Elektroden) der Radien a und b ein Material der Leitfähigkeit κ.

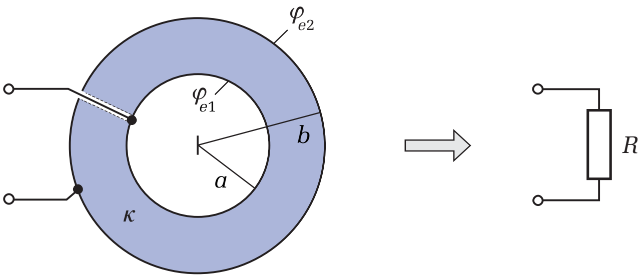


Abbildung 2.9: Widerstand einer Hohlkugel

Lösung:

Den Widerstand erhalten wir aus dem Verhältnis von der zwischen den Kugelelektroden anliegenden Spannung U zu dem insgesamt durch das leitfähige Material fließenden Strom I. Zur Berechnung nehmen wir an, dass die beiden Elektroden an eine äußere Spannungsquelle angeschlossen sind

$$U = \varphi_{e1} - \varphi_{e2}\,, \tag{2.33}$$

die die abfließenden Ladungsträger nachliefert und so dafür sorgt, dass die anliegende Spannung bzw. Potentialdifferenz erhalten bleibt. Unter der Voraussetzung, dass der von der Innenelektrode durch das leitfähige Material nach außen geführte isolierte Anschlussdraht keinen Einfluss auf das Ergebnis hat, wird die Stromdichte zwischen den Kugelflächen nur eine Komponente in radialer Richtung aufweisen, die aus Symmetriegründen auch nur von der Koordinate r und damit von der durchströmten Kugelfläche $4\pi\mathrm{r}^2$ abhängt

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r}\, J(\mathrm{r}) \stackrel{(2.12)}{=} \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r}\,\frac{I}{4\pi\,\mathrm{r}^2}\,. \tag{2.34}$$

I bezeichnet den zunächst unbekannten Gleichstrom von der Elektrode 1 zur Elektrode 2. Mit dem Ohm'schen Gesetz (2.22) ist die elektrische Feldstärke in dem Zwischenraum

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\kappa}\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r}\,\frac{I}{4\pi\,\kappa\,\mathrm{r}^2} \tag{2.35}$$

und damit auch der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom

$$U \overset{(1.30)}{=} \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \int_a^b \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r} \frac{I}{4\pi\kappa \mathrm{r}^2} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{r}\, \mathrm{dr} = \frac{I}{4\pi\kappa} \frac{b-a}{ba} \quad \rightarrow \quad R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{b-a}{ba} \tag{2.36}$$

bekannt. Ein Vergleich der Beziehungen (1.80) und (2.36) zeigt, dass sich die Kapazität und der Leitwert der geometrisch gleich aufgebauten Anordnungen nur durch die Materialeigenschaften ε bzw. κ unterscheiden.

Zu der durchgeführten Rechnung sind noch einige Anmerkungen erforderlich:

- In der Aufgabenstellung wurden perfekt leitende Kugelschalen vorausgesetzt, d.h. für die Elektroden gilt $\kappa \to \infty$. Diese Annahme ist notwendig, damit die Kugelflächen konstante Potentiale φ_{e1} und φ_{e2} aufweisen.
- Betrachten wir die Gl. (2.35), dann müssen wir feststellen, dass im Gegensatz zu den früher behandelten elektrostatischen Problemen im leitenden Material eine elektrische Feldstärke auftritt. Stellen wir uns jetzt vor, dass die beiden Kugelschalen gemäß ▶Abb. 2.9 nur an einer punktförmigen Stelle mit einer Spannungsquelle verbunden sind, dann müssen sich die Ladungsträger innerhalb der Kugelschale zunächst so verteilen, dass sie mit überall gleicher Dichte in das die Kugelschale umgebende leitende Material eintreten können. Bei einer endlichen Leitfähigkeit der Elektrode entsteht nach Gl. (2.22) aber bereits innerhalb der Elektrode eine elektrische Feldstärke. Damit kann die Elektrode nicht mehr als Äquipotentialfläche angesehen werden. Für die Gültigkeit des Ergebnisses (2.36) ist es daher erforderlich, dass die Leitfähigkeit des Elektrodenmaterials wesentlich größer als die Leitfähigkeit des Materials zwischen den Elektroden ist. Nur in diesem Fall darf von einer kugelsymmetrischen Stromverteilung ausgegangen werden.
- Das vorliegende Beispiel zeigt, dass auch bei komplizierteren Anordnungen, bei denen sowohl die Richtung als auch der Betrag der Stromdichte ortsabhängig sind, ein Widerstand R gefunden werden kann, mit dessen Hilfe ein einfacher Zusammenhang zwischen der anliegenden Spannung und dem insgesamt fließenden Strom nach dem Ohm'schen Gesetz (2.29) angegeben werden kann. Im Hinblick auf eine Schaltungsanalyse kann die leitende Hohlkugel durch das Schaltsymbol des Widerstandes mit dem nach Gl. (2.36) geltenden Wert ersetzt werden.

In Analogie zu der Abb. 1.40 gibt es auch Situationen, bei denen sich mehrere Elektroden im umgebenden leitfähigen Material befinden. In diesem Fall erhält man eine Ersatzanordnung, bei der zwischen jeweils zwei Elektroden ein Teilwiderstand anzunehmen ist, der den Strom zwischen diesen Elektroden führt.

2.7 Praktische Ausführungsformen von Widerständen

Je nach Anwendungsfall gibt es sehr unterschiedliche Bauformen von Widerständen. Neben dem Widerstandswert sind insbesondere die Herstellungstoleranz, die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes sowie die maximal zulässige Verlustleistung, eventuell unterschieden nach Kurzzeitbelastung oder Dauerbetrieb, von besonderer Bedeutung.

2.7.1 Festwiderstände

Die Festwiderstände haben eine lineare Widerstandscharakteristik und genügen dem Ohm'schen Gesetz. Die Abstufung der Widerstandswerte entspricht den in den Normen festgelegten E-Reihen, z.B. E6, E12, E24 usw. Die spezielle Kennzeichnung einer E-Reihe durch den betreffenden Zahlenwert gibt an, wie viele Werte innerhalb jeder Dekade liegen. In der Tabelle 2.2 sind die Widerstandswerte der genannten E-Reihen mit der jeweils zulässigen Toleranz für die Dekade $1 \leq R < 10$ angegeben.

Tabelle 2.2

Widerstandsreihen

Reihe	Toleranz	Widerstandswerte											
E 6	±20%	1,0		1,5		2,2		3,3		4,7		6,8	
E 12	±10%	1,0	1,2	1,5	1,8	2,2	2,7	3,3	3,9	4,7	5,6	6,8	8,2
E 24	±5%	1,0	1,2	1,5	1,8	2,2	2,7	3,3	3,9	4,7	5,6	6,8	8,2
		1,1	1,3	1,6	2,0	2,4	3,0	3,6	4,3	5,1	6,2	7,5	9,1

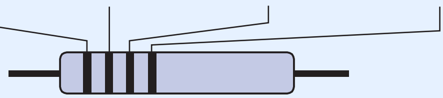
Man erkennt, dass die jeweils folgende Reihe alle Werte der vorhergehenden Reihe beinhaltet und dass zwischen jeweils zwei Werte der vorhergehenden Reihe ein zusätzlicher Wert eingefügt wird. Die zugehörigen Toleranzen sind so gewählt, dass zwischen den Bereichen von zwei benachbarten Widerstandswerten keine Lücken entstehen, d.h. alle produzierten Widerstände können einem Wert zugeordnet werden und es entsteht kein Ausschuss bei der Produktion.

Die Widerstandswerte sowie die Herstellungstoleranz sind üblicherweise als Zahlenwerte oder als Farbringe auf das Bauelement aufgedruckt. Die Tabelle 2.3 zeigt die Bedeutung der einzelnen Farbringe.

Tabelle 2.3

Farbcode

Farbe	1. Ring (1. Ziffer)	2. Ring (2. Ziffer)	3. Ring (Faktor)	4. Ring (Toleranz)
Ohne Farbe				$\pm 20\%$
Silber			10^{-2}	$\pm 10\%$
Gold			10^{-1}	$\pm 5\%$
Schwarz		0	10^{0}	
Braun	1	1	10^{1}	$\pm 1\%$
Rot	2	2	10^{2}	$\pm 2\%$
Orange	3	3	10^{3}	
Gelb	4	4	10^{4}	
Grün	5	5	10^{5}	$\pm 0{,}5\%$
Blau	6	6	10^{6}	
Violett	7	7	10^{7}	
Grau	8	8	10^{8}	
Weiß	9	9	10^{9}	



Festwiderstände werden als Schicht-, Draht- oder Massewiderstände hergestellt. Bei den **Schichtwiderständen** wird eine dünne Widerstandsschicht, z.B. aus Kohle oder Metall, auf einen zylindrischen Träger aus Keramik oder Glas aufgebracht. An den Enden werden Kappen aufgepresst und mit den Anschlüssen versehen. Zum Schutz wird das Bauelement mit einer Schicht aus Lack oder Kunststoff überzogen. Zur Herstellung größerer Widerstandswerte wird die dünne Metall- oder Kohleschicht gewendelt ausgeführt (▶Abb. 2.10a).

Bei höheren Leistungen werden **Drahtwiderstände** (▶Abb. 2.10b) eingesetzt, bei denen der Träger mit einem Draht umwickelt wird. Kleine Widerstandswerte können auf diese Weise leicht hergestellt werden, bei größeren Werten wird spezieller Widerstandsdraht (ein Material mit geringer Leitfähigkeit) verwendet. Der Drahtquerschnitt begrenzt den maximal zulässigen Strom und die maximale Verlustleistung wird durch die Wärmeabfuhr, d.h. die Bauteilgröße und die Ausführung der Oberfläche (lackiert, kunststoffumhüllt oder unbehandelt) bestimmt. Zur Reduzierung der *parasitären* Induktivitäten (vgl. Kap. 5) werden die Wicklungen **bifilar** ausgeführt, d.h. es werden zwei Drähte so nebeneinander gewickelt, dass sie in entgegengesetzter Richtung vom

Strom durchflossen werden. Eine weitere Möglichkeit zur Reduzierung der parasitären Induktivitäten besteht darin, den Wickelsinn mehrfach umzukehren.

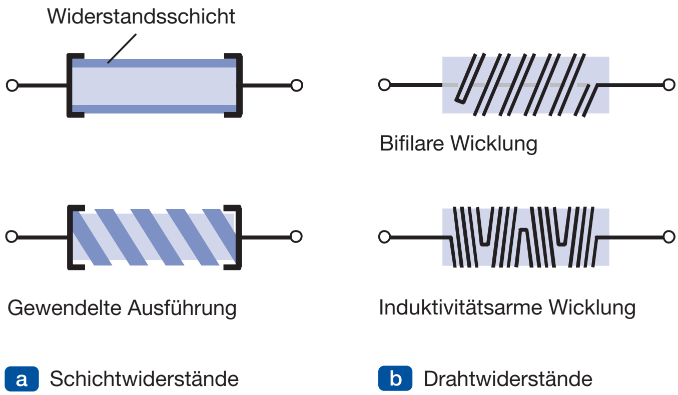


Abbildung 2.10: Bauformen von Festwiderständen

Die **Massewiderstände** besitzen keinen Träger, sondern bestehen insgesamt aus einem Widerstandsmaterial. Sie werden in verschiedenen Bauformen, z.B. als Stäbe oder Scheiben, hergestellt.

2.7.2 Einstellbare Widerstände

Bei einstellbaren Widerständen wird ein Schleifkontakt über das nicht isolierte Widerstandsmaterial bewegt. Bei einem **Schiebewiderstand** ist der Wickelkörper linear gestreckt, bei einem **Drehwiderstand** dagegen ringförmig ausgeführt. Üblicherweise spricht man bei diesen Bauelementen von **Potentiometern**, wenn sie im Betrieb immer wieder neu eingestellt werden, bzw. von **Trimmpotentiometern**, wenn sie nur einmal, z.B. zum Abgleich einer Schaltung, auf einen bestimmten Wert justiert werden.

2.7.3 Weitere Widerstände

Für besondere Aufgaben gibt es eine große Gruppe von nichtlinearen Widerständen, deren Verhalten von unterschiedlichen physikalischen Größen abhängen kann.

Zu der Gruppe der **temperaturabhängigen Widerstände** gehören die **Heißleiter**, deren Widerstand mit steigender Temperatur kleiner wird. Sie werden als **NTC** (*negative temperature coefficient*) bezeichnet. Diese Bauelemente besitzen bei Raumtemperatur einen großen Widerstand und begrenzen beim Einschalten eines elektronischen Gerätes dessen Einschaltstrom. Infolge der ohmschen Verluste werden sie stark aufgeheizt, wodurch ihr Widerstand sehr viel kleiner wird. Im Dauerbetrieb einer Schaltung verursachen sie dann lediglich geringe Verluste. Das temperaturabhängige Verhalten ist bei den als **PTC** (*positive temperature coefficient*) bezeichneten **Kaltleitern** genau umgekehrt. Ihr Widerstandswert wird mit steigender Temperatur größer.

Widerstände, deren Wert von der Spannung abhängt, werden als **VDR** (*voltage dependent resistor*) bezeichnet. Sie werden zur Spannungsstabilisierung oder zur Unterdrückung von kurzzeitigen Spannungsspitzen eingesetzt.

Eine weitere Gruppe sind die als **LDR** (*light dependent resistor*) bezeichneten lichtabhängigen Widerstände, die für Belichtungsmesser oder bei helligkeitsabhängigen Steuerungen verwendet werden.

2.8 Das Verhalten der Feldgrößen an Grenzflächen

In Analogie zu dem Kap. 1.16 untersuchen wir jetzt das Verhalten der beiden Feldgrößen $\vec{\mathbf{J}}$ und $\vec{\mathbf{E}}$ an Grenzflächen, auf denen die Leitfähigkeit κ einen Sprung von dem Wert κ_1 auf den Wert κ_2 erfährt. Dazu betrachten wir die Oberfläche A des in ▶Abb. 2.11 dargestellten quaderförmigen Körpers, der aus einem Material der Leitfähigkeit κ_1 besteht und sich im umgebenden Raum der Leitfähigkeit κ_2 befindet. Die Feldgrößen in den beiden Bereichen werden durch die gleichen Indizes gekennzeichnet wie die Leitfähigkeiten.

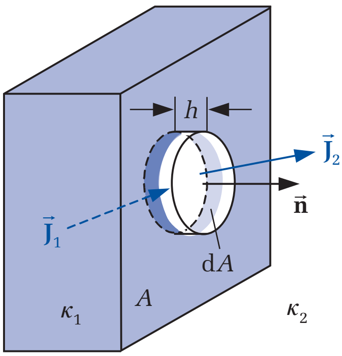


Abbildung 2.11: Grenzfläche mit Sprung der Leitfähigkeit

Im ersten Schritt betrachten wir das Verhalten der Normalkomponente (Index n) der Stromdichte. Zu diesem Zweck legen wir um die Trennfläche zwischen den beiden Materialien einen kleinen Flachzylinder der verschwindenden Höhe $h \to 0$. Beim stationären Strömungsfeld muss der insgesamt durch die Zylinderoberfläche hindurchtretende Strom nach Gl. (2.13) verschwinden. Wegen $h \to 0$ liefert der Zylindermantel keinen Beitrag, so dass der Strom durch das elementare Flächenelement dA auf beiden Seiten der Trennfläche gleich ist

$$J_{n1}\mathrm{d}A = J_{n2}\mathrm{d}A \quad \to \quad \boxed{J_{n1} = J_{n2}}\,. \tag{2.37}$$

Die Stetigkeit der Normalkomponente der Stromdichte erfordert aber wegen der auf beiden Seiten unterschiedlichen Leitfähigkeit nach Gl. (2.22) einen Sprung in der Normalkomponente der elektrischen Feldstärke

$$J_{n1} = \kappa_1 E_{n1} = J_{n2} = \kappa_2 E_{n2} \quad \to \quad \boxed{\kappa_1 E_{n1} = \kappa_2 E_{n2}}\,. \tag{2.38}$$

Zur Betrachtung der Tangentialkomponente (Index t) gehen wir von der elektrischen Feldstärke aus. Integrieren wir die Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$ entlang des in ▶Abb. 2.12 dargestellten Rechtecks, dann liefern wegen der verschwindenden Abmessung $h \to 0$ nur die elementaren Seitenlängen ds einen Beitrag. Nach Gl. (1.22) muss aber dieses Umlaufintegral verschwinden, so dass die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke auf beiden Seiten der Trennfläche den gleichen Wert aufweist

$$E_{t1}\,\mathrm{d}s - E_{t2}\,\mathrm{d}s = 0 \qquad \to \qquad \boxed{E_{t1} = E_{t2}}\,. \tag{2.39}$$

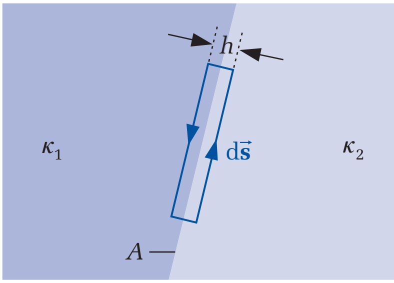


Abbildung 2.12: Grenzfläche mit Sprung der Leitfähigkeit

Die Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke erfordert aber wegen der auf beiden Seiten unterschiedlichen Leitfähigkeit nach Gl. (2.22) einen Sprung in der Tangentialkomponente der Stromdichte

$$E_{t1} = \frac{1}{\kappa_1} J_{t1} = E_{t2} = \frac{1}{\kappa_2} J_{t2} \qquad \to \qquad \boxed{\frac{J_{t1}}{J_{t2}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\,. \tag{2.40}$$

Zusammengefasst gilt die Aussage:

Merke

Bei einer sprunghaften Änderung der Leitfähigkeit auf einer Fläche der Normalen $\vec{\mathbf{n}}$ sind die Normalkomponente der Stromdichte J_n und die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke E_t stetig. Die Forderungen für die beiden anderen Komponenten (2.38) und (2.40) ergeben sich aus dem Ohm'schen Gesetz $\vec{\mathbf{J}} = \kappa\vec{\mathbf{E}}$.

Diese Zusammenhänge sind in ▶Abb. 2.13 nochmals dargestellt. Aus den Beziehungen

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{E_{t1}}{E_{n1}}\frac{E_{n2}}{E_{t2}} \overset{(2.39)}{=} \frac{E_{n2}}{E_{n1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{J_{t1}}{J_{n1}}\frac{J_{n2}}{J_{t2}} \overset{(2.37)}{=} \frac{J_{t1}}{J_{t2}} \tag{2.41}$$

folgt für beide Feldvektoren das gleiche Brechungsgesetz

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{J_{t1}}{J_{t2}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\,. \tag{2.42}$$

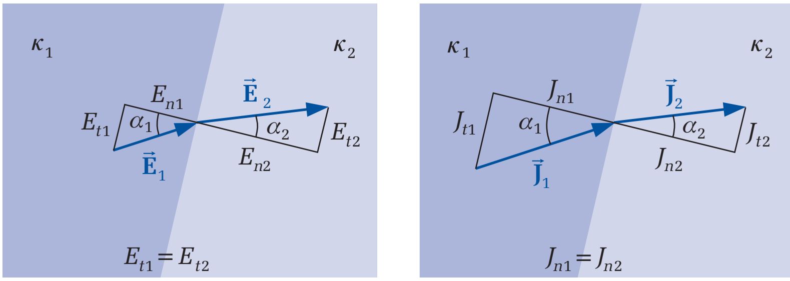


Abbildung 2.13: Zum Brechungsgesetz

2.8.1 Verschwindende Leitfähigkeit in einem Teilbereich

Im Gegensatz zu den Randbedingungen in der Elektrostatik kann hier auch der Fall eintreten, dass die Leitfähigkeit in einem der beiden Teilräume verschwindet. Gilt z.B. $\kappa_2 = 0$, dann kann in diesem nicht leitenden Bereich keine Stromdichte existieren, so dass wegen $\vec{\mathbf{J}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$ die Normalkomponente der Stromdichte $\vec{\mathbf{J}}_1$ nach Gl. (2.37) an der Trennebene verschwindet. Diese Aussage ist trivial und besagt lediglich, dass kein Strom aus dem Leiter in den umgebenden nicht leitenden Bereich austreten kann. Nach dem Ohm'schen Gesetz (2.22) gilt die gleiche Aussage für die elektrische Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}_1$, so dass an einer Trennfläche A zum nicht leitenden Bereich die folgenden Randbedingungen gelten

$$J_{n1}\big|_A = E_{n1}\big|_A = 0\,. \tag{2.43}$$

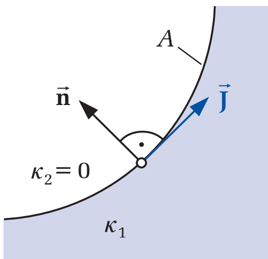


Abbildung 2.14: Grenzfläche zwischen leitendem und nicht leitendem Bereich

2.8.2 Perfekte Leitfähigkeit in einem Teilbereich

Bei manchen Anordnungen bestehen Trennflächen zwischen Bereichen, deren Leitfähigkeiten sich um Größenordnungen unterscheiden. Ein solches Beispiel wäre ein metallischer Leiter (Blitzableiter) im Erdboden. Wir betrachten direkt den Grenzfall, indem wir die Leitfähigkeit κ_2 nach unendlich gehen lassen. Bei einer endlichen Stromdichte in dem Bereich 2 verschwindet die elektrische Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$ nach Gl. (2.22). Wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponente nach Gl. (2.39) muss die elektrische

Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}_1$ senkrecht auf der Trennebene stehen. Nach dem Ohm'schen Gesetz (2.22) gilt die gleiche Aussage für die Stromdichte $\vec{\mathbf{J}}_1$, so dass an einer Trennfläche A zu einem perfekt leitfähigen Bereich die folgenden Randbedingungen gelten

$$J_{t1}\big|_A = E_{t1}\big|_A = 0\,. \tag{2.44}$$

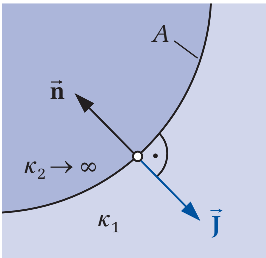


Abbildung 2.15: Grenzfläche zu einem perfekt leitenden Bereich

Zusammengefasst gilt die Aussage:

Merke

An einer Trennebene zu einem nicht leitenden Bereich verlaufen Stromdichte und elektrische Feldstärke tangential. Aus einem perfekt leitenden Bereich treten elektrische Feldstärke und Stromdichte senkrecht aus.

2.9 Energie und Leistung

Bei dem Stromleitungsmechanismus nach Abb. 2.6 werden die Elektronen durch das anliegende Feld beschleunigt. Die Zunahme der kinetischen Energie wird dem Energieinhalt des elektrischen Feldes entnommen. Bezeichnet man mit ΔQ die transportierte elementare Ladung, dann ist die dem Feld entnommene elementare Energie ΔW_e nach Gl. (1.23) aus dem Produkt der Ladung und der durchlaufenen Potentialdifferenz gegeben. Damit gilt der Zusammenhang

$$\Delta W_e \overset{(1.23)}{=} (\varphi_{e1} - \varphi_{e2})\Delta Q \overset{(1.30)}{=} U\,\Delta Q \overset{(2.2)}{=} U\,I\,\Delta t\,. \tag{2.45}$$

Die dem Feld entnommene Energie nimmt einen positiven Wert an, wenn z.B. eine positive Ladung ΔQ von einem höheren Potential φ_{e1} zu einem niedrigeren Potential φ_{e2} bewegt wird. Das Verhältnis aus geleisteter Arbeit ΔW_e und dazu benötigter Zeit Δt wird allgemein als **Leistung** bezeichnet und mit P (*power*) abgekürzt

$$P = \frac{\Delta W_e}{\Delta t} = U\,I\,. \tag{2.46}$$

Bei den zeitlich konstanten Größen Gleichspannung U und Gleichstrom I ist auch die Leistung P zeitlich konstant und somit unabhängig von der Wahl des elementaren Zeitabschnitts Δt. Sind dagegen Strom und Spannung zeitlich veränderliche Größen, dann beschreibt die Gl. (2.46) lediglich den Mittelwert der Leistung in dem betrachteten Zeitintervall. Interessiert man sich bei einem zeitabhängigen Vorgang für den augenblicklichen Wert der Leistung in einem bestimmten Zeitpunkt t, dann muss man den Zeitabschnitt Δt gegen Null gehen lassen und zwar so, dass der Zeitpunkt t immer innerhalb von Δt verbleibt. Die Leistung in dem betrachteten Zeitpunkt lässt sich dann als Differentialquotient in der Form

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W_e}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t} \tag{2.47}$$

schreiben. Die Leistung hat die Dimension VA = W (nach James Watt, 1736 – 1819). Umgekehrt kann die elektrische Arbeit durch Integration der Leistung über die Zeit berechnet werden

$$\boxed{W_e = \int_t P\,\mathrm{d}t} \,. \tag{2.48}$$

Sie wird in Ws oder vielfach auch in kWh angegeben.

Die in Gl. (2.46) berechnete Leistung wird an dem Widerstand in Wärme umgewandelt. Mit dem Ohm'schen Gesetz (2.29) kann die Leistung an einem Widerstand R auch in der Form

$$\boxed{P = U\,I = I^2 R = U^2/R} \tag{2.49}$$

geschrieben werden. Da in dieser Gleichung sowohl der Strom als auch die Spannung quadratisch auftreten, spielt ihre Zählrichtung keine Rolle. Der Wert von P beschreibt die an einem Widerstand R entstehende **Verlustleistung**.

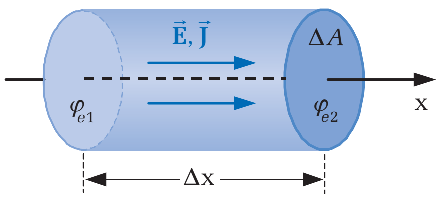


Abbildung 2.16: Zur Berechnung der Verlustleistungsdichte

Bei vielen Problemstellungen ist man nicht nur an den insgesamt entstehenden Verlusten P interessiert, sondern es stellt sich die Frage nach der örtlichen Verteilung der in einem Volumen entstehenden Verluste. Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir das elementare Volumenelement $\Delta V = \Delta A \Delta$x in der ▶Abb. 2.16. Die Querschnittsfläche ΔA sei hinreichend klein gewählt, so dass die in der Abbildung eingetragene x-gerichtete Stromdichte als homogen über den Querschnitt verteilt angesehen werden kann. Zusätzlich sei die Länge Δx so klein, dass sich die Spannung linear über die Länge verteilt, d.h. die elektrische Feldstärke ist, genauso wie die Stromdichte, innerhalb des Volumens x-gerichtet und ortsunabhängig. Ersetzt man also in Gl. (2.49) die Spannung durch das Produkt aus Feldstärke und elementarer Länge gemäß Gl. (1.30) und den Strom durch das Produkt aus Stromdichte und Querschnittsfläche nach Gl. (2.4), dann erhält man für die in dem elementaren Volumen entstehende elementare Verlustleistung die Beziehung

$$\Delta P = E\,\Delta x\; J\,\Delta A = \left(\vec{\mathbf{e}}_x E\right)\Delta x \bullet \left(\vec{\mathbf{e}}_x J\right)\Delta A = \vec{\mathbf{E}} \bullet \vec{\mathbf{J}}\,\Delta V\,, \tag{2.50}$$

in der die beiden gleich gerichteten Größen $\vec{\mathbf{E}}$ und $\vec{\mathbf{J}}$ auch als Vektoren geschrieben werden können. Das Verhältnis aus Verlustleistung ΔP und Volumenelement ΔV bezeichnet man als **Verlustleistungsdichte** p_v. Der Ausdruck

$$p_v = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \vec{\mathbf{E}} \bullet \vec{\mathbf{J}} \tag{2.51}$$

beschreibt die mittlere Verlustleistungsdichte im elementaren Volumen ΔV, die in dem betrachteten homogenen Feld unabhängig von der Wahl des Volumenelementes ist. Für den allgemeinen Fall eines nicht homogenen Feldes kann die Verlustleistungsdichte p_v in einem beliebigen Punkt P angegeben werden, wenn man das Volumenelement gegen Null gehen lässt, und zwar so, dass sich der Punkt P immer innerhalb von ΔV befindet. Die Verlustleistungsdichte wird dann als Differentialquotient

$$p_v(\mathrm{P}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} \tag{2.52}$$

geschrieben und kann aus dem Produkt von elektrischer Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}(\mathrm{P})$ und Stromdichte $\vec{\mathbf{J}}(\mathrm{P})$ berechnet werden. Ist im umgekehrten Fall die ortsabhängige Verlustleistungsdichte im gesamten Volumen bekannt, dann können die Gesamtverluste durch Integration über das Volumen berechnet werden

$$P = \iiint_V p_v\,\mathrm{d}V = \iiint_V \vec{\mathbf{E}} \bullet \vec{\mathbf{J}}\,\mathrm{d}V\,. \tag{2.53}$$

Während die Gl. (2.49) die Berechnung der Verlustleistung aus den integralen Größen Strom und Spannung gestattet, können die Beziehungen (2.51) und (2.53) auch dann verwendet werden, wenn die ortsabhängige Verteilung der Verluste bestimmt werden soll. Dazu ist dann allerdings die Kenntnis der ortsabhängigen Feldgrößen erforderlich.

ZUSAMMENFASSUNG

- Die gerichtete Bewegung von Ladungsträgern im leitfähigen Material wird durch die **Stromdichte** beschrieben. Sie entspricht dem Produkt aus der Raumladungsdichte und der Geschwindigkeit. Das Integral der Stromdichte über eine Fläche bezeichnen wir als Stromstärke (oft vereinfachend als elektrischen Strom).
- Im leitfähigen Material ist die Stromdichte proportional zur elektrischen Feldstärke. Der Proportionalitätsfaktor ist eine materialabhängige Eigenschaft und wird **elektrische Leitfähigkeit** genannt. Der Stromdichtevektor steht genauso wie die elektrische Feldstärke senkrecht auf den Äquipotentialflächen.
- Im stationären Strömungsfeld verschwindet das Integral der Stromdichte über eine geschlossene Hüllfläche, d.h. die im Volumen eingeschlossene Ladungsmenge ist zeitlich konstant. Die Stromstärke ist ebenfalls zeitlich konstant, wir sprechen vom **Gleichstrom**.
- An einer Materialsprungstelle mit unterschiedlichen Leitfähigkeiten sind die Normalkomponente der Stromdichte und die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke stetig. Auf der Oberfläche zu einem perfekt leitfähigen Material (Leitfähigkeit als unendlich groß angenommen) steht die Stromdichte senkrecht.
- Ein Bauelement aus leitfähigem Material mit zwei Anschlüssen bezeichnen wir als Widerstand. Seine Eigenschaft, ebenfalls als Widerstand bezeichnet, ist das Verhältnis aus der Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den beiden Anschlüssen und dem Strom (Stromstärke) durch das Bauelement.
- Das Produkt aus **Stromstärke** und **Spannung** ist die **elektrische Leistung**. Ihr Integral über die Zeit entspricht der am Widerstand in Wärme umgewandelten elektrischen Energie.

CWS COMPANION WEBSITE WWW.PEARSON-STUDIUM.DE

Lösungen

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1 Parallelschaltung von temperaturabhängigen Widerständen

Ein Kupferrunddraht hat den Radius $a = 0{,}6$ mm. Er ist von einer Silberschicht der Dicke $b = 0{,}2$ mm umgeben. Die Leitfähigkeiten und Temperaturkoeffizienten für die beiden Materialien sind in Tab. 2.1 angegeben.

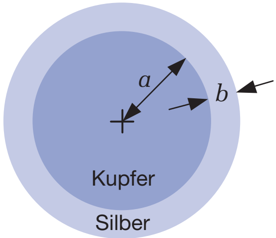


Abbildung 2.17: Querschnitt durch den Draht

1. Welchen Gleichstromwiderstand hat dieser Draht bei 20°C, wenn er eine Länge von 1 m besitzt?
2. Wie ändert sich der Gleichstromwiderstand bei einer Temperaturerhöhung auf 100°C?

Aufgabe 2.2 Widerstands- und Leistungsberechnung

In einem Koaxialkabel ist der Bereich zwischen Innen- und Außenleiter mit leitfähigem Material gefüllt. Der Bereich $0 \le \varphi < \alpha$ besteht aus einem Material der Leitfähigkeit κ_1, der Bereich $\alpha \le \varphi < 2\pi$ aus einem Material der Leitfähigkeit κ_2. Innenleiter und Außenleiter sind ideal leitfähig.

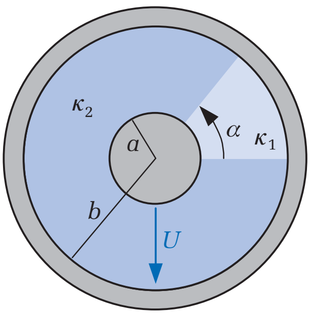


Abbildung 2.18: Koaxialkabel

1. Ermitteln Sie den Widerstand zwischen Innen- und Außenleiter für ein Leiterstück der Länge l.
2. Welche Gesamtleistung P wird verbraucht, wenn auf einer Länge l ein Gesamtstrom I vom Innen- zum Außenleiter fließt? Wie teilt sich hierbei die Leistung auf die beiden Materialbereiche auf?

Aufgabe 2.3 Schrittspannung

Ein Blitzableiter ist in Form eines halbkugelförmigen Erders in den Boden eingelassen worden.

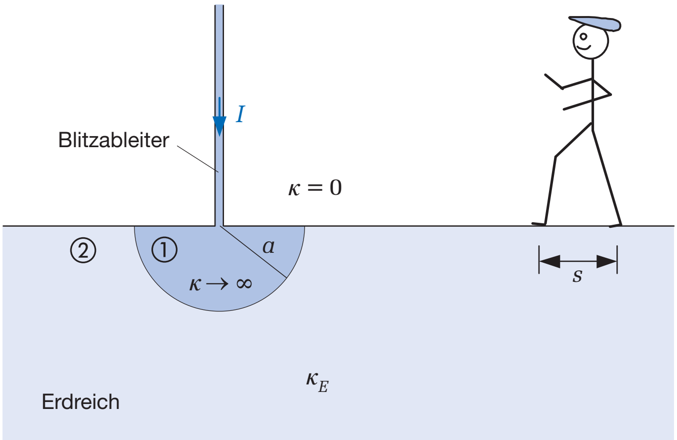


Abbildung 2.19: Halbkugelerder

Berechnen Sie die als **Schrittspannung** bezeichnete Potentialdifferenz, die sich in Abhängigkeit von dem Abstand zum Erder bei einer Schrittweite s ausbildet.

Einfache elektrische Netzwerke

3

ÜBERBLICK

Einführung

» Bei der Analyse elektronischer Schaltungen geht man in der Regel so vor, dass in einem ersten Schritt die realen Bauelemente durch einfache Ersatzschaltbilder (Modelle) ersetzt werden. Die Ableitung der Modellparameter haben wir bereits für einfache geometrische Anordnungen, z.B. bei der Berechnung der Kapazität eines Vielschichtkondensators kennen gelernt. Mithilfe von geeigneten Rechenverfahren und unter Zuhilfenahme vereinfachender Annahmen werden die im allgemeinen Fall komplizierten dreidimensionalen Feldverteilungen zurückgeführt auf die integralen Größen wie z.B. R und C. Diese Modellierung der Komponenten ist im Wesentlichen Aufgabe der Bauelementehersteller, die die benötigten Informationen in Datenblättern zur Verfügung stellen. Die Aufgabe für den Schaltungsentwickler besteht darin, aus den bekannten Komponenten gezielt Netzwerke für bestimmte Zwecke zusammenzubauen. Die Berechnung von Netzwerken spielt daher in der Elektrotechnik eine zentrale Rolle. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- die Kirchhoff'schen Gleichungen anzuwenden,
- komplizierte Widerstandsnetzwerke zu vereinfachen,
- prinzipielle Fehlerquellen bei Widerstandsmessungen zu berücksichtigen,
- Spannungs- und Stromquellen ineinander umzurechnen,
- die Verbraucherleistung bei vorgegebener Quelle zu maximieren,
- Wirkungsgradberechnungen durchzuführen sowie
- umfangreiche Gleichstromnetzwerke mit unterschiedlichen Methoden zu analysieren.

Bevor wir uns mit dem einfachsten Fall der Gleichstromnetzwerke beschäftigen, sollen einige immer wiederkehrende Begriffe definiert werden.

Zweipole:

Unter einem Zweipol versteht man ein Bauelement mit zwei Anschlussklemmen. Für die Behandlung von Zweipolen in den Netzwerken ist nur noch ihr **Klemmenverhalten** (gemeint ist der Zusammenhang zwischen den Größen Strom und Spannung an dem betreffenden Bauelement) von Interesse, die praktische Realisierung durch eine dreidimensionale Anordnung und die ortsabhängige Verteilung der Feldgrößen spielen keine Rolle mehr. Die Beschreibung erfolgt durch einfache skalare Beziehungen zwischen den an den Klemmen zugänglichen Größen Strom und Spannung. Als Beispiel sei an den Kugelkondensator in Abb. 1.32 erinnert, der lediglich durch seine Kapazität (1.80) charakterisiert wird.

Schaltkreise:

Durch die Zusammenschaltung von Bauelementen entstehen elektrische Netzwerke (Schaltkreise). Zur vollständigen Beschreibung eines Netzwerks muss neben dem Klemmenverhalten aller Komponenten auch die Verknüpfung der Bauelemente untereinander bekannt sein. Die Zusammenschaltung bezeichnet man als **Topologie** bzw. **Schaltungstopologie**.

Schaltbilder:

Die grafische Darstellung von Netzwerken bezeichnet man als Schaltbilder. Zur Darstellung der Bauelemente werden die Schaltsymbole verwendet. Die leitende Verbindung zwischen den Bauelementen (in der Praxis z.B. durch dünne leitende Drähte realisiert) wird als idealer (widerstandsloser) Leiter angesehen und spielt bei der Schaltungsanalyse keine Rolle. Die einzelnen Verbindungen sollten möglichst geradlinig, kreuzungsfrei und ohne Richtungsänderungen dargestellt werden. Gleichzeitig sollte die Wirkungsrichtung bzw. die Signalflussrichtung den Normen entsprechend von links nach rechts oder von oben nach unten verlaufen.

3.1 Zählpfeile

Erinnern wir uns noch einmal an die Definition der elektrischen Spannung nach Gl. (1.30) als das Wegintegral der elektrischen Feldstärke

$$U_{12} = \varphi_e(\mathrm{P}_1) - \varphi_e(\mathrm{P}_2) = \int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \,. \tag{3.1}$$

Die beiden Indizes bei der Spannung verdeutlichen die Richtung, in der die Feldstärke integriert wird. Wenden wir diese Beziehung auf die zylindrische Anordnung in Abb. 2.16 an, dann wird die Feldstärke von einem in der Äquipotentialfläche φ_{e1} liegenden Punkt P_1 bis zu einem in der Äquipotentialfläche φ_{e2} liegenden Punkt P_2, d.h. in Richtung der x-Koordinate integriert. Die Spannung wird dann ebenfalls in der gleichen Richtung positiv gezählt und in einem Schaltbild mit einem Zählpfeil versehen. Eine spezielle Kennzeichnung der beiden Anschlussklemmen mit den Zahlen 1 und 2 ist dann nicht mehr notwendig. Ist der Wert der Spannung auf der rechten Seite der ▶Abb. 3.1 positiv, dann stimmt die Richtung des elektrischen Feldes mit der Integrationsrichtung und damit auch mit der Zählrichtung für die Spannung überein, der Pfeil zeigt von positiven zu negativen Ladungen.

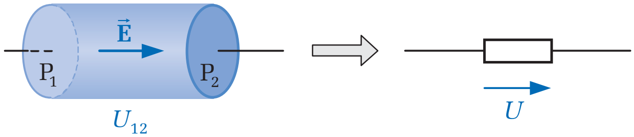


Abbildung 3.1: Kennzeichnung der Spannung durch Zählpfeile

Auf ähnliche Weise wird ein Zählpfeil für den Strom vereinbart. In Kap. 2.2 hatten wir bereits die Richtung der Stromdichte durch die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger in Gl. (2.9) definiert. Den Strom erhält man nach Gl. (2.11), indem man das Skalarprodukt aus der gerichteten Stromdichte mit dem vektoriellen Flächenelement über die zu betrachtende Fläche integriert. Je nach Orientierung der vektoriellen Fläche ergeben sich unterschiedliche Vorzeichen für den Strom. Betrachten wir auch hier wieder die in Abb. 2.16 dargestellte Anordnung. Nach Festlegung der Richtung von $d\vec{\mathbf{A}}$ kann dem Strom eindeutig ein Zählpfeil in diese Richtung zugeordnet werden (▶Abb. 3.2). Besitzt der Strom I auf der rechten Seite des Bildes einen positiven Wert, dann bewegen sich die positiven Ladungsträger in Richtung des vektoriellen Flächenelementes. Entsprechend bedeutet ein negativer Wert von I, dass sich die positiven Ladungsträger entgegen der Flächenorientierung bewegen.

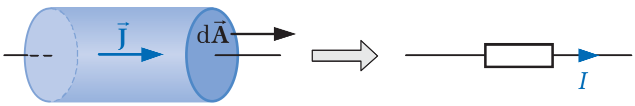


Abbildung 3.2: Kennzeichnung des Stromes durch Zählpfeile

Merke

- Strom und Spannung sind skalare Größen. Dennoch werden ihnen in Schaltungen Pfeile zugeordnet. Diese Pfeile dienen der Zählweise und dürfen nicht mit Vektoren verwechselt werden.
- Ein Spannungspfeil in Richtung der elektrischen Feldstärke zeigt positive Spannungen an. Ein Strompfeil in Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger zeigt positive Ströme an.

3.2 Spannungs- und Stromquellen

Zur Aufrechterhaltung eines Gleichstromes in einer Schaltung müssen Quellen vorhanden sein, die die von den Elektroden abfließenden Ladungsträger immer wieder nachliefern. Betrachten wir zunächst die ▶Abb. 3.3, bei der sich auf den Platten eines Kondensators die Ladungen $\pm Q$ befinden. An den Kondensator wird ein Verbraucher, symbolisiert durch einen Widerstand, angeschlossen, an den die im Kondensator gespeicherte Energie abgegeben werden soll. Da die auf der negativ geladenen Platte befindlichen Elektronen durch die angeschlossenen Drähte und den Widerstand zur positiv geladenen Platte fließen können, wird die anfänglich vorhandene Kondensatorspannung stetig abnehmen. Die aus dem Kondensator entnommene Energie wird im Widerstand in Wärme umgewandelt[1].

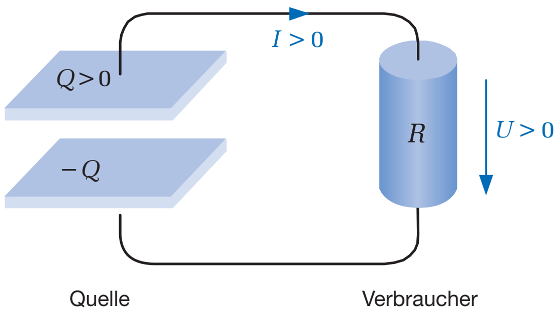


Abbildung 3.3: Spannungsquelle und Verbraucher

Der Kondensator in der vorliegenden Anordnung ist nur bedingt als Spannungsquelle einsetzbar. Einerseits nimmt seine Spannung zeitlich ab und andererseits kann er nur für einen begrenzten Zeitabschnitt Leistung abgeben, da lediglich die zuvor im elektrischen Feld zwischen den Kondensatorplatten gespeicherte Energie zur Verfügung steht. Der üblicherweise verwendete Begriff Quelle ist etwas irreführend, da keine Energieerzeugung, sondern immer nur Energieumwandlung stattfindet. In einem Akkumulator wird beispielsweise chemische Energie in elektrische Energie umgewandelt, im betrachteten Beispiel wird die elektrische Energie des Kondensators in Wärmeenergie am Widerstand umgewandelt.

Von einer idealen Gleichspannungsquelle wird jedoch erwartet, dass sie die Spannung unabhängig von dem Belastungswiderstand zeitlich konstant hält. Eine Batterie bzw. ein Akkumulator[2] mit hinreichend großer Energiereserve kommt dieser Situation

1 Strenggenommen wird bei diesem zeitabhängigen Vorgang auch ein geringer Teil der Energie durch Wellenausbreitung in den freien Raum abgestrahlt. Dieser Anteil tritt aber bei den im Folgenden behandelten Gleichstromnetzwerken nicht auf und wird daher auch nicht weiter betrachtet.

2 Ein Akkumulator wird genauso wie ein Kondensator durch seine Kapazität gekennzeichnet. Allerdings hat dieser Begriff beim Akkumulator eine etwas andere Bedeutung. Er bezeichnet nicht das Verhältnis von aufgenommener Ladung zu angelegter Spannung [As/V] entsprechend Gl. (1.74), sondern den über einen Zeitraum zur Verfügung stehenden Entladestrom. Die Kapazität des Akkumulators wird daher in Ah oder mAh angegeben. Die Bezeichnung h steht als Abkürzung für Stunde (*hour*).

schon sehr nahe. Mit elektronischen Schaltungen, die die vom 230V-Netz angebotene Energie in eine Gleichspannung umwandeln, lassen sich nahezu ideale Spannungsquellen realisieren.

Für eine solche ideale Spannungsquelle gilt:

- die Ausgangsspannung ist unabhängig von dem angeschlossenen Netzwerk,
- der Strom hängt von dem angeschlossenen Netzwerk ab und stellt sich z.B. im Falle eines ohmschen Widerstandes entsprechend der Beziehung $I = U/R$ ein.

Ein völlig anderes Verhalten zeigen die Stromquellen, die ebenfalls mithilfe elektronischer Schaltungen realisiert werden können. Für eine ideale Stromquelle gilt:

- der Ausgangsstrom ist unabhängig von dem angeschlossenen Netzwerk,
- die Ausgangsspannung hängt von dem angeschlossenen Netzwerk ab und stellt sich im Falle eines ohmschen Widerstandes entsprechend der Beziehung $U = RI$ ein.

Für die Spannungs- und Stromquellen werden die in der ▶Abb. 3.4 dargestellten Symbole verwendet. Dabei sind auch bereits die Fälle dargestellt, bei denen Strom und Spannung zeitlich veränderlich sind[3].

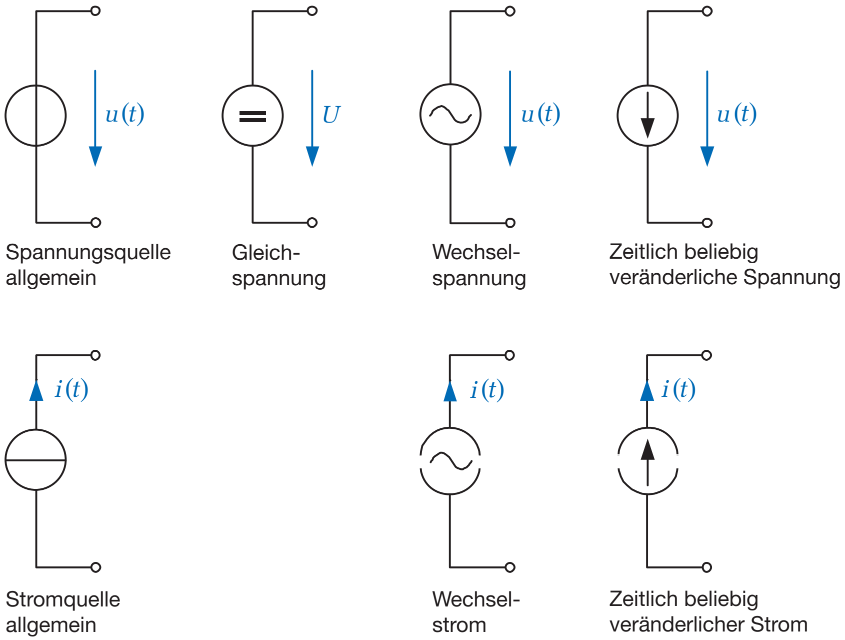


Abbildung 3.4: Ideale Spannungs- und Stromquellen

3 Die beiden Schaltzeichen *Spannungsquelle allgemein* und *Stromquelle allgemein* in Abb. 3.4 sind in Übereinstimmung mit den Normen. Die zusätzlichen ebenfalls oft in der Literatur verwendeten Schaltzeichen sind aussagekräftiger in Hinblick auf die Spannungs- bzw. Stromform und werden daher in den folgenden Kapiteln vor allem aus didaktischen Gründen verwendet.

3.3 Zählpfeilsysteme

In Abschnitt 3.1 haben wir bereits ein Zählpfeilsystem am ohmschen Widerstand (**Verbraucherzählpfeilsystem**) kennen gelernt (rechte Seite der ▶Abb. 3.5), bei dem Strom und Spannung gleich gerichtet sind. Für $U > 0$ wird der in die positive Anschlussklemme hineinfließende Strom positiv gezählt. Für die Quellen verwendet man üblicherweise das **Generatorzählpfeilsystem**, bei dem Spannung und Strom entgegengesetzt gerichtet sind. Der aus der positiven Anschlussklemme herausfließende Strom wird positiv gezählt. Diese Festlegung ist angepasst an den physikalischen Hintergrund, dass der Generator (Quelle) die Energie liefert, während der Verbraucher die Energie aufnimmt.

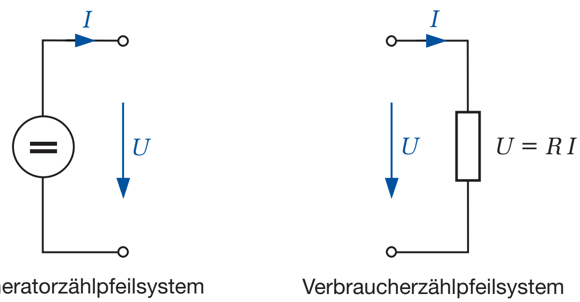


Abbildung 3.5: Generator- und Verbraucherzählpfeilsystem

3.4 Die Kirchhoff'schen Gleichungen

Eine der Hauptaufgaben der Netzwerkanalyse besteht darin, die Ströme und Spannungen an den einzelnen Zweipolen auszurechnen, sofern die verwendeten Netzwerkelemente (Widerstände, Kondensatoren usw.), ihre Verknüpfungen untereinander sowie die Quellen innerhalb des Netzwerks bekannt sind. Betrachten wir das an eine Spannungsquelle angeschlossene, allein aus ohmschen Widerständen aufgebaute Netzwerk in ▶Abb. 3.6, dann wird deutlich, dass zur Berechnung der gesuchten Größen das Ohm'sche Gesetz allein nicht ausreicht.[4] Zwar kann mit diesem an jedem Widerstand der Strom durch die Spannung oder die Spannung durch den Strom ausgedrückt werden, dennoch bleibt an jedem Zweipol eine Größe unbestimmt. Dies gilt auch für den Zweipol mit der Spannungsquelle, in dem der Strom zunächst unbekannt ist.

4 **Vereinbarung:** Die schwarz ausgefüllten Markierungspunkte (*Knoten*) in dem Netzwerk zeigen an, dass die Leitungen an dieser Stelle elektrisch leitend miteinander verbunden sind, z.B. durch Zusammenschrauben oder Verlöten. Die Kreisringe markieren diejenigen Punkte im Netzwerk, zwischen denen die eingezeichnete Spannung gemessen wird.

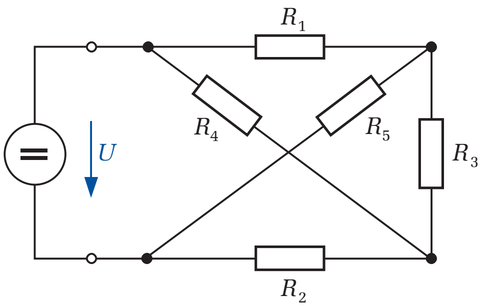


Abbildung 3.6: Einfaches Netzwerk

Zur allgemeinen Netzwerkanalyse werden offenbar weitere Bestimmungsgleichungen benötigt. Einen ersten Zusammenhang erhalten wir aus der Bedingung (1.22). Diese besagt, dass das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke entlang eines geschlossenen Weges verschwinden muss. Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs betrachten wir eine beliebige **Masche** aus dem in Abb. 3.6 dargestellten Netzwerk. Nummeriert man die Verbindungspunkte in der in ▶Abb. 3.7 angegebenen Weise, dann kann die Gl. (1.22) mit den Feldstärken folgendermaßen geschrieben werden

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{P_2}^{P_3} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{P_3}^{P_1} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0\,. \tag{3.2}$$

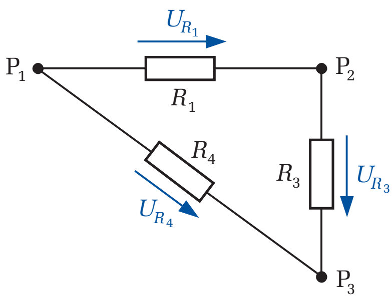


Abbildung 3.7: Maschenregel

Diese Gleichung lässt sich mit den in der Abb. 3.7 eingetragenen Spannungen und den ihnen willkürlich zugeordneten Zählpfeilen folgendermaßen schreiben

$$U_{R_1} + U_{R_3} - U_{R_4} = 0\,. \tag{3.3}$$

Verläuft der Integrationsweg $d\vec{\mathbf{s}}$ entgegen der willkürlich angenommenen Zählrichtung bei der Spannung, dann ist diese mit negativem Vorzeichen einzusetzen. Dieser hier an einem Beispiel gezeigte Zusammenhang wird als **Maschenregel** bezeichnet und lässt sich für jede geschlossene Masche in der allgemeinen Form

$$\sum_{Masche} U = 0 \tag{3.4}$$

darstellen. Damit gilt die Aussage:

Merke

Die Summe aller Spannungen beim Umlauf in einer geschlossenen Masche ist Null. Spannungen, deren Zählpfeil in Umlaufrichtung (entgegen der Umlaufrichtung) verläuft, werden mit positivem (negativem) Vorzeichen eingesetzt.

Einen weiteren Zusammenhang erhalten wir aus dem Hüllflächenintegral der Stromdichte, das im stationären Strömungsfeld nach Gl. (2.13) verschwindet

$$\oiint_A \vec{\mathbf{J}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = 0\,. \tag{3.5}$$

Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs betrachten wir den in ▶Abb. 3.8 dargestellten **Knoten** aus dem Netzwerk der Abb. 3.6. Die Gl. (3.5) besagt, dass im stationären Zustand die Zahl der Ladungsträger innerhalb des markierten Bereiches zeitlich konstant sein muss, d.h. die Summe der zu dem Knoten hinfließenden Ladungsträger muss gleich sein zu der Summe der vom Knoten wegfließenden Ladungsträger.

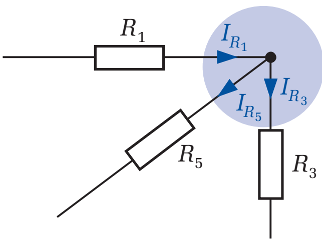


Abbildung 3.8: Knotenregel

Dieser Sachverhalt lässt sich mit den Strömen gemäß Abb. 3.8 und den ihnen zugeordneten Zählpfeilen folgendermaßen schreiben

$$I_{R_1} - I_{R_3} - I_{R_5} = 0\,. \tag{3.6}$$

Die Zählrichtung für die Ströme durch die Widerstände R_1 und R_3 ist nicht mehr frei wählbar. Sie muss in Übereinstimmung mit den bereits festgelegten Zählpfeilen für die Spannungen in Abb. 3.7 entsprechend dem Verbraucherzählpfeilsystem festgelegt werden.

Der hier an einem Beispiel gezeigte Zusammenhang wird als **Knotenregel** bezeichnet und lässt sich für jeden Knoten in der allgemeinen Form

$$\sum_{Knoten} I = 0 \tag{3.7}$$

schreiben. Damit gilt die Aussage:

Merke

Die Summe aller zu einem Knoten hinfließenden Ströme ist gleich der Summe aller von dem Knoten wegfließenden Ströme.

Die beiden Gleichungen (3.4) und (3.7) werden als **Kirchhoff'sche Gleichungen** bezeichnet (nach Gustav Robert Kirchhoff, 1824 – 1887).

Der Begriff Knoten gilt nicht nur für die bisher betrachtete leitende Verbindung zwischen den Drähten entsprechend der Abb. 3.8, sondern er schließt, wie in ▶Abb. 3.9 dargestellt, die Möglichkeit ein, einzelne Netzwerkelemente oder auch größere Teile einer Schaltung als Bestandteile des Knotens anzusehen.

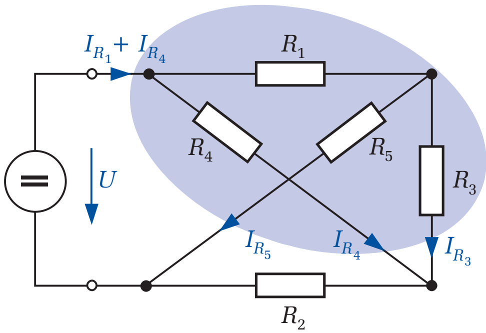


Abbildung 3.9: Zur Verallgemeinerung des Begriffs Knoten

Die Knotenregel bezieht sich auch in diesem Fall auf alle durch die Hüllfläche in den Knoten hinein- bzw. aus dem Knoten herausfließenden Ströme. Mit den in Abb. 3.9 definierten Strömen erhält man z.B. die zur Gl. (3.6) identische Beziehung

$$I_{R_1} + I_{R_4} = I_{R_3} + I_{R_4} + I_{R_5} \; . \tag{3.8}$$

Wir betrachten jetzt noch einmal die Abb. 3.5, wobei wir aber Generator und Verbraucher entsprechend ▶Abb. 3.10 zusammenschalten.

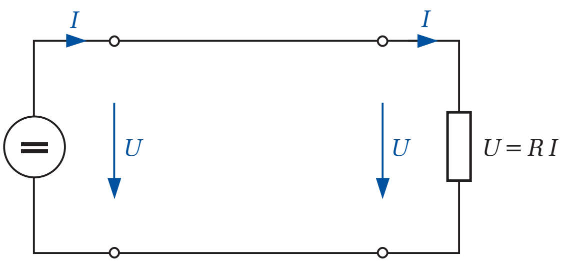


Abbildung 3.10: Zusammenspiel von Zählpfeilsystemen und Kirchhoff'schen Gleichungen

Der Maschenumlauf (3.4) liefert das richtige Ergebnis $U - U = 0$ und der Strom hat in der gesamten Masche die gleiche Zählrichtung, d.h. jeder beliebige grau hinterlegte und als Knoten deklarierte Bereich liefert entsprechend Gl. (3.7) das Ergebnis $I - I = 0$.

3.5 Einfache Widerstandsnetzwerke

In vielen Fällen kann die Netzwerkanalyse dadurch vereinfacht werden, dass einzelne Teile eines Netzwerks vorab zusammengefasst werden. Dabei muss lediglich darauf geachtet werden, dass sich das Klemmenverhalten des neuen vereinfachten Netzwerks gegenüber dem ursprünglichen Netzwerk nicht ändert, d.h. beim Anlegen der gleichen Spannung an die Klemmen muss in beiden Fällen der gleiche Strom fließen. Ähnlich wie bei der Zusammenschaltung von Kondensatoren in Kap. 1.18 wollen wir an dieser Stelle die beiden Möglichkeiten der Reihenschaltung (*Serienschaltung*) und Parallelschaltung von Widerständen untersuchen.

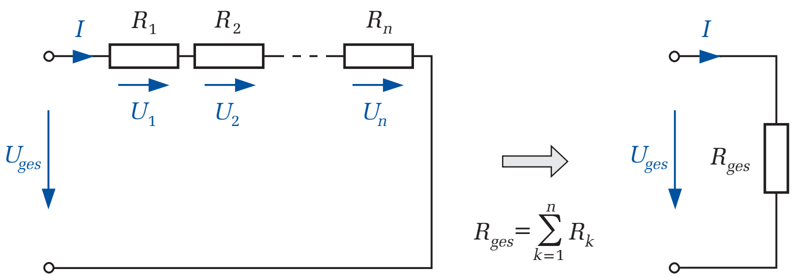


Abbildung 3.11: Reihenschaltung von Widerständen

Bei der in ▶Abb. 3.11 dargestellten **Reihenschaltung** werden nach Gl. (3.7) alle Widerstände von dem gleichen Strom durchflossen. Entsprechend dem Maschenumlauf nach Gl. (3.4) setzt sich die gesamte an den Eingangsanschlüssen anliegende Spannung aus den Teilspannungen an den einzelnen Widerständen zusammen

$$U_{ges} \overset{(3.4)}{=} \sum_{k=1}^{n} U_k \overset{(2.29)}{=} \sum_{k=1}^{n} R_k\, I = R_{ges}\, I\,. \tag{3.9}$$

Der Vergleich mit dem Netzwerk mit nur einem Gesamtwiderstand liefert unmittelbar das Ergebnis

$$\boxed{R_{ges} = \sum_{k=1}^{n} R_k}\,. \tag{3.10}$$

Bei der **Parallelschaltung** ist die Spannung an allen Widerständen gleich groß und der gesamte Eingangsstrom setzt sich nach Gl. (3.7) aus den Strömen durch die einzelnen Widerstände zusammen

$$I_{ges} \overset{(3.7)}{=} \sum_{k=1}^{n} I_k \overset{(2.29)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{U}{R_k} = U \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} = \frac{U}{R_{ges}}\,. \tag{3.11}$$

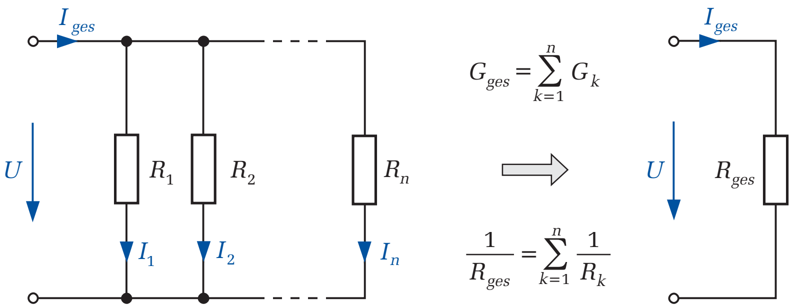


Abbildung 3.12: Parallelschaltung von Widerständen

In diesem Fall liefert der Vergleich mit dem Ersatznetzwerk das Ergebnis

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \, . \tag{3.12}$$

Für den Sonderfall mit nur zwei parallel geschalteten Widerständen gilt dann

$$R_{ges} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \, . \tag{3.13}$$

Ein weiterer Sonderfall ist die Parallelschaltung von n gleichen Widerständen. Der resultierende Gesamtwiderstand nimmt in diesem Fall den Wert

$$R_{ges} = \frac{R}{n} \tag{3.14}$$

an. Bei der Parallelschaltung ist die Verwendung der Leitwerte (2.32) sinnvoll, für die der Zusammenhang direkt aus Gl. (3.12) abgelesen werden kann

$$G_{ges} = \sum_{k=1}^{n} G_k \, . \tag{3.15}$$

Merke

Bei der Reihenschaltung von Widerständen addieren sich die Werte der einzelnen Widerstände, bei der Parallelschaltung berechnet sich der gesamte Leitwert aus der Summe der einzelnen Leitwerte.

In einem elektrischen Netzwerk können also in Reihe liegende Widerstände durch den nach Gl. (3.10) berechneten und parallel liegende Widerstände durch den nach Gl. (3.12) berechneten resultierenden Gesamtwiderstand ersetzt werden. Während bei der Reihenschaltung der Gesamtwiderstand stets größer als der größte Einzelwiderstand ist, gilt für die Parallelschaltung, dass der Gesamtwiderstand stets kleiner als der kleinste Einzelwiderstand ist.

Beispiel 3.1: Reihen- und Parallelschaltung

Wie groß ist der an den Eingangsklemmen gemessene Widerstand für die nachstehenden Netzwerke?

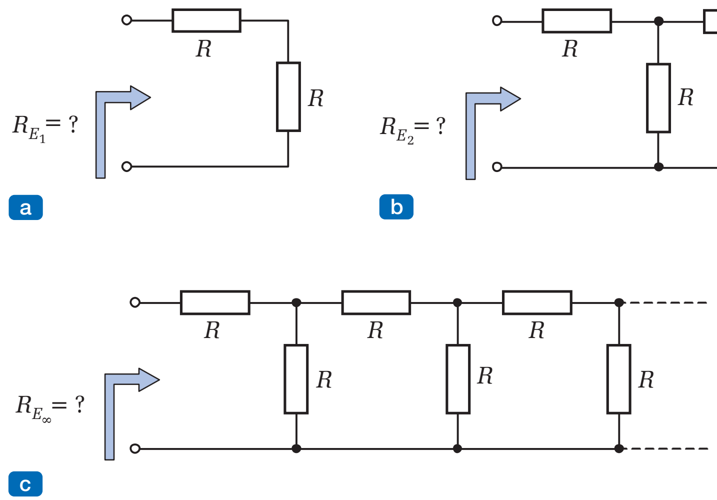


Abbildung 3.13: Netzwerkbeispiele zur Berechnung des Eingangswiderstandes

Lösung:

Für das Netzwerk a gilt mit Gl. (3.10) unmittelbar $R_{E_1} = 2R$. Beim Netzwerk b kann zunächst die Parallelschaltung aus R und $2R$ zusammengefasst und anschließend zu R in Reihe geschaltet, d.h. addiert werden:[5]

$$R_{E_2} = R + \left(R \| 2R\right) \overset{(3.13)}{=} R + \frac{2R \cdot R}{2R + R} = R + \frac{2}{3}R\,. \tag{3.16}$$

Das Netzwerk c besteht aus unendlich vielen identisch aufgebauten Stufen. Im Prinzip kann es analog zur Vorgehensweise beim Netzwerk b berechnet werden. Dabei wird man feststellen, dass der Eingangswiderstand beim Hinzufügen immer weiterer Stufen gegen einen Grenzwert konvergiert. Dieser lässt sich auf einfache Weise so wie in ▶Abb. 3.14 veranschaulicht berechnen.

5 **Bemerkung:** Die Schreibweise $R\|2R$ kennzeichnet die Parallelschaltung von einem Widerstand R mit einem Widerstand $2R$. Sie ist zwar leicht verständlich, jedoch nicht allgemein gebräuchlich.

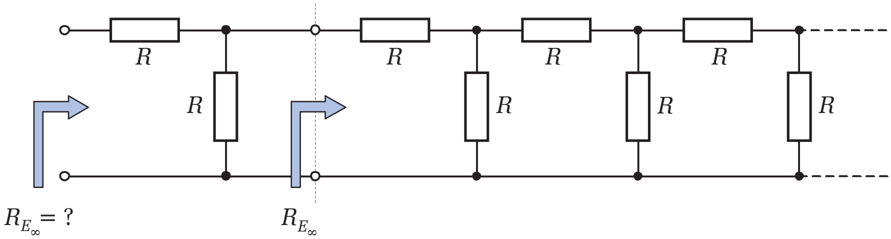


Abbildung 3.14: Zum Einfluss weiterer Stufen

Das Hinzufügen einer weiteren Stufe zu bereits unendlich vielen Stufen beeinflusst den Eingangswiderstand nicht mehr, d.h. die beiden gekennzeichneten Eingangswiderstände R_{E_∞} in Abb. 3.14 müssen identisch sein.

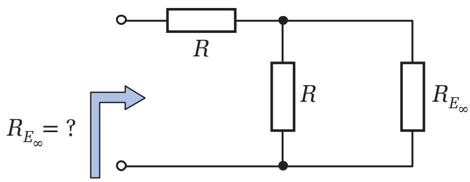


Abbildung 3.15: Resultierendes Netzwerk

Wir können dieses Netzwerk somit durch die vereinfachte Schaltung in ▶Abb. 3.15 ersetzen, für die wir den Eingangswiderstand aus der Beziehung

$$R_{E_\infty} = R + \left(R \| R_{E_\infty}\right) = R + \frac{R_{E_\infty} \cdot R}{R_{E_\infty} + R} \tag{3.17}$$

durch Auflösen nach R_{E_∞} erhalten

$$R_{E_\infty} = \frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2} = \frac{R}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right). \tag{3.18}$$

Die Methode der Widerstandsberechnung durch geeignete Zusammenfassung von Einzelwiderständen lässt sich auch an völlig anders gearteten Anordnungen anwenden. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 3.2: Widerstand einer Hohlkugel

In Kap. 2.6 haben wir den exakten Widerstand einer Hohlkugel mithilfe der Feldverteilung innerhalb der Hohlkugel berechnet. In diesem Beispiel betrachten wir eine alternative Möglichkeit zur Berechnung des gleichen Ergebnisses. Da der Strom nach Voraussetzung radialsymmetrisch von der inneren zur äußeren Kugelschale fließt, können wir uns die gesamte Hohlkugel aufgebaut denken aus einer Reihenschaltung von übereinanderliegenden dünnen Hohlkugeln.

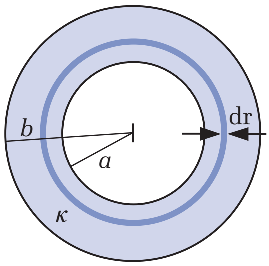


Abbildung 3.16: Widerstand einer Hohlkugel

Lösung:

Betrachten wir die markierte Kugelschale in ▶Abb. 3.16 mit der elementaren Dicke dr und der Querschnittsfläche $4\pi r^2$, dann besitzt diese nach Gl. (2.27) den elementaren Widerstand

$$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}r}{\kappa 4\pi r^2}\,. \tag{3.19}$$

Die Krümmung spielt wegen der kleinen Dicke keine Rolle mehr. Gemäß der Reihenschaltung der übereinanderliegenden dünnen Hohlkugeln müssen deren Widerstände nach Gl. (3.10) addiert bzw. im Grenzübergang $\mathrm{d}r \to 0$ von $r = a$ bis $r = b$ integriert werden. Diese Rechnung liefert das mit Gl. (2.36) übereinstimmende Ergebnis

$$R = \int_a^b \mathrm{d}R = \frac{1}{4\pi\kappa}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\kappa}\,\frac{b-a}{ba}\,. \tag{3.20}$$

3.5.1 Der Spannungsteiler

Die Reihenschaltung von Widerständen kann benutzt werden, um eine gegebene Spannung U mit hoher Genauigkeit in kleinere Teilspannungen umzuwandeln. Für den fest eingestellten Spannungsteiler in ▶Abb. 3.17 wollen wir das Spannungsverhältnis U_1/U_2 sowie das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung U_2/U bestimmen.

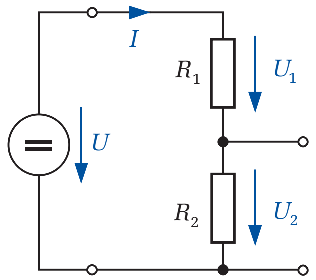


Abbildung 3.17: Schaltung zur Spannungsteilung

Die Schaltung besteht aus einer einzigen Masche, in der überall der gleiche Strom I fließt. Aus dem Ohm'schen Gesetz (2.29) und mit der Maschenregel (3.4) erhält man die Beziehungen

$$U_1 = R_1 I\,, \qquad U_2 = R_2 I \qquad \text{und} \qquad U = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2)\, I\,, \tag{3.21}$$

mit deren Hilfe die gesuchten Spannungsverhältnisse durch Quotientenbildung direkt angegeben werden können

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}}\,. \tag{3.22}$$

Aus der Gl. (3.22) lässt sich die Schlussfolgerung ziehen:

Merke

Fließt der gleiche Strom durch mehrere in Reihe geschaltete Widerstände, dann stehen die Teilspannungen im gleichen Verhältnis wie die Teilwiderstände, an denen sie abfallen.

Die an den Widerständen in Wärme umgewandelte Leistung berechnet sich nach Gl. (2.49) aus dem Produkt von Strom und Spannung. Infolge des gleichen Stromes stehen die Leistungen an den Widerständen im gleichen Verhältnis zueinander wie die Spannungen und nach Gl. (3.22) auch wie die Widerstände.

Die an einem Widerstand entstehende Teilspannung wird als **Spannungsabfall** bezeichnet. Dieser Begriff lässt sich mithilfe der ▶Abb. 3.18 leicht veranschaulichen. Definiert man das Potential am Minusanschluss der Spannungsquelle in Abb. 3.17 als Bezugswert $\varphi_e = 0$, dann besitzt das Potential am positiven Anschluss den Wert $\varphi_e = U$. Mit einem ortsunabhängigen Feldstärkeverlauf innerhalb der Widerstände nimmt das Potential linear ab und man erhält entlang der Reihenschaltung den in Abb. 3.18 für ein angenommenes Widerstandsverhältnis dargestellten Potentialverlauf.

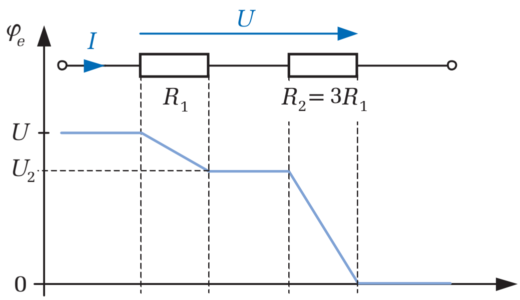


Abbildung 3.18: Potentialverlauf an einer Reihenschaltung

Beispiel 3.3: Brückenschaltung

Unter welchen Bedingungen darf im folgenden Netzwerk zwischen den Punkten P_1 und P_2 ein Kurzschluss eingebaut werden, ohne dass sich das Verhalten des Netzwerks ändert[6] ?

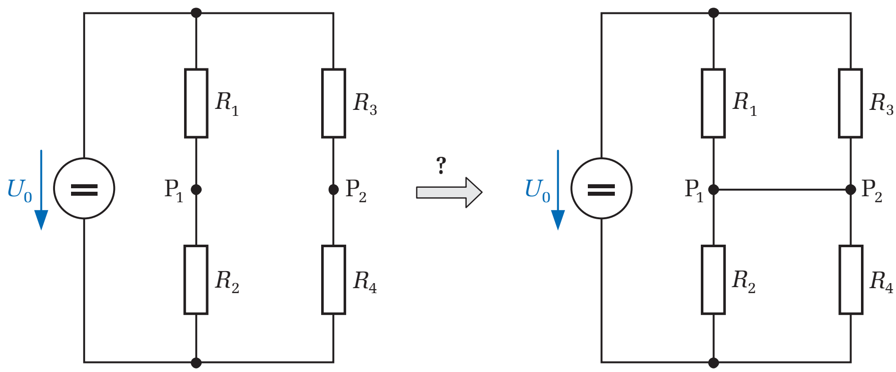


Abbildung 3.19: Gleichwertige Netzwerke

6 **Bemerkung:** Nicht verändertes Netzwerkverhalten bedeutet hier, dass alle Ströme und Spannungen im Netzwerk in beiden Situationen gleich sind.

Lösung:

Da im Ausgangsnetzwerk links kein Strom zwischen den Punkten P_1 und P_2 fließt, darf auch im rechten Netzwerk kein Strom durch den Kurzschlusspfad fließen (Ein Leiter, der nicht von einem Strom durchflossen wird, kann auch wieder entfernt werden.). Das lässt sich aber nur gewährleisten, wenn bereits im linken Netzwerk keine Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den Punkten P_1 und P_2 besteht. Gleiches Potential an den beiden Punkten bedeutet, dass die Quellenspannung von beiden Spannungsteilern R_1, R_2 und R_3, R_4 in dem gleichen Verhältnis geteilt wird. Mit Gl. (3.22) gilt damit

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad \text{oder} \quad \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \quad \text{oder} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \,. \tag{3.23}$$

Diese Bedingungen sind alle gleichwertig, wie sich durch einfaches Umstellen leicht überprüfen lässt.

Schlussfolgerung:

Der Verbindungszweig zwischen P_1 und P_2 ist stromlos, wenn das Produkt der beiden jeweils diagonal gegenüberliegenden Widerstände gleich ist. Diese Abgleichbedingung lässt sich durch Ändern von mindestens einem der Widerstände einstellen. In der Praxis wird diese unter der Bezeichnung **Wheatstone-Brücke** bekannte Schaltung zur Messung von Widerständen eingesetzt (nach Charles Wheatstone, 1802-1875). Nehmen wir an, der Wert des unbekannten Widerstandes R_3 soll bestimmt werden. Dann genügt es, die Werte R_1 und R_4 zu kennen und den Widerstand R_2 z.B. mithilfe einer Widerstandsdekade so einzustellen, dass ein zwischen den Punkten P_1 und P_2 angeschlossenes Messgerät die Spannung Null anzeigt. Mit dem an der Dekade ablesbaren Wert R_2 kann der gesuchte Wert R_3 mit Gl. (3.23) berechnet werden.

3.5.2 Der belastete Spannungsteiler

Die Spannung an dem Schleifkontakt eines Potentiometers soll gemäß ▶Abb. 3.20 mit einem realen Spannungsmessgerät (**Voltmeter**) gemessen werden. Dabei ist zu beachten, dass fast alle Spannungsmessgeräte von einem kleinen Strom durchflossen werden, der die in Gl. (3.22) berechnete Spannungsteilung beeinflusst und das Messergebnis verfälscht. Diesen Einfluss können wir erfassen, indem wir das reale Messgerät durch ein ideales Messgerät mit unendlich großem Innenwiderstand und zusätzlich durch einen parallel geschalteten Widerstand R_V ersetzen.

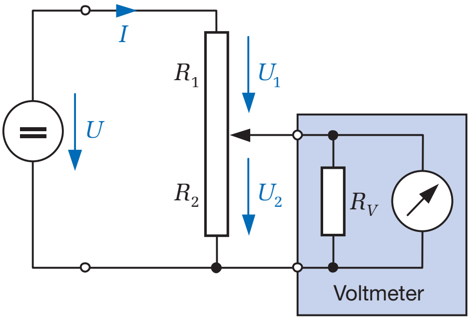


Abbildung 3.20: Belasteter Spannungsteiler

Die Berechnung der resultierenden Spannung U_2 wird wesentlich vereinfacht, wenn wir die Parallelschaltung der beiden Widerstände R_2 und R_V durch einen neuen Widerstand R_{par} ersetzen und die Spannung U_2 aus der Reihenschaltung von R_1 und R_{par} bestimmen

$$R_{par} \stackrel{(3.13)}{=} \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V} \quad \rightarrow \quad \frac{U_2}{U} \stackrel{(3.22)}{=} \frac{R_{par}}{R_1 + R_{par}} = \frac{R_2 R_V}{R_1 (R_2 + R_V) + R_2 R_V} \,. \tag{3.24}$$

Zur Darstellung dieses Ergebnisses werten wir ein Zahlenbeispiel aus. Der Gesamtwiderstand des Potentiometers soll $R_1 + R_2 = 10\ \mathrm{k\Omega}$ betragen. In Abhängigkeit von der Position des Schleifkontaktes durchläuft der Widerstand R_2 den Wertebereich $0 \le R_2 \le 10\ \mathrm{k\Omega}$. Die ▶Abb. 3.21 zeigt das Spannungsverhältnis (3.24) als Funktion des Widerstandes R_2. Die Gerade entspricht der Gl. (3.22), d.h. dem Sonderfall $R_V \to \infty$. Mit kleiner werdendem Widerstand R_V geht die Linearität zwischen der Position des Schleifkontaktes und der Ausgangsspannung U_2 mehr und mehr verloren. Ideal wäre also ein Voltmeter mit einem unendlich großen Innenwiderstand.

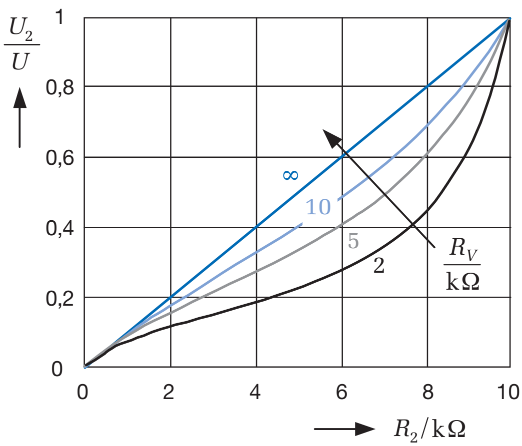


Abbildung 3.21: Ausgangsspannung am belasteten Spannungsteiler

3.5.3 Messbereichserweiterung eines Spannungsmessgerätes

Ein Anwendungsbeispiel für den Spannungsteiler ist die Messbereichserweiterung eines Voltmeters. Soll mit dem Messgerät in ▶Abb. 3.22 eine Spannung U gemessen werden, die die maximal zulässige Spannung am Voltmeter U_{max} überschreitet, dann kann die zu messende Spannung mit einem in Serie geschalteten Vorwiderstand R_S heruntergeteilt werden.

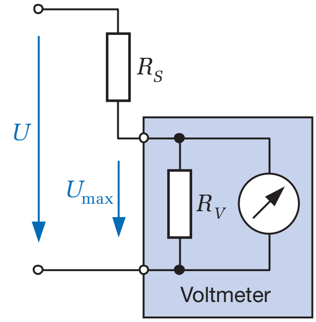


Abbildung 3.22: Voltmeter mit Vorwiderstand

Der Wert des Vorwiderstandes kann mithilfe der Gl. (3.22) berechnet werden

$$\frac{U_{\text{max}}}{U} = \frac{R_V}{R_S + R_V} \quad \rightarrow \quad R_S = \left(\frac{U}{U_{\text{max}}} - 1\right) R_V \,. \tag{3.25}$$

Beispiel 3.4: Zahlenbeispiel

Ein Voltmeter mit einem Innenwiderstand $R_V = 10\ \text{k}\Omega$ hat einen Messbereich von maximal 10 V. Welcher Serienwiderstand R_S ist erforderlich, um Spannungen bis 200 V messen zu können?

Lösung:

Aus der Gl. (3.25) folgt unmittelbar das Ergebnis

$$R_S = \left(\frac{200}{10} - 1\right) 10\,\text{k}\Omega = 190\,\text{k}\Omega \,. \tag{3.26}$$

3.5.4 Der Stromteiler

Zur Aufteilung eines Gesamtstromes in mehrere Teilströme werden Widerstände parallel geschaltet. Für die Schaltung in ▶Abb. 3.23 wollen wir das Verhältnis I_1/I_2 sowie das Verhältnis von Ausgangsstrom zu Quellenstrom I_2/I bestimmen.

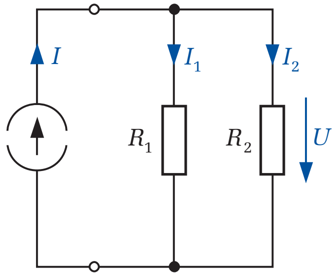


Abbildung 3.23: Schaltung zur Stromteilung

Mit der gleichen Spannung an den beiden parallel liegenden Widerständen gelten nach dem Ohm'schen Gesetz (2.29) die Beziehungen

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad \text{und} \quad I_2 = \frac{U}{R_2}\,. \tag{3.27}$$

Mit der Knotenregel (3.7)

$$I = I_1 + I_2 = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = U\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \tag{3.28}$$

erhält man die gesuchten Verhältnisse durch Quotientenbildung

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{G_1}{G_2}} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}}\,. \tag{3.29}$$

Merke

Liegt die gleiche Spannung an mehreren parallel geschalteten Widerständen, dann stehen die Ströme im gleichen Verhältnis wie die Leitwerte, die sie durchfließen.

Die Leistungen an den Widerständen verhalten sich wegen der gleichen Spannung wie die Ströme durch die Widerstände und stehen nach Gl. (3.29) im gleichen Verhältnis wie die Leitwerte.

3.5.5 Messbereichserweiterung eines Strommessgerätes

Zur Messung eines Stromes wird das Messgerät (**Ampèremeter**) in den Strompfad geschaltet, sein Innenwiderstand R_A sollte daher möglichst gering sein, um das Messergebnis nur wenig zu beeinflussen. Soll ein Strom gemessen werden, der den maximal zulässigen Bereich des Ampèremeters I_{max} überschreitet, dann kann der Gesamtstrom I durch einen parallel geschalteten Widerstand (*shunt*) heruntergeteilt werden.

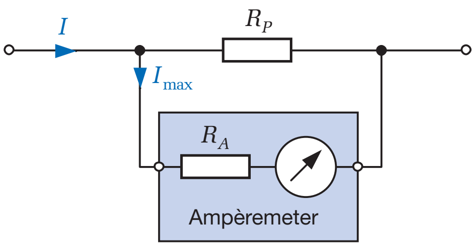


Abbildung 3.24: Ampèremeter mit Parallelwiderstand

Der Wert des Parallelwiderstandes kann mithilfe der Gl. (3.29) berechnet werden

$$\frac{I_{max}}{I} = \frac{R_P}{R_P + R_A} \quad \rightarrow \quad R_P = \frac{I_{max}}{I - I_{max}} R_A \,. \tag{3.30}$$

Beispiel 3.5: Zahlenbeispiel

Ein Ampèremeter mit einem Innenwiderstand von $R_A = 1\,\Omega$ hat einen Messbereich von maximal 100 mA. Welcher Parallelwiderstand R_P ist erforderlich, um Ströme bis 1 A messen zu können?

Lösung:

Aus der Gl. (3.30) folgt unmittelbar $R_P = R_A/9 \approx 0{,}11\,\Omega$.

3.5.6 Widerstandsmessung

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, den ohmschen Widerstand R eines Bauteils durch gleichzeitige Strom- und Spannungsmessung und mithilfe des Ohm'schen Gesetzes zu bestimmen. Da das Ampèremeter den Strom durch den Widerstand messen soll, muss es in Reihe zum Widerstand geschaltet werden. Zur Erfassung der Spannung am Widerstand muss das Voltmeter aber parallel zum Widerstand angeschlossen werden. Dadurch ergeben sich prinzipiell die beiden in den Abbildungen 3.25 und 3.26 dargestellten Möglichkeiten.

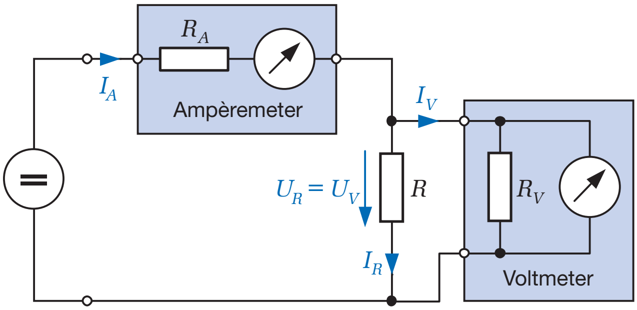


Abbildung 3.25: Korrekte Spannungsmessung

Bei der Schaltung in ▶Abb. 3.25 wird die Spannung am Widerstand richtig erfasst, das Ampèremeter misst allerdings nicht nur den Strom I_R durch den Widerstand, sondern zusätzlich auch noch den Strom I_V durch das Voltmeter. Für den Widerstandswert R erhalten wir das Ergebnis

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_V}{I_A - I_V} = \frac{U_V}{I_A - U_V / R_V} = \frac{U_V R_V}{I_A R_V - U_V} \,. \tag{3.31}$$

Der Innenwiderstand des Ampèremeters spielt bei dieser Messanordnung keine Rolle. Im Falle eines idealen Voltmeters $R_V \to \infty$ vereinfacht sich die Gl. (3.31) auf den Zusammenhang $R = U_V/I_A$, d.h. der Wert R kann direkt aus den beiden Messwerten berechnet werden.

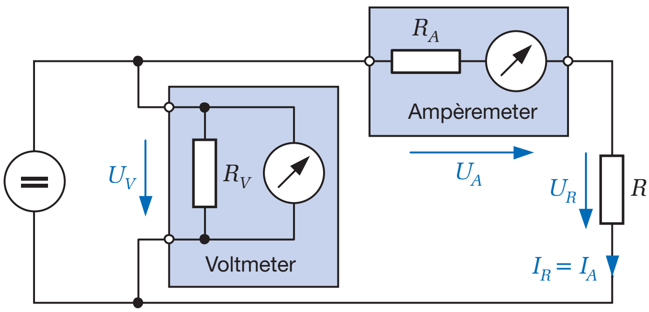


Abbildung 3.26: Korrekte Strommessung

Bei der alternativen Messanordnung in ▶Abb. 3.26 wird der Strom durch den Widerstand richtig gemessen, allerdings wird jetzt der Spannungsabfall U_A am Innenwiderstand des Ampèremeters bei der Spannungsmessung miterfasst. Den Widerstandswert erhalten wir aus der Beziehung

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_V - U_A}{I_A} = \frac{U_V - R_A I_A}{I_A} \,. \tag{3.32}$$

In diesem Fall spielt der Innenwiderstand des Voltmeters keine Rolle. Im Falle eines idealen Ampèremeters $R_A \to 0$ vereinfacht sich die Gl. (3.32) auf den Zusammenhang $R = U_V/I_A$, d.h. der Wert R kann wieder direkt aus den beiden Messwerten berechnet werden.

Beispiel 3.6: Zahlenbeispiel

Mit einem Ampèremeter mit Innenwiderstand $R_A = 1\ \Omega$ und einem Voltmeter mit Innenwiderstand $R_V = 50\ \text{k}\Omega$ soll der Nennwert eines Widerstandes von $R = 1\ \text{k}\Omega$ nachgemessen werden. In beiden Messschaltungen soll eine Spannungsquelle mit 100 V verwendet werden.

Welche Strom- und Spannungswerte werden gemessen und welche Abweichungen ergeben sich, wenn der Widerstandswert direkt aus den Messwerten bestimmt wird?

Lösung:

Die Messschaltung 3.25 liefert

$$I_A = \frac{100\,\text{V}}{R_A + \left(R \| R_V\right)} = 0{,}1019\,\text{A} \quad \text{und} \quad U_V = I_A \cdot \left(R \| R_V\right) = 99{,}898\,\text{V}\,. \tag{3.33}$$

Der direkt berechnete Widerstand

$$R = \frac{U_V}{I_A} = 980{,}39\,\Omega \tag{3.34}$$

ist um 1,96 % zu klein.

Die Messschaltung 3.26 liefert

$$I_R = I_A = \frac{100\,\text{V}}{R_A + R} = 0{,}0999\,\text{A} \quad \text{und} \quad U_V = 100\,\text{V} \tag{3.35}$$

und für den direkt aus den Messwerten berechneten Widerstandswert

$$R = \frac{U_V}{I_A} = 1001{,}0\,\Omega \tag{3.36}$$

einen um 0,1 % zu großen Wert.

Aus dem Beispiel können wir zwei Erkenntnisse ziehen:

- Die Fehler sind relativ gering, d.h. die direkte Berechnung von R aus den Messwerten ist in der Regel hinreichend genau.
- Die zweite Messschaltung erreicht bei dem Zahlenbeispiel eine wesentlich größere Genauigkeit. Der Fehler entsteht bei der Spannungsmessung infolge des Widerstandes R_A. Die hohe Genauigkeit ist also eine unmittelbare Folge des kleinen Verhältnisses $R_A/R = 1/1000$. Die Schaltung 3.26 wird daher vorzugsweise zur Messung großer Widerstände eingesetzt, wobei der Wert R_A gegenüber R vernachlässigt werden kann. Umgekehrt eignet sich die Schaltung 3.25 besonders zur Messung kleiner Widerstände, da hier der parallel liegende große Wert R_V ebenfalls vernachlässigbar ist.

3.6 Reale Spannungs- und Stromquellen

In der Abb. 3.4 haben wir die Schaltzeichen für *ideale* Spannungs- und Stromquellen definiert. Man kann sich jedoch leicht vorstellen, dass *reale* Quellen durch die alleinige Angabe des Spannungs- oder Stromwertes nach Abb. 3.4 nicht vollständig beschrieben werden können. Wird eine Spannungsquelle durch einen Verbraucher belastet, dann ruft der Strom innerhalb der Quelle, z.B. an den internen Anschlussleitungen, einen Spannungsabfall und damit Verluste hervor. Dieser Einfluss wird durch einen zur idealen **Quellenspannung** U_0 in Reihe liegenden **Innenwiderstand** R_i erfasst. In der Praxis kann die Beschreibung des Quellenverhaltens durch Ersatznetzwerke noch wesentlich komplizierter werden, insbesondere wenn zeitabhängige Ströme und Spannungen betrachtet werden, dies soll uns aber hier nicht weiter beschäftigen.

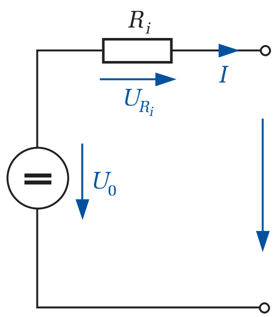


Abbildung 3.27: Spannungsquelle mit Innenwiderstand

Die Berücksichtigung der Verlustmechanismen führt auf das in ▶Abb. 3.27 dargestellte einfache Ersatzschaltbild (Modell) einer **Spannungsquelle**. Wird kein Verbraucher angeschlossen, dann fließt kein Strom und die an den Anschlussklemmen vorliegende Spannung $U = U_L = U_0$ wird als **Leerlaufspannung** U_L (= Quellenspannung) bezeichnet.

Verbindet man die beiden Anschlussklemmen miteinander (**Kurzschluss**), dann wird der **Kurzschlussstrom**

$$I_K = U_0 / R_i \tag{3.37}$$

nur durch den Innenwiderstand begrenzt. Die gesamte von der Quelle abgegebene Energie wird in diesem Fall am Innenwiderstand in Wärme umgewandelt, d.h. Spannungsquellen sollten nicht im Kurzschluss betrieben werden.

Die Spannungsquelle in Abb. 3.27 wird durch Angabe von Leerlaufspannung $U_L = U_0$ und Innenwiderstand R_i oder durch Angabe von Leerlaufspannung $U_L = U_0$ und Kurzschlussstrom I_K eindeutig beschrieben.

Ein geladener Kondensator, der seine Energie gemäß Abb. 3.3 an einen Widerstand abgibt, verhält sich prinzipiell wie eine Spannungsquelle (vgl. Kap. 3.2). Der Wert der Spannung ist nach Gl. (1.94) durch die im Kondensator gespeicherte *elektrische* Energie gegeben und der Strom durch einen angeschlossenen Widerstand stellt sich in Abhängigkeit von dem Wert des Widerstandes ein.

Im Gegensatz dazu werden wir in Kap. 5 als weiteres Bauelement die Spule kennen lernen, deren Verhalten dem einer Stromquelle vergleichbar ist. In diesem Fall wird der Strom durch die *magnetische* Energie in der Spule bestimmt und die Spannung stellt sich in Abhängigkeit von dem Wert eines angeschlossenen Widerstandes entsprechend dem Ohm'schen Gesetz ein.

Die ▶Abb. 3.28 zeigt eine **Stromquelle** mit dem **Quellenstrom** I_0 und dem Innenwiderstand R_i. Da der Strom vorgegeben ist, muss immer ein geschlossener Strompfad vorhanden sein. Bei geöffneten Anschlussklemmen fließt der gesamte Strom I_0 durch den parallel zur Quelle liegenden Innenwiderstand und die von der Quelle abgegebene Energie wird an R_i in Wärme umgewandelt, d.h. Stromquellen sollten nicht im Leerlauf betrieben werden.

Der an den Anschlussklemmen im Kurzschlussbetrieb zur Verfügung stehende Strom $I = I_K = I_0$ wird als **Kurzschlussstrom** I_K (= Quellenstrom) bezeichnet.

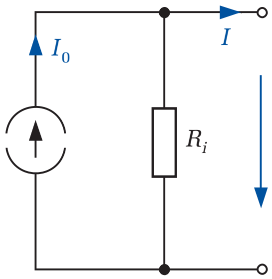


Abbildung 3.28: Stromquelle mit Innenwiderstand

Für die Leerlaufspannung gilt

$$U_L = I_0 R_i \,. \tag{3.38}$$

Bezüglich ihres Klemmenverhaltens können Spannungs- und Stromquelle ineinander umgerechnet werden. Dazu muss sichergestellt werden, dass beide Quellen die gleiche Leerlaufspannung und den gleichen Kurzschlussstrom aufweisen. Beide Forderungen werden erfüllt, wenn der Zusammenhang

$$U_0 = I_0 R_i \tag{3.39}$$

zwischen Quellenstrom und Quellenspannung gilt. Unter dieser Voraussetzung verhalten sich beide Quellen bezüglich ihrer Anschlussklemmen gleich und der Strom I durch einen beliebigen Verbraucher R hat in beiden Fällen den gleichen Wert $I = U_0/(R + R_i)$. Das Ergebnis lässt sich mit den beiden äquivalenten Schaltungen in ▶Abb. 3.29 leicht bestätigen.

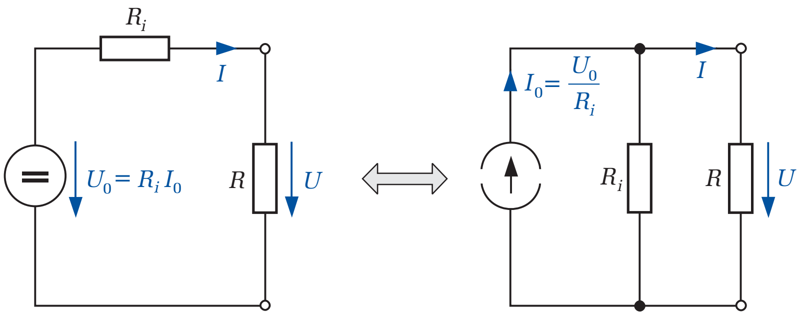


Abbildung 3.29: Äquivalente Quellen

An dieser Stelle ist noch ein Hinweis in Bezug auf die beiden Quellen angebracht. Obwohl an einen beliebigen Widerstand R in beiden Fällen die gleiche Leistung abgegeben wird, ist das interne Verhalten der Quellen unterschiedlich. Die Ursache liegt an der unterschiedlichen Verlustleistung an dem jeweiligen Innenwiderstand R_i. Im Leerlauffall wird der Spannungsquelle keine Leistung entnommen, während die Stromquelle die Leistung $U_0 I_0$ an R_i abgibt. Im Kurzschlussfall ist die Situation genau umgekehrt.

3.7 Wechselwirkungen zwischen Quelle und Verbraucher

Die Zusammenschaltung von Quellen und Verbrauchern wirft naturgemäß einige Fragen auf. In den folgenden Abschnitten werden die Besonderheiten bei der Verwendung mehrerer Quellen betrachtet und die Fragen nach der maximal von einer Quelle zur Verfügung gestellten Leistung sowie nach dem Wirkungsgrad beantwortet.

3.7.1 Zusammenschaltung von Spannungsquellen

In vielen Anwendungen findet man Reihenschaltungen von Spannungsquellen zur Erhöhung der Gesamtspannung oder auch Parallelschaltungen zur Erhöhung des verfügbaren Stromes oder zur Erhöhung der Kapazität, z.B. um einen Verbraucher über einen längeren Zeitraum mit Energie versorgen zu können.

Die damit zusammenhängenden Probleme wollen wir an einem einfachen Beispiel diskutieren. Wir betrachten zwei Spannungsquellen mit den gleichen Innenwiderständen R_i, aber mit unterschiedlichem Ladezustand. Aus den beiden parallel geschalteten Quellen mit den Leerlaufspannungen U_{10} und U_{20} soll ein Verbraucher R mit Energie versorgt werden (▶Abb. 3.30).

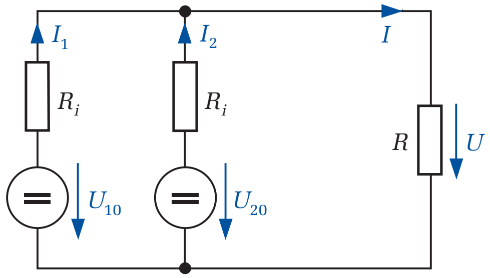


Abbildung 3.30: Parallel geschaltete Spannungsquellen

Aus den Kirchhoff'schen Gleichungen folgen unmittelbar die Zusammenhänge

$$U = RI \overset{(3.7)}{=} R(I_1 + I_2) \overset{(3.4)}{=} U_{10} - R_i I_1 \overset{(3.4)}{=} U_{20} - R_i I_2\,, \tag{3.40}$$

aus denen die beiden Ströme

$$I_1 = \frac{1}{R_i^{\,2} + 2RR_i}\left[(R_i + R)\,U_{10} - RU_{20}\right] \quad \text{und} \quad I_2 = \frac{1}{R_i^{\,2} + 2RR_i}\left[(R_i + R)\,U_{20} - RU_{10}\right] \tag{3.41}$$

berechnet werden können. Die Richtigkeit dieser Ergebnisse kann durch Einsetzen der Gln. (3.41) in (3.40) leicht bestätigt werden. Setzen wir als Beispiel die Zahlenwerte $U_{10} = 12{,}8$ V, $U_{20} = 11{,}8$ V, $R_i = 1\ \Omega$ und $R = 20\ \Omega$ ein, dann nehmen die beiden Ströme die Werte $I_1 = 0{,}8$ A und $I_2 = -0{,}2$ A an. Infolge der unterschiedlichen Leerlaufspannungen wird in dem betrachteten Netzwerk die Quelle 2 zum Verbraucher. Die aus der Spannungsquelle U_{10} entnommene Energie wird teilweise an den Widerstand R abgegeben und teilweise zum Nachladen der zweiten Spannungsquelle U_{20} verwendet. Eine gleichmäßig aufgeteilte Energieabgabe ist nur möglich bei identischen Quellen.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen:

- Die Leistungsabgabe von parallel geschalteten Spannungsquellen ist unterschiedlich, wenn die Leerlaufspannungen oder die Innenwiderstände unterschiedlich sind.
- In einem Netzwerk mit mehreren Quellen kann ein Teil der Quellen als Verbraucher wirken, wenn sie nämlich die von anderen Quellen abgegebene Energie aufnehmen. Dieser Zustand ist gewollt beim Nachladen einer Batterie.

3.7.2 Leistungsanpassung

Eine weitere wichtige Frage im Zusammenwirken von Quelle und Verbraucher ist die Frage nach der maximal von einer Quelle zur Verfügung gestellten Leistung. Ausgehend von der Schaltung in ▶Abb. 3.31, in der ein Verbraucher (Lastwiderstand) R_L an eine durch die Leerlaufspannung U_0 und den Innenwiderstand R_i charakterisierte Spannungsquelle angeschlossen ist, soll die Bedingung für maximale Leistungsabgabe an den Verbraucher abgeleitet werden.

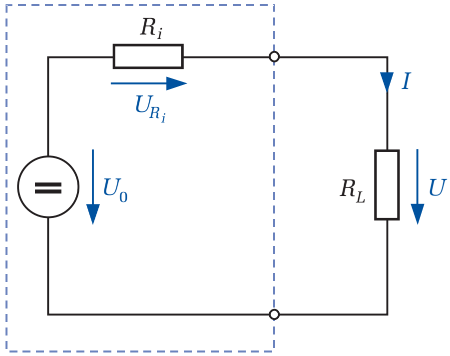


Abbildung 3.31: Berechnung der maximalen Ausgangsleistung

Gesucht ist also derjenige Wert für R_L, für den die Leistung P_L an diesem Verbraucher den Maximalwert erreicht. Für die Leistung gilt mit Gl. (2.49)

$$P_L = I^2 R_L = \left(\frac{U_0}{R_i + R_L}\right)^2 R_L \,. \tag{3.42}$$

Die maximale Leistung in Abhängigkeit von dem Wert R_L erhält man aus der Forderung nach dem Verschwinden der ersten Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}R_L} = U_0{}^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R_L} \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} = U_0{}^2 \frac{R_i - R_L}{(R_i + R_L)^3} \overset{!}{=} 0 \,. \tag{3.43}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\boxed{R_L = R_i} \,. \tag{3.44}$$

Merke

Eine Gleichspannungsquelle gibt die maximale Leistung bei Widerstandsanpassung $R_L = R_i$ ab.

Die maximale Ausgangsleistung (**verfügbare Leistung**) beträgt dann mit Gl. (3.42)

$$\boxed{P_{L\,\max} = \frac{U_0{}^2}{4R_i}} \,. \tag{3.45}$$

Das Verhältnis aus der an den Widerstand R_L abgegebenen Leistung (3.42) zu der verfügbaren Leistung (3.45)

$$\frac{P_L}{P_{L\,\max}} = \frac{4R_i R_L}{(R_i + R_L)^2} = \frac{4R_L / R_i}{(1 + R_L / R_i)^2} \tag{3.46}$$

ist für den gesamten Wertebereich zwischen Kurzschluss und Leerlauf $0 \le R_L \le \infty$ in ▶Abb. 3.32 dargestellt.

Zur besseren Übersicht wird auf der Abszisse aber nicht der Wertebereich von R_L zwischen Null und Unendlich aufgetragen. Das Ergebnis lässt sich nämlich anschaulicher darstellen, wenn der von der Quelle abgegebene Strom

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_L} \tag{3.47}$$

für die Achseneinteilung verwendet wird. Dieser Strom nimmt seinen Maximalwert

$$I_{\max} = \frac{U_0}{R_i} \tag{3.48}$$

im Kurzschlussfall, d.h. bei $R_L = 0$ an. Das Verhältnis der beiden Ströme

$$\frac{I}{I_{\max}} = \frac{R_i}{R_i + R_L} = \frac{1}{1 + R_L / R_i} \tag{3.49}$$

ändert sich also von 0 auf 1, wenn sich der Lastwiderstand von Leerlauf ($R_L = \infty$) auf Kurzschluss ($R_L = 0$) reduziert.

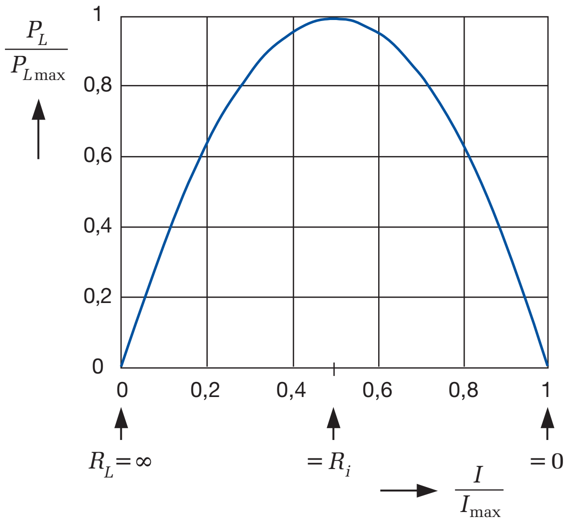


Abbildung 3.32: Normierte Ausgangsleistung als Funktion des normierten Stromes

Die Kurve in Abb. 3.32 lässt sich leicht berechnen, indem für verschiedene Zahlenverhältnisse R_L/R_i mit Gl. (3.49) der Abszissenwert und mit Gl. (3.46) der jeweils zugehörige Ordinatenwert berechnet wird. Alternativ kann auch die Gl. (3.49) nach dem Widerstandsverhältnis R_L/R_i aufgelöst und das Ergebnis in Gl. (3.46) eingesetzt werden. Damit erhält man direkt den gesuchten Zusammenhang

$$\frac{P_L}{P_{L\max}} = \frac{4I}{I_{\max}}\left(1 - \frac{I}{I_{\max}}\right). \tag{3.50}$$

Die drei interessantesten Zustände, nämlich Leerlauf, Widerstandsanpassung und Kurzschluss sind in der Abbildung besonders gekennzeichnet. Bei Widerstandsanpassung $R_L = R_i$ nimmt die Ausgangsleistung ihren Maximalwert $P_L = P_{L\max}$ an. Weicht der Widerstand R_L von dem Wert R_i ab, dann wird weniger Leistung von der Quelle an den Verbraucher abgegeben. An den beiden Grenzen Leerlauf und Kurzschluss verschwinden entweder Strom oder Spannung am Verbraucher, so dass die Leistung $P_L = UI$ ebenfalls in beiden Fällen verschwindet.

3.7.3 Wirkungsgrad

Mit kleiner werdendem Lastwiderstand in Abb. 3.31 steigt der Strom kontinuierlich an. Obwohl die von der Quelle gelieferte Leistung

$$P_{ges} = U_0 I \overset{(3.45),(3.48)}{=} 4\frac{P_{L\max}}{I_{\max}} I \quad \rightarrow \quad \frac{P_{ges}}{P_{L\max}} = 4\frac{I}{I_{\max}} \tag{3.51}$$

damit ebenfalls ansteigt, nimmt die Leistung am Verbraucher in dem Bereich $R_L < R_i$ nach Abb. 3.32 kontinuierlich ab. In ▶Abb. 3.33 sind sowohl die Verbraucherleistung P_L als auch die von der Quelle abgegebene Leistung P_{ges} mit dem gleichen Bezugswert $P_{L\max}$ dargestellt. Die Differenz zwischen den beiden Kurven entspricht der an dem Innenwiderstand der Quelle entstehenden Verlustleistung.

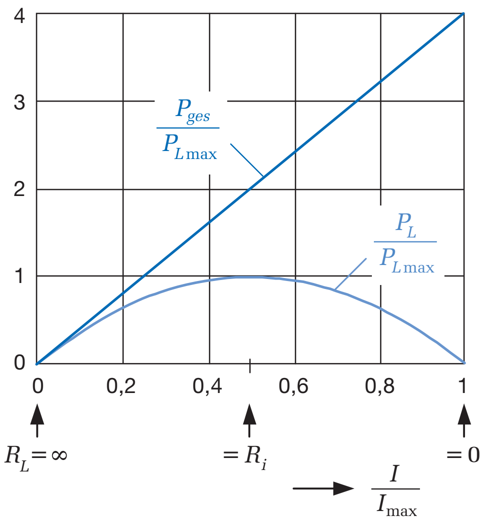


Abbildung 3.33: Von der Quelle abgegebene und vom Verbraucher aufgenommene Leistung

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach dem **Wirkungsgrad** η. Darunter versteht man das Verhältnis von der an dem Lastwiderstand verbrauchten Leistung (*Nutzleistung*) zu der gesamten von der Quelle abgegebenen Leistung

$$\eta = \frac{P_L}{P_{ges}} \cdot 100\% \overset{(2.49)}{=} \frac{I^2 R_L}{I^2 (R_i + R_L)} \cdot 100\% = \frac{R_L / R_i}{1 + R_L / R_i} \cdot 100\% \,. \tag{3.52}$$

Setzt man die nach dem Widerstandsverhältnis R_L/R_i aufgelöste Beziehung (3.49) in Gl. (3.52) ein, dann kann der Wirkungsgrad als Funktion des Stromverhältnisses angegeben werden

$$\eta = \left(1 - \frac{I}{I_{max}}\right) \cdot 100\,\% \,. \tag{3.53}$$

Diese linear abfallende Funktion ist in ▶Abb. 3.34 dargestellt. Man erkennt, dass der Wirkungsgrad mit zunehmendem Strom aus der Quelle geringer wird. Bei Widerstandsanpassung beträgt der Wirkungsgrad nur 50 %, d.h. am Innenwiderstand der Quelle wird genau so viel Leistung verbraucht wie am Lastwiderstand (vgl. auch Abb. 3.33).

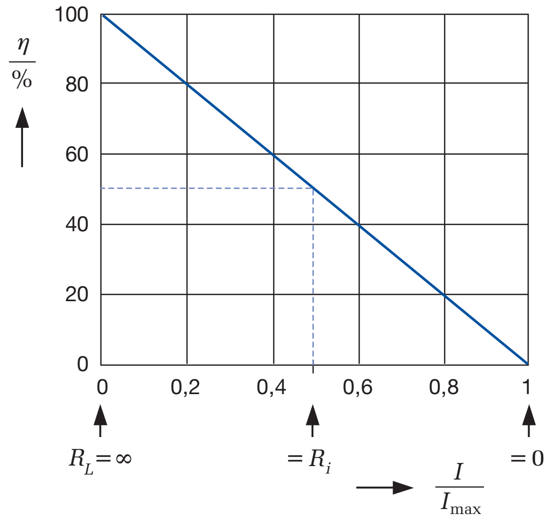


Abbildung 3.34: Wirkungsgrad

Die Wirkungsgradfrage ist von besonderem Interesse bei Energieübertragungssystemen. Die im Kraftwerk erzeugte Energie soll möglichst verlustarm zum Verbraucher transportiert werden. Bei vorgegebener Verbraucherleistung $P_L = UI$ und ebenfalls vorgegebenem Innenwiderstand R_i (dazu gehört nicht nur der Innenwiderstand des Generators, sondern auch der gesamte Widerstand der Übertragungsleitungen) lässt sich der Wirkungsgrad steigern, wenn der Strom möglichst klein und als Konsequenz die Spannung entsprechend groß wird. In der Praxis erfolgt die Energieübertragung auf Hochspannungsleitungen mit Spannungen im Bereich von einigen hundert kV.

3.8 Das Überlagerungsprinzip

Enthält eine Schaltung mehrere Quellen, dann können die Ströme und Spannungen in den einzelnen Zweigen des Netzwerks durch die Überlagerung von Teillösungen berechnet werden. Voraussetzung dafür ist, dass an den einzelnen Netzwerkelementen *lineare* Beziehungen zwischen Strom und Spannung gelten. Zur Berechnung einer Teillösung wird nur eine einzige Quelle betrachtet, die anderen Quellen werden *zu Null gesetzt*. Für diese Quelle wird dann die Netzwerkanalyse durchgeführt, d.h. es werden die Ströme und Spannungen in den interessierenden Zweigen berechnet.

Bei dieser Vorgehensweise muss sichergestellt werden, dass nach der Überlagerung der Teillösungen in jedem Zweig, der eine Stromquelle enthält, genau der vorgegebene Quellenstrom fließt und dass in jedem Zweig mit einer Spannungsquelle genau die vorgegebene Spannung vorliegt. Bei der Überlagerung dürfen keine zusätzlichen Ströme zu einer Stromquelle und keine zusätzlichen Spannungen zu einer Spannungsquelle addiert werden. Nullsetzen der Quellen bedeutet also, dass eine Spannungsquelle durch einen Kurzschluss (keine Spannung in dem Zweig, d.h. $U = 0$) und eine Stromquelle durch einen Leerlauf (kein Strom in dem Zweig, d.h. $I = 0$) ersetzt wird (vgl. die normgerechten Schaltsymbole in Abb. 3.4).

Ist die Netzwerkanalyse in dieser Weise für jede Quelle einzeln durchgeführt, dann ist der gesamte Strom in einem Zweig des Netzwerks bei Vorhandensein aller Quellen gleich der Summe aller vorher berechneten Teilströme in diesem Zweig.

Zur Veranschaulichung der Vorgehensweise betrachten wir das Netzwerk in ▶Abb. 3.35 mit jeweils einer Strom- und einer Spannungsquelle. Wir wollen mit der beschriebenen Methode den Strom I_2 durch den Widerstand R_2 berechnen. (Zum Vergleich kann das Netzwerk auch durch Aufstellung von Maschen- und Knotengleichungen direkt gelöst werden.)

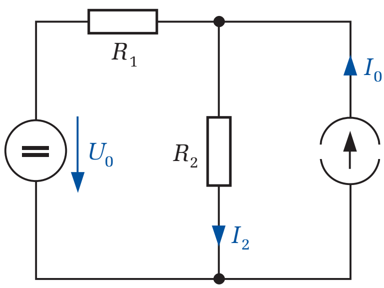


Abbildung 3.35: Überlagerung von Quellen

In der ersten Teillösung soll der Beitrag der Spannungsquelle U_0 zum gesuchten Strom berechnet werden. Wird die Stromquelle durch einen Leerlauf ersetzt, dann vereinfacht sich das Netzwerk, wie in ▶Abb. 3.36a dargestellt. Der Strom I_{2a} durch den Widerstand R_2 kann für diese Teillösung mit dem Ohm'schen Gesetz unmittelbar angegeben werden

$$I_{2a} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \,. \tag{3.54}$$

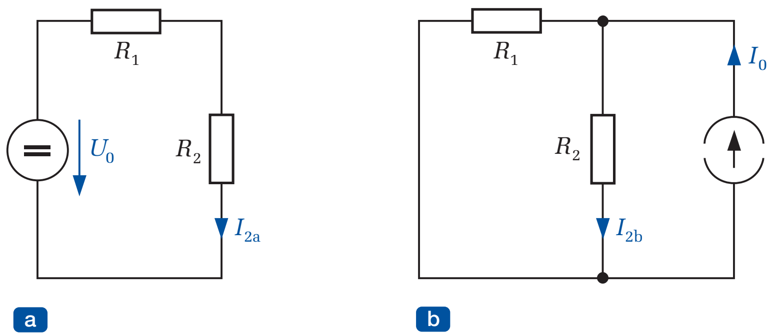


Abbildung 3.36: Netzwerke für die beiden Teillösungen

In der zweiten Teillösung wird nur die Stromquelle I_0 betrachtet, wobei die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt werden muss. Das resultierende Netzwerk in ▶Abb. 3.36b ist aber identisch zu dem Stromteiler in Abb. 3.23, so dass der Strom durch R_2 mit Gl. (3.29) ebenfalls direkt angegeben werden kann

$$I_{2b} = \frac{R_1 I_0}{R_1 + R_2} . \tag{3.55}$$

Damit ist der Gesamtstrom für das Ausgangsnetzwerk in Abb. 3.35 bekannt

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} = \frac{U_0 + R_1 I_0}{R_1 + R_2} . \tag{3.56}$$

Am Anfang dieses Abschnitts haben wir als Voraussetzung für die Überlagerung einen linearen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an den Komponenten gefordert. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Gleichung für die Leistung an dem Widerstand R_2, in der der Strom nicht mehr linear, sondern quadratisch vorkommt

$$P_2 \overset{(2.49)}{=} I_2{}^2 R_2 = (I_{2a} + I_{2b})^2 R_2 = \left(I_{2a}{}^2 + 2 I_{2a} I_{2b} + I_{2b}{}^2\right) R_2 . \tag{3.57}$$

Bei linearer Überlagerung der einzelnen Beiträge fällt das gemischte Glied weg

$$P_{2a} + P_{2b} = I_{2a}{}^2 R_2 + I_{2b}{}^2 R_2 \overset{(3.57)}{=} P_2 - 2 I_{2a} I_{2b} R_2 \overset{!}{\neq} P_2 \tag{3.58}$$

und man erhält ein falsches Ergebnis.

Vorsicht

Wegen des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Strom und Leistung darf die Leistung an einem Widerstand nicht durch Summation der Teilleistungen infolge der Teilströme berechnet werden.

3.9 Analyse umfangreicher Netzwerke

Nachdem wir uns in den bisherigen Kapiteln ausschließlich mit sehr einfachen Netzwerken beschäftigt haben, wollen wir uns jetzt den Fragen im Zusammenhang mit der Analyse umfangreicher Netzwerke zuwenden. Diese können Spannungsquellen, Stromquellen und Widerstände enthalten. Wir werden den folgenden Betrachtungen lineare Netzwerke zugrunde legen, d.h. an allen im Netzwerk vorhandenen Widerständen sind Spannung und Strom proportional zueinander. Die Gleichungen zur Beschreibung der Netzwerke sind dann ebenfalls linear. Unabhängig von dieser Einschränkung gelten die folgenden Überlegungen allgemein auch für nichtlineare Netzwerke. Der Unterschied besteht lediglich in dem erhöhten mathematischen Aufwand bei der Auflösung der sich ergebenden nichtlinearen Gleichungssysteme.

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist die Schaltung in Abb. 3.6. Wir haben bereits in Kap. 3.4 festgestellt, dass wir mithilfe des Ohm'schen Gesetzes die Anzahl der Unbekannten auf die Anzahl der Zweipole reduzieren können. An jedem Widerstand bleibt entweder Spannung oder Strom unbestimmt, an einer Spannungsquelle ist der Strom unbekannt und an einer Stromquelle die Spannung. In ▶Abb. 3.37 sind einige Beispiele für zusammengesetzte Zweipole dargestellt. Auch in diesen Fällen verbleibt immer genau eine Unbekannte. Ist beispielsweise der Strom im mittleren Zweipol bekannt, dann lässt sich daraus die Spannung am Widerstand berechnen.

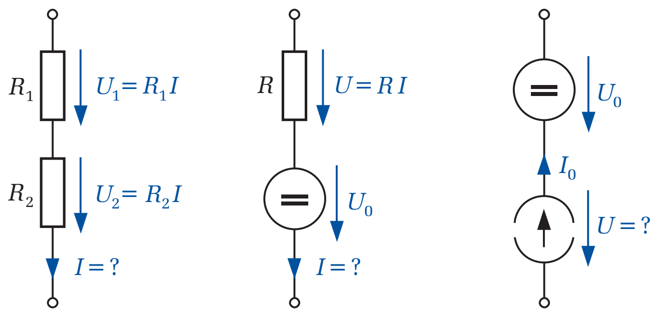


Abbildung 3.37: Zweipolnetzwerke

Unabhängig von dem Aufbau der Zweipole können wir feststellen, dass ihre Anzahl in einem Netzwerk identisch ist mit der Anzahl der unbekannten Größen. In der Netzwerktheorie spricht man allgemein von **Zweigen** und meint damit die beliebig zusammengesetzten Zweipole, die zwischen zwei Knoten des Netzwerks liegen. Fassen wir die bisherigen Ergebnisse noch einmal zusammen:

- Unter Zuhilfenahme der an den Komponenten geltenden Beziehungen zwischen Strom und Spannung[7] kann die Anzahl der unbekannten Ströme und Spannungen für jeden Zweig auf eine Unbekannte reduziert werden.

7 Bisher verwenden wir nur das Ohm'sche Gesetz am Widerstand, später kommen entsprechende Beziehungen an anderen Komponenten wie z.B. am Kondensator hinzu.

- Setzt sich ein Netzwerk aus z Zweigen zusammen, dann werden genau z linear unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der verbleibenden Unbekannten benötigt.
- Zur Aufstellung der Gleichungen stehen uns die Kirchhoff'schen Sätze, nämlich die Maschenregel (3.4) und die Knotenregel (3.7) zur Verfügung.

Die vor uns liegende Aufgabe besteht offenbar darin, mithilfe einer systematischen Vorgehensweise genau z linear unabhängige Gleichungen aufzustellen. Eine Gleichung ist allgemein *linear unabhängig* von anderen Gleichungen, wenn sie sich nicht durch lineare Überlagerung wie Addition oder Subtraktion aus den anderen Gleichungen herleiten lässt. Am einfachsten lässt sich diese Eigenschaft erkennen, wenn eine Gleichung eine Größe enthält, die in den anderen Gleichungen nicht vorkommt.

Die schematisierte Vorgehensweise bei der Netzwerkanalyse erfolgt in mehreren Teilschritten, die wir am Beispiel der ausgewählten Schaltung nach Abb. 3.6 nacheinander betrachten wollen.

1. Schritt: Darstellung des Netzwerkgraphen

Das Netzwerk wird ohne die Komponenten nochmals dargestellt. In dieser als **Netzwerkgraph** bezeichneten Darstellung in ▶Abb. 3.38 ist die Struktur des Netzwerks, d.h. welche Zweige an welchen Knoten miteinander verbunden sind, besonders gut zu erkennen.

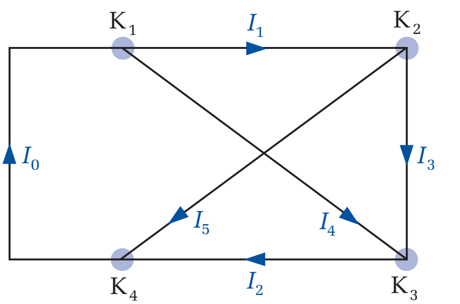


Abbildung 3.38: Netzwerkgraph

2. Schritt: Festlegung der Zählrichtungen

Für jeden Zweig ohne Quelle wird vereinbart, in welcher Richtung der Strom positiv gezählt werden soll. Diese Festlegung ist willkürlich und hat keinen Einfluss auf das Ergebnis, sie muss aber für die gesamte Analyse konsequent beibehalten werden. Die tatsächliche Stromrichtung ist erst nach Auflösung des Gleichungssystems bekannt. Hat der Strom einen positiven Wert, dann stimmt seine tatsächliche Richtung mit der gewählten Richtung überein, hat er dagegen einen negativen Wert, dann fließt er entgegengesetzt zur gewählten Richtung. Die Zählrichtung für die Spannung wird am Verbraucher in Richtung des Stromes gewählt.

Bei Spannungsquellen wird die Spannung, bei Stromquellen der Strom in der von der Quelle vorgegebenen Richtung gezählt. Die Richtung des Stromes bei einer Spannungsquelle und die Richtung der Spannung bei einer Stromquelle können frei gewählt werden. Befindet sich nur eine Quelle in einem Zweig, dann empfiehlt sich die Verwendung des Generatorzählpfeilsystems.

3. Schritt: Aufstellung der Knotengleichungen

Zur Vermeidung linear abhängiger Gleichungen betrachtet man üblicherweise nur Knoten entsprechend Abb. 3.8, in denen keine Komponenten enthalten sind. Wir haben nämlich bereits in den Abbildungen 3.8 und 3.9 festgestellt, dass scheinbar unterschiedliche Knoten auf identische und damit linear abhängige Gleichungen führen. Unter Berücksichtigung dieser Einschränkung besitzt das zu betrachtende Netzwerk in Abb. 3.38 die eingezeichneten vier Knoten. Da die Summe aller Ströme in allen Knoten immer Null ergibt, ist eine der Knotengleichungen linear von den anderen drei abhängig. Allgemein gilt: Besitzt ein Netzwerk k Knoten, dann können immer $k-1$ linear unabhängige Knotengleichungen aufgestellt werden. Die Auswahl des nicht zu berücksichtigenden Knotens hat keinen Einfluss auf das Ergebnis. Für das betrachtete Beispiel gilt

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{K}_1: & I_0 - I_1 & & -I_4 & & =0 \\
\mathrm{K}_2: & \quad\; I_1 & -I_3 & & -I_5 & =0 \\
\mathrm{K}_3: & & -I_2 + I_3 & +I_4 & & =0 \; .
\end{array} \tag{3.59}$$

Die lineare Unabhängigkeit dieser Gleichungen erkennt man unmittelbar daran, dass in jeder Gleichung ein Strom enthalten ist, der in den anderen Gleichungen nicht auftritt. Auf der anderen Seite ist die lineare Abhängigkeit der Gleichung am Knoten K_4 leicht zu überprüfen, da diese Gleichung identisch ist zur Summe der bereits angegebenen Gleichungen.

4. Schritt: Aufstellung der Maschengleichungen

Die Anzahl m der noch benötigten Maschengleichungen beträgt $m = z - (k-1)$. Im betrachteten Beispiel müssen somit $m = 6 - 3$ unabhängige Maschengleichungen aufgestellt werden. Während die Aufstellung der $k-1$ Knotengleichungen völlig unproblematisch ist, müssen bei der Auswahl der Maschen bestimmte Vorgehensweisen eingehalten werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Maschen so auszuwählen, dass die resultierenden Gleichungen zwangsläufig linear unabhängig sind. Die unterschiedlichen Methoden laufen im Prinzip darauf hinaus, sicherzustellen, dass in jeder Masche ein Zweig enthalten ist, der in keiner anderen Masche vorkommt. Im Folgenden werden zwei unterschiedliche Methoden vorgestellt.

Die erste Methode wird als **vollständiger Baum** bezeichnet. Zunächst werden alle k Netzwerkknoten entlang der Zweige so miteinander verbunden, dass keine geschlossene Masche entsteht. Bei k Knoten werden genau $k-1$ Zweige für die Verbindungen benötigt. Die ▶Abb. 3.39 zeigt nur zwei der Möglichkeiten, für das gegebene Netzwerk einen vollständigen Baum zu konstruieren.

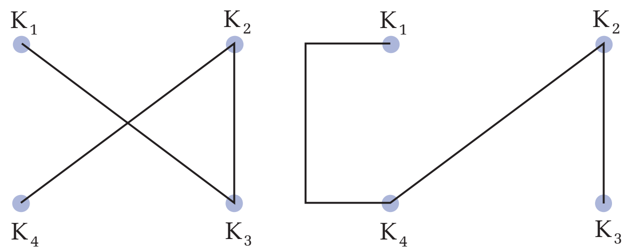


Abbildung 3.39: Vollständiger Baum

Von den insgesamt z Zweigen des Netzwerks gehören damit $k-1$ Zweige zu dem vollständigen Baum und $z-(k-1)=m$ Zweige, die so genannten **Verbindungszweige**, sind unabhängig von dem vollständigen Baum. Da die Anzahl der Verbindungszweige identisch ist zu der noch benötigten Anzahl unabhängiger Maschengleichungen, werden die Maschen jetzt so gewählt, dass jeder Verbindungszweig in genau einer Masche enthalten ist. Dazu muss jeder Verbindungszweig über den vollständigen Baum zu einer Masche geschlossen werden. Die Vorgehensweise wird am rechten Beispiel der Abb. 3.39 demonstriert.

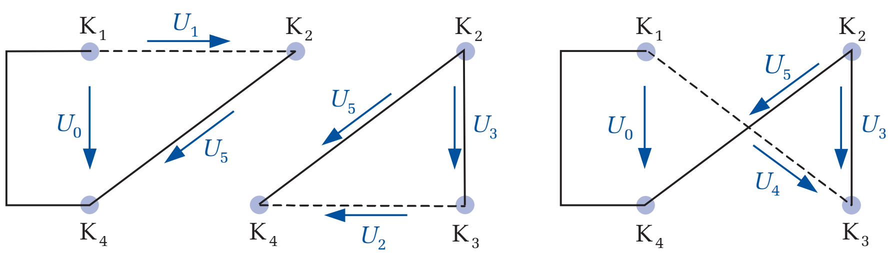


Abbildung 3.40: Aufstellung der Maschengleichungen beim vollständigen Baum

Die drei in der ▶Abb. 3.40 dargestellten Maschen führen auf die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_1: &\quad U_1 \qquad\qquad\quad + U_5 = U_0 \\
\mathrm{M}_2: &\quad U_2 + U_3 \qquad - U_5 = 0 \\
\mathrm{M}_3: &\quad -U_3 + U_4 + U_5 = U_0\,.
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

Zusammen mit den Ohm'schen Beziehungen an den fünf Widerständen liegen jetzt elf Gleichungen zur Bestimmung aller unbekannten Ströme und Spannungen in dem

Netzwerk vor[8]. Zur Reduzierung des Gleichungssystems können die Zweigspannungen in Gl. (3.60) mithilfe des Ohm'schen Gesetzes durch die Zweigströme ersetzt werden

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_1: \quad R_1 I_1 \qquad\qquad\qquad + R_5 I_5 = U_0 \\
&\mathrm{M}_2: \quad R_2 I_2 + R_3 I_3 \qquad - R_5 I_5 = 0 \\
&\mathrm{M}_3: \quad -R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = U_0 \;.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Mit den Gleichungen (3.59) und (3.61) liegen jetzt genau $z = 6$ Bestimmungsgleichungen vor, aus denen alle Zweigströme $I_0 \ldots I_5$ eindeutig berechnet werden können. Mit den Strömen sind auch alle Zweigspannungen bekannt und das Problem ist vollständig gelöst.

Wir wollen noch eine zweite Methode zur Aufstellung der Maschengleichungen vorstellen, die als **Auftrennung der Maschen** bezeichnet wird. Die Vorgehensweise ist relativ einfach. Man wählt einen beliebigen Maschenumlauf und stellt die zugehörige Gleichung auf. Diese Masche wird jetzt an einem beliebigen Zweig aufgetrennt, der in den folgenden Maschen nicht mehr verwendet werden darf.

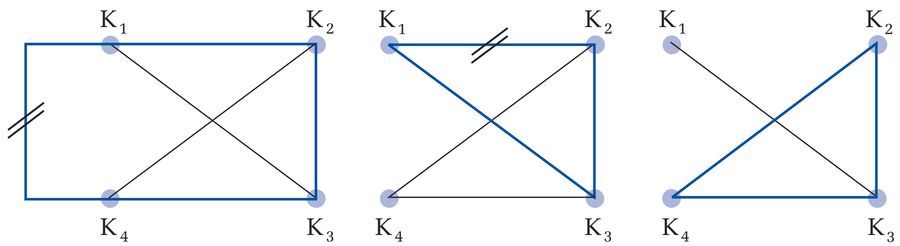


Abbildung 3.41: Auftrennung der Maschen

Ausgehend von dem verbleibenden Netzwerk stellt man wieder eine Maschengleichung auf und trennt diese Masche ebenfalls auf. Die fortgesetzte Anwendung dieser Methode liefert ebenfalls die benötigten $m = z - (k - 1)$ Gleichungen. Die lineare Unabhängigkeit dieser Gleichungen ist leicht einzusehen. Beginnt man die Überprüfung bei der zuletzt aufgestellten Beziehung, dann erkennt man unmittelbar, dass die jeweils zuvor aufgestellte Gleichung einen weiteren Zweig enthält, der nachher nicht mehr verwendet wurde, d.h. jede Gleichung ist infolge der Maschenauftrennung zwangsläufig linear unabhängig von den nachfolgend aufgestellten Gleichungen.

8 Bei z Zweigen liegen normalerweise $2z$ Unbekannte vor (z Ströme und z Spannungen). Da aber in dem betrachteten Beispiel ein Zweig nur eine Quelle mit bereits bekannter Spannung enthält, reduziert sich die Anzahl der Unbekannten um 1.

ZUSAMMENFASSUNG

- Zur Analyse **elektrischer Netzwerke** werden den Strömen und Spannungen Zählpfeile zugeordnet (nicht zu verwechseln mit Vektoren). Eine positive Spannung in Richtung des Zählpfeils zeigt in Richtung der elektrischen Feldstärke. Ein positiver Strom in Richtung des Zählpfeils zeigt in Richtung der Bewegung positiver Ladungsträger (entgegengesetzt zur Elektronenbewegung).
- Die Analyse elektrischer Netzwerke erfolgt mithilfe der **Kirchhoff'schen Gleichungen**. Das Verschwinden des Umlaufintegrals der elektrischen Feldstärke im zeitlich nicht veränderlichen Feld führt auf die Maschenregel: *Die Summe aller Spannungen beim Umlauf in einer geschlossenen Masche ist Null*.
- Das Verschwinden des Integrals der Stromdichte über eine geschlossene Hüllfläche führt auf die **Knotenregel**: *Die Summe aller zu einem Knoten hinfließenden Ströme ist gleich der Summe aller von dem Knoten wegfließenden Ströme*.
- **Kondensatoren** verhalten sich ähnlich **wie Spannungsquellen**, **Spulen** dagegen **wie Stromquellen**. Strom- und Spannungsquellen können ineinander umgerechnet werden und verhalten sich dann im Hinblick auf einen angeschlossenen Verbraucher gleich.
- Maximale Leistung an einem Verbraucher stellt sich ein, wenn Verbraucherwiderstand und Innenwiderstand der Quelle gleich sind. Der Wirkungsgrad beträgt in diesem Fall 50 %.
- Bei linearen Netzwerken darf das **Überlagerungsprinzip** angewendet werden, d.h. das Netzwerk wird für jede Quelle separat berechnet und die Ströme und Spannungen in den Zweigen werden anschließend addiert. Die jeweils nicht berücksichtigten Quellen werden zu Null gesetzt (Spannung gleich Null bedeutet Kurzschluss, Strom gleich Null bedeutet Leerlauf).
- Bei k Knoten im Netzwerk können $k-1$ linear unabhängige Knotengleichungen aufgestellt werden. Bei der Aufstellung der fehlenden linear unabhängigen Maschengleichungen kann auf standardisierte Verfahren (vollständiger Baum, Auftrennung der Maschen) zurückgegriffen werden.

Übungsaufgaben

Lösungen

Aufgabe 3.1 Netzwerkberechnung

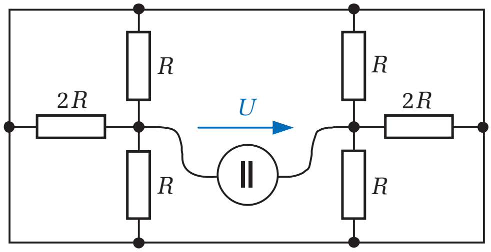


Abbildung 3.42: Gleichspannungsnetzwerk

1. Bestimmen Sie den von der Quelle abgegebenen Strom I in Abhängigkeit von U und R.
2. Berechnen Sie die von der Quelle abgegebene Gesamtleistung für $U = 100$ V und $R = 125\ \Omega$.
3. Wie teilt sich diese Leistung auf die einzelnen Widerstände auf?

Aufgabe 3.2 Brückenschaltung

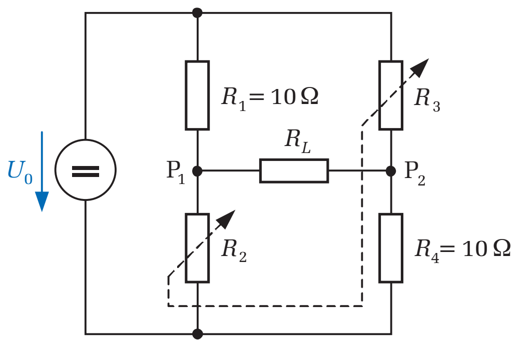


Abbildung 3.43: Brückenschaltung

In dem gegebenen Netzwerk können die beiden Widerstände R_2 und R_3 synchron in dem Wertebereich 0 ... 50 Ω eingestellt werden. Die Quellenspannung beträgt $U_0 = 30$ V.

1. Welchen Wert müsste R_L aufweisen, damit er bei der Einstellung $R_2 = R_3 = 30\ \Omega$ maximale Leistung aufnimmt?
2. Wie groß ist in diesem Fall der Wirkungsgrad (Verhältnis der Leistung an R_L zur gesamten von der Quelle abgegebenen Leistung)?
3. Stellen Sie die Leistung an R_L für den in 1. ermittelten Wert in Abhängigkeit von $R_2 = R_3$ dar.

Aufgabe 3.3 Netzwerkberechnung

Ein Potentiometer mit Widerstand R liegt an einer Gleichspannung $U = 100$ V. Am Spannungsabgriff liegt im unbelasteten Zustand eine Spannung von 50 V.

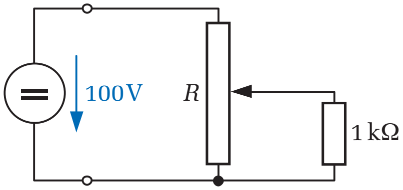


Abbildung 3.44: Belasteter Spannungsteiler

Wie groß muss der Spannungsteilerwiderstand R gewählt werden, damit sich die Spannung bei der Belastung mit 1 kΩ um maximal 1 % verringert?

Aufgabe 3.4 Überlagerungsprinzip und Leistungsbilanz

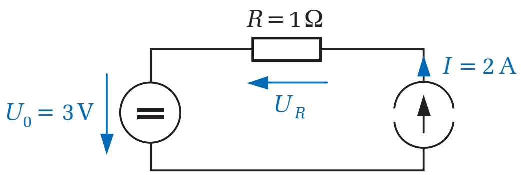


Abbildung 3.45: Netzwerk mit mehreren Quellen

1. Berechnen Sie die Spannungen in dem Netzwerk mithilfe des Überlagerungsprinzips.
2. Stellen Sie eine Leistungsbilanz auf, indem Sie die aufgenommenen bzw. abgegebenen Leistungen des Verbrauchers und der Quellen berechnen.

Aufgabe 3.5 Netzwerkberechnung

Gegeben ist das folgende *RC*-Netzwerk mit einer Gleichspannungsquelle U.

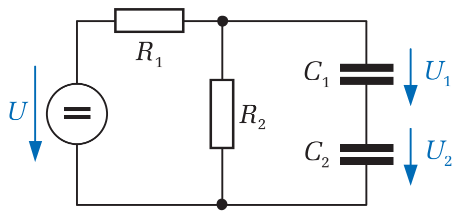


Abbildung 3.46: Gleichspannungsnetzwerk

1. Berechnen Sie die Spannungen U_1 und U_2 in Abhängigkeit von U.
2. Welche Energien W_1 und W_2 sind in den beiden Kondensatoren gespeichert?
3. Welche Leistung gibt die Quelle an die Widerstände ab?

Stromleitungsmechanismen

4

ÜBERBLICK

Einführung

» In Kapitel 2.4 haben wir uns bereits mit der Ladungsträgerbewegung im metallischen Leiter beschäftigt. Das Ergebnis war der als Ohm'sches Gesetz bezeichnete lineare Zusammenhang zwischen Stromdichte und Feldstärke bzw. zwischen Strom und Spannung. In den folgenden Abschnitten sollen die Bewegungen der Ladungsträger im Vakuum – ein praktisches Beispiel ist die Ablenkung eines Elektronenstrahls in der Bildröhre – und in Gasen etwas genauer betrachtet werden. Der Stromdurchgang durch einen Elektrolyten, eine Flüssigkeit, in der bewegliche Ionen vorhanden sind, ist mit chemischen Veränderungen verbunden. Dieser als Elektrolyse bezeichnete Vorgang wird z.B. zur Metallgewinnung oder zum Galvanisieren eingesetzt. Einen weiteren wichtigen Abschnitt bildet der Ladungstransport in Halbleitern. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- die Beschleunigung von Ladungsträgern im Vakuum durch elektrische Felder zu berechnen,
- mithilfe der Faraday'schen Gesetze die Stromleitungsmechanismen in Flüssigkeiten zu untersuchen,
- den Ladungstransport in Halbleitern und das Verhalten an einem *pn*-Übergang zu verstehen sowie
- die Strom-Spannungs.-Kennlinie einer Diode zu erklären.

4.1 Stromleitung im Vakuum

Als einfachsten Sonderfall untersuchen wir die Bewegung von Elektronen im homogenen elektrischen Feld. Zur Erzeugung des homogenen Feldes verwenden wir den Plattenkondensator aus Abb. 1.20, bei dem das Streufeld am Rand wieder vernachlässigt werden soll. Die beiden Platten werden an eine äußere Spannungsquelle angeschlossen, die die abfließenden Ladungsträger nachliefert und die Spannung zwischen den Platten konstant hält. Weiterhin nehmen wir zwischen den Platten Vakuum an oder zumindest eine derart geringe Anzahl von Restatomen bei der Herstellung des Vakuums, dass die Ladungsträgerbewegung nicht durch Zusammenstöße mit Atomen beeinflusst wird.

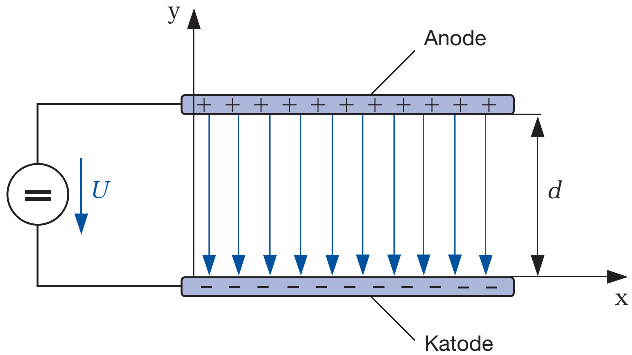


Abbildung 4.1: Elektronenbewegung im homogenen Feld

Für die homogene Feldstärke zwischen den Platten gilt nach ▶Abb. 4.1

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}} \frac{U}{d} . \tag{4.1}$$

Ein Elektron der Elementarladung $-e$ und der Ruhemasse m_0, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $\mathrm{y} = 0$, d.h. unmittelbar oberhalb der negativ geladenen Elektrode (**Katode**) befindet, erfährt nach dem Coulomb'schen Gesetz eine Kraft in Richtung auf die positiv geladene Elektrode (**Anode**)

$$\vec{\mathbf{F}} \overset{(1.3)}{=} -e\,\vec{\mathbf{E}} \overset{(4.1)}{=} \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}} \frac{eU}{d} = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}}\, F . \tag{4.2}$$

Mit der Bezeichnung a für die Beschleunigung kann diese Kraft nach den Gesetzen der Mechanik auch in der Form

$$F = m_0\, a = \frac{eU}{d} \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{eU}{m_0\, d} \tag{4.3}$$

geschrieben werden, aus der sich unmittelbar ein konstanter Wert für die Beschleunigung ergibt. Die Geschwindigkeit v des Elektrons steigt linear mit der Zeit an

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{eU}{m_0\, d}\, t \tag{4.4}$$

und für den in der Zeit t zurückgelegten Weg findet man das Ergebnis

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad y = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{eU}{m_0\,d}\,t^2\,. \tag{4.5}$$

Aus der Gl. (4.5) kann die Position des Teilchens y zu jedem Zeitpunkt t bestimmt werden. Um die von der Koordinate y abhängige Geschwindigkeit v(y) zu ermitteln, muss die nach der Zeit t aufgelöste Gl. (4.5) in die Beziehung für die Geschwindigkeit (4.4) eingesetzt werden

$$v(y) = \sqrt{2U\frac{e}{m_0}\frac{y}{d}}\,. \tag{4.6}$$

An der Anode y = d, d.h. nach Durchlaufen der Gesamtspannung U, erreicht das Elektron seine maximale Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2U\frac{e}{m_0}}\,. \tag{4.7}$$

Wird ein Elektron aus der Ruhelage mit $v_0 = 0$ auf die Geschwindigkeit v beschleunigt, dann beträgt der Zuwachs an kinetischer Energie

$$W = \frac{1}{2}m_0 v^2 \overset{(4.7)}{=} eU\,. \tag{4.8}$$

Merke

Durchläuft ein Teilchen mit der Elementarladung e eine Potentialdifferenz von 1 V, dann erfährt es einen Energiezuwachs von 1 eV (= 1 Elektronenvolt).

Beispiel 4.1: Zahlenbeispiel

Welche Spannung muss ein Elektron der Ruhemasse $m_0 = 0{,}91 \cdot 10^{-30}$ kg durchlaufen, wenn es aus der Ruhelage auf eine Endgeschwindigkeit von 3 000 km/s (≈ 1 % der Lichtgeschwindigkeit) beschleunigt werden soll?

Lösung:

Nach Gl. (4.8) und mit den Umrechnungen nach Tab. D.2 gilt

$$U = \frac{1}{2}v^2\frac{m_0}{e} = \frac{1}{2}9 \cdot 10^{12}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\,\frac{0{,}91 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}} = 25{,}56\,\mathrm{V}\,. \tag{4.9}$$

Das Ergebnis aus dem Beispiel zeigt, dass die Geschwindigkeit der Elektronen im Vakuum um viele Größenordnungen über der Driftgeschwindigkeit in einem Leiter liegt (vgl. Beispiel 2.1). Da außerdem schon bei kleinen durchlaufenen Spannungen extrem hohe Geschwindigkeiten erreicht werden, muss unter Umständen die Massenzunahme nach der Relativitätstheorie berücksichtigt werden. Mit der Ruhemasse m_0 und der Lichtgeschwindigkeit c gilt für die geschwindigkeitsabhängige Masse

$$m = m_0 \Big/ \sqrt{1-(v/c)^2}\ . \tag{4.10}$$

Die beiden Fälle, Rechnung nach der klassischen Theorie und Rechnung unter Berücksichtigung der Massenzunahme, sind in ▶Abb. 4.2 für ein Elektron gegenübergestellt. Bei Beschleunigungsspannungen unterhalb 30 kV sind die Unterschiede zwischen beiden Berechnungen zu vernachlässigen.

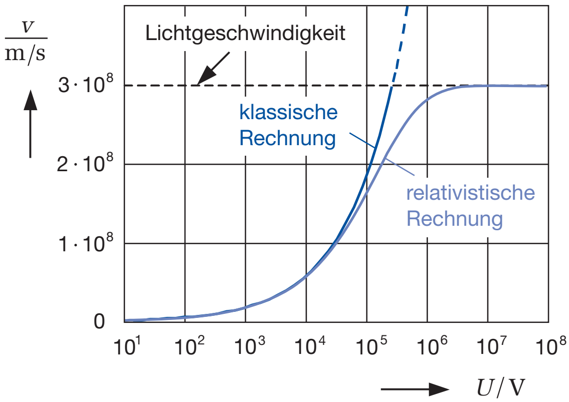


Abbildung 4.2: Elektronengeschwindigkeit als Funktion der Beschleunigungsspannung

Bei der bisherigen Ableitung der Gleichungen wurde der Sonderfall behandelt, dass sich nur einzelne Elektronen zwischen den geladenen Platten bewegen. Wir erweitern jetzt die Problemstellung und betrachten den Fall, dass sich viele Ladungsträger in Form einer Raumladungsverteilung in dem elektrischen Feld bewegen. Im Gegensatz zu bisher müssen nun die gegenseitigen Wechselwirkungen der Ladungen aufeinander berücksichtigt werden.

Befinden sich viele Elektronen in dem Raum zwischen Anode und Katode, dann werden die von der Anode ausgehenden Feldlinien zum großen Teil auf den Elektronen und nicht mehr auf der Katode enden, d.h. die Feldstärke wird sich jetzt in Abhängigkeit von der Koordinate y ändern $E = E(\mathrm{y})$. Ebenso wird die Raumladungsverteilung $\rho = \rho(\mathrm{y})$ eine Abhängigkeit von der Koordinate y aufweisen. Da der Strom und damit auch die Stromdichte $J = \rho v$ nach Gl. (2.9) unabhängig von der Koordinate y ist, muss sich in der Nähe der Katode eine große Raumladungsdichte einstellen, da die Geschwindigkeit der Elektronen hier noch sehr klein ist. Bei geringen Spannungen werden sich diese Elektronen länger vor der Katode befinden und den Austritt weiterer Elektronen aus dem Atomverband infolge der gegenseitigen Abstoßung behindern. Mit zunehmenden Spannungen werden die Elektronen stärker beschleunigt, so dass diese Raumladungswolke vor der Katode abgebaut wird. Eine ausführliche Rechnung [28] liefert den als **Raumladungsgesetz** bezeichneten nichtlinearen Zusammenhang

$$I = \frac{4}{9}\frac{\varepsilon_0 A}{d^2}\sqrt{\frac{2e}{m_0}}\,U^{3/2} \tag{4.11}$$

zwischen Strom und Spannung.

Um überhaupt frei bewegliche Elektronen für den Ladungstransport zur Verfügung zu haben, müssen die Elektronen aus der Katode austreten, d.h. es muss eine von dem Katodenmaterial abhängige Arbeit (**Austrittsarbeit**) geleistet werden, damit die Elektronen den Anziehungskräften des Atomverbandes entkommen können.

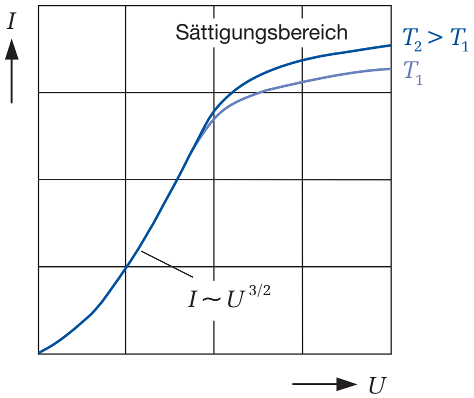


Abbildung 4.3: Kennlinie einer Vakuumdiode (qualitativer Verlauf)

Dies kann in der Praxis auf verschiedene Art und Weise realisiert werden, z.B. durch Bestrahlung mit kurzwelligem Licht (**Fotoemission**), durch hohe elektrische Feldstärken (**Feldemission**), durch den Aufprall anderer Teilchen auf die Leiteroberfläche (**Sekundäremission**) oder durch Temperaturerhöhung (**Glühemission**). Im Fall der Temperaturerhöhung muss die Katode so weit aufgeheizt werden, dass die Geschwindigkeit der Elektronen ausreicht, den Atomverband zu verlassen. Ihre Austrittsgeschwindigkeit ist dabei nahezu Null. Eine weitere Erwärmung führt zu einer größeren Anzahl frei werdender Elektronen und damit zu einem größeren maximal verfügbaren Strom. Da die zwischen Anode und Katode anliegende Spannung die Zahl der austretenden Elektronen praktisch nicht beeinflusst, kann der Strom einen von der Katodentemperatur T vorgegebenen Maximalwert (**Sättigungsstrom**) nicht überschreiten. Die ▶Abb. 4.3 zeigt den qualitativen Verlauf der Strom-Spannungs-Kennlinie einer Vakuumdiode. Bei kleinen Spannungen zeigt sich die Abhängigkeit entsprechend der Beziehung (4.11) und bei steigenden Spannungen tritt der beschriebene Sättigungseffekt ein, wobei der Sättigungsstrom mit steigender Temperatur zunimmt.

Wird die Spannung in der umgekehrten Richtung angelegt, d.h. die aufgeheizte Elektrode wird zur Anode, dann ist kein Strom zwischen den Elektroden beobachtbar. Es können also lediglich Elektronen, aber keine Ionen aus dem Atomgitter austreten. Die betrachtete Anordnung besitzt Ventileigenschaften und wird als **Gleichrichter** bezeichnet (vgl. Kap. 4.4.2).

Eine praktische Anwendung dieser Stromleitung im Vakuum stellt die Braun'sche Röhre dar (nach K. F. Braun, 1850 – 1918), die über einen langen Zeitraum in Oszilloskopen, in Fernsehgeräten und in Monitoren eingesetzt wurde.

4.2 Stromleitung in Gasen

Wird der Raum zwischen den Elektroden mit einem Gas gefüllt, dann ändert sich die Situation grundlegend. Einerseits ist die freie Beweglichkeit der Elektronen stark behindert, andererseits tritt aber ein zusätzlicher Stromleitungsmechanismus auf, da ionisierte Gasmoleküle ebenfalls am Ladungstransport teilnehmen können. Im natürlichen Zustand verhalten sich Gase wie gute Isolatoren, da sie aus neutralen Atomen oder Molekülen bestehen. Die benötigten Ladungsträger in Form von **Ionen** oder freien Elektronen müssen dem Gas von außen zugefügt (*Ladungsträgerinjektion*) oder in dem Gas selbst erzeugt werden.

Fließt bei angelegter Spannung von selbst ein Strom durch das Gas, dann spricht man von einer *selbstständigen Leitung*. In diesem Fall werden die Ladungsträger durch den Entladungsvorgang selbst erzeugt. Die kinetische Energie vorhandener Ionen reicht aus, um andere Moleküle bei einem Zusammenstoß zu ionisieren, d.h. diese Moleküle können Elektronen verlieren oder sie spalten sich auf. Diese neuen Ionen können dann ihrerseits weitere Moleküle ionisieren. Dieses lawinenartige Anwachsen der Ladungsträgerzahl ist bei einer Funkenentladung zu beobachten. In technischen Anwendungen wird der maximale Strom durch geeignete Maßnahmen wie z.B. einen Vorwiderstand begrenzt.

Werden durch äußere Maßnahmen zusätzliche Ladungsträger in Form von Ionen oder freien Elektronen im Gas erzeugt, dann spricht man von einer *unselbstständigen Leitung*. Zur Erzeugung dieser Ladungsträger stehen verschiedene Mechanismen zur Verfügung. Eine Möglichkeit besteht darin, die Temperatur so weit zu erhöhen, dass die Moleküle bei den Zusammenstößen infolge der zunehmenden Wärmebewegung ionisiert werden. Eine andere Möglichkeit ist die radioaktive Bestrahlung des Gases.

Verliert ein Molekül durch Ionisation ein Elektron (es ist dann positiv geladen und wird **Kation** genannt) oder lagert sich ein freies Elektron an (es ist dann negativ geladen und wird **Anion** genannt), dann wird es sich unter dem Einfluss der äußeren Feldstärke in Richtung auf die Katode bzw. Anode zubewegen. An dem Ladungstransport sind also Elektronen, positive Ionen und negative Ionen beteiligt. Da die ausgeübte Kraft dem Produkt aus Teilchenmasse und Beschleunigung gleich ist, kann die

Beschleunigung und damit auch die Geschwindigkeit der gegenüber den Elektronen um den Faktor 10^4 schwereren Ionen nur vergleichsweise geringe Werte annehmen.

Da die Kraft auf die Ladungsträger proportional zur elektrischen Feldstärke ist, gilt auch bei der Stromleitung in Gasen in weiten Bereichen das Ohm'sche Gesetz. Bei größeren Stromstärken wird sich jedoch auch hier ein Sättigungseffekt einstellen, da die pro Zeiteinheit erzeugte Anzahl der Ladungsträger begrenzt ist. Der sich auf diese Weise einstellende Sättigungsstrom bietet beispielsweise die Möglichkeit, bei radioaktiver Bestrahlung einen Zusammenhang zwischen Strom und Radioaktivität herzustellen.

Es können allerdings auch andere Situationen eintreten, bei denen das Ohm'sche Gesetz seine Gültigkeit verliert. Dieser Fall liegt nach Gl. (2.17) vor, wenn sich die Ladungsträgerkonzentration n oder die Beweglichkeit der Ladungsträger, d.h. ihre mittlere freie Weglänge zwischen zwei Zusammenstößen, in Abhängigkeit von der elektrischen Feldstärke ändert. Werden die Ladungsträger zwischen zwei Zusammenstößen so weit beschleunigt, dass diese Geschwindigkeit gegenüber der durch die Wärmebewegung verursachten Geschwindigkeit nicht mehr vernachlässigbar ist, dann tritt ein ähnlicher Effekt ein wie bei der Widerstandszunahme im metallischen Leiter infolge der Temperaturerhöhung. Die Wahrscheinlichkeit für Zusammenstöße nimmt zu und die Leitfähigkeit ist dann abhängig von der elektrischen Feldstärke, d.h. Strom und Spannung sind nicht mehr linear miteinander verknüpft.

Eine noch größere Abweichung findet statt, wenn die vom Feld beschleunigten Ladungsträger bei den Zusammenstößen andere Atome oder Moleküle ionisieren. Die unselbstständige Leitung geht dann in eine selbstständige Leitung über und die lawinenartig anwachsende Ladungsträgerkonzentration führt zu einer Strom-Spannungs-Kennlinie, die keine Gemeinsamkeiten mehr mit dem Ohm'schen Gesetz aufweist.

4.3 Stromleitung in Flüssigkeiten

Füllt man den Behälter in ▶Abb. 4.4 mit reinstem Wasser, dann fließt beim Anlegen einer Spannung zwischen den beiden Elektroden nur ein extrem kleiner Strom. Die sehr geringe Leitfähigkeit von reinem Wasser wird dadurch verursacht, dass einige der H_2O-Moleküle in H^+- und OH^--Ionen zerfallen sind. Reines Wasser kann als Nichtleiter angesehen werden. Bei verunreinigtem Wasser nimmt die Leitfähigkeit bereits deutlich zu. Werden jedoch Salze, Säuren oder Laugen dem Wasser beigemischt, dann ändert sich die Leitfähigkeit um mehrere Größenordnungen. Die Ionenverbindung, z.B. Kochsalz (NaCl), wird im Wasser aufgespalten in positive (Na^+) und negative (Cl^-) Ionen. Bei Schwefelsäure (H_2SO_4) erfolgt eine Aufspaltung in zwei H^+-Ionen (Protonen) und in das *zweiwertige* Molekül-Ion SO_4^{--}. Diese Aufspaltung wird als elektrolytische **Dissoziation** bezeichnet, die leitende Flüssigkeit als **Elektrolyt**. Die **Wertigkeit** z eines Ions entspricht der Anzahl seiner am Ladungstransport beteiligten Elementarladungen.

Infolge der Dissoziation sind bereits freie Ladungsträger vorhanden, die bei einer von außen angelegten elektrischen Feldstärke eine Kraft in Richtung auf die entsprechende Elektrode erfahren (Abb. 4.4). Die als Kationen bezeichneten positiven Na^+-Ionen wandern zur Katode, die als Anionen bezeichneten negativen Cl^--Ionen wandern zur Anode. Die Bewegung der Ionen zu den Elektroden bedeutet einen Stofftransport. Mit diesem als **Elektrolyse** bezeichneten Vorgang können Metalle gewonnen werden. Da die Metallmenge, die sich an der Katode niederschlägt, sehr genau gemessen werden kann, wurde früher die Einheit für die Stromstärke 1 A durch die Silbermenge bestimmt, die aus einer wässrigen Lösung mit Silbernitrat in einer Sekunde ausgeschieden wird (vgl. Beispiel 4.2).

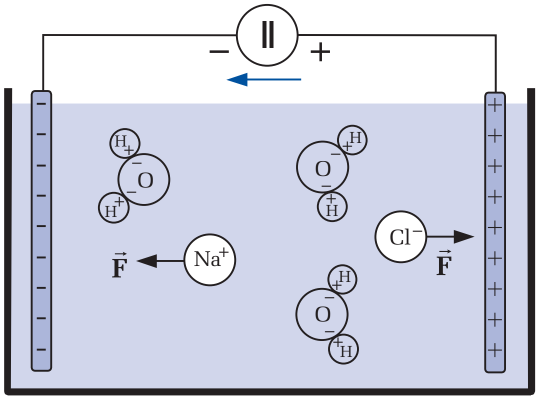


Abbildung 4.4: Ladungsträgerbewegung in Flüssigkeiten

Die Elektrolyse wird z.B. angewendet, um Metalle mit einer dünnen Schicht eines anderen Metalls zu überziehen (**Galvanisieren**). Durch diese Veränderung der Oberflächeneigenschaften kann eine Erhöhung der mechanischen oder chemischen Widerstandsfähigkeit oder eine Verbesserung der elektrischen Leitfähigkeit erreicht werden. Eine weitere Anwendung ist die in großtechnischem Maßstab durchgeführte Metallgewinnung. Bei der *Schmelzfluss-Elektrolyse* werden Metallgemische in den flüssigen Zustand gebracht, aus dem die Metalle auf elektrolytischem Wege abgeschieden werden.

Die formelmäßigen Zusammenhänge zwischen der an den Elektroden abgeschiedenen Masse m eines Stoffes und der transportierten Ladungsmenge Q wurden erstmals von Michael Faraday (1791 – 1867) untersucht und sind als die beiden Faraday'schen Gesetze der Elektrolyse bekannt.

Die Masse m des an den Elektroden abgeschiedenen Stoffes ist das Produkt aus der Anzahl der dort eintreffenden Ionen N und der Masse des einzelnen Ions m_A. Handelt es sich bei dem Ion um ein einfaches ionisiertes Atom, dann ist seine Masse aus dem Produkt von relativer Atommasse A_r und atomarer Masse-Einheit $1\text{u} = 1{,}66057 \cdot 10^{-27}$ kg (vgl. Anhang D.1) gegeben

$$m = N\, A_r\, u\,. \tag{4.12}$$

Setzt sich das Ion aus mehreren Atomen zusammen, dann ist für A_r die Summe der einzelnen Atommassen in Gl. (4.12) einzusetzen.

Da jedes Ion entsprechend seiner Wertigkeit z betragsmäßig die Ladung $z \cdot e$ (Wertigkeit z mal Elementarladung e) transportiert, ist die gesamte transportierte Ladungsmenge Q bei N transportierten Ionen durch das Produkt

$$Q = N\,ze \tag{4.13}$$

gegeben. Die Zusammenfassung der beiden Gleichungen liefert das **1. Faraday'sche Gesetz**

$$m = \frac{A_r u}{ze} Q = \frac{A_r u}{ze} I\,t = \frac{A_r\,I\,t}{z \cdot 96{,}47} \frac{\text{mg}}{\text{As}} . \tag{4.14}$$

Merke

Die beim Stromdurchgang durch einen Elektrolyten abgeschiedene Masse ist proportional zu dem Produkt aus Stromstärke und Zeit.

Der Proportionalitätsfaktor wird als **elektrochemisches Äquivalent** bezeichnet und ist eine für den jeweiligen Stoff charakteristische Materialkonstante. Er ist unabhängig von der Konzentration der Lösung, von der Temperatur und auch von der Form und Größe der Elektroden. Das mit Gl. (4.14) gefundene Ergebnis lässt sich auf einfache Weise zusammenfassen:

Merke

Um die Masse $m = (A_r/z)$ kg eines Stoffes aus einem Elektrolyten abzuscheiden, ist eine Elektrizitätsmenge von $96{,}47 \cdot 10^6$ As erforderlich.

Beispiel 4.2: Elektrochemisches Äquivalent von Silber

Welche Menge Silber wird in 1 s von einem Strom $I = 1$ A aus einer $AgNO_3$-Lösung abgeschieden? (Atomgewicht von Silber: $A_r = 107{,}88$, Wertigkeit: $z = 1$)

Lösung:

Mit Gl (4.14) gilt

$$m = \frac{A_r}{z \cdot 96{,}47} \text{mg} = 1{,}118\,\text{mg} . \tag{4.15}$$

Das **2. Faraday'sche Gesetz** der Elektrolyse lässt sich unmittelbar aus der Gl. (4.14) ableiten. Bei gleichen transportierten Ladungsmengen Q stehen die abgeschiedenen Massen unterschiedlicher Stoffe im gleichen Verhältnis zueinander wie ihre elektrochemischen Äquivalente

$$\frac{m_1}{A_{r1}/z_1} = \frac{m_2}{A_{r2}/z_2} = \ldots \quad . \tag{4.16}$$

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen Stromstärke und angelegter Spannung untersuchen. Die freie Weglänge für die Ionen ist in den Flüssigkeiten sehr gering, es kommt fortwährend zu neuen Zusammenstößen. Da die erneute Beschleunigung der Ionen proportional zu der von außen angelegten elektrischen Feldstärke ist, gilt innerhalb eines bestimmten Spannungsbereiches mit guter Näherung das Ohm'sche Gesetz. Zur Berechnung des ohmschen Widerstandes betrachten wir eine kleine Stromröhre (ähnlich Abb. 2.4), deren Stirnseiten A senkrecht von den Ladungsträgern durchströmt werden (die Situation ist identisch zu der Ableitung in Anhang C.2). Bezeichnen wir die Anzahl der Kationen pro Volumeneinheit mit η, dann ist die Ladung pro Volumeneinheit (Raumladungsdichte) bei Kationen der Wertigkeit z durch das Produkt $\eta z e$ gegeben. Mit der Geschwindigkeit der positiven Ladungsträger v_+ beträgt der mit I_+ bezeichnete Beitrag der Kationen zum Gesamtstrom

$$I_+ \overset{(2.11)}{=} J_+ A \overset{(2.9)}{=} \eta z e v_+ A \,. \tag{4.17}$$

Bei den Anionen muss das Produkt aus Anzahl und Wertigkeit genauso groß sein wie bei den Kationen. Mit der Geschwindigkeit v_- der Anionen ergibt sich der Beitrag

$$I_- \overset{(2.11)}{=} J_- A \overset{(2.9)}{=} \eta z e v_- A \,. \tag{4.18}$$

Da sich bei den Anionen sowohl die Ladung als auch die Bewegungsrichtung im Vorzeichen gegenüber den Kationen unterscheidet, addieren sich beide Teilströme zum Gesamtstrom

$$I = \eta z e A \left(|v_+| + |v_-| \right) . \tag{4.19}$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen der Geschwindigkeit und der elektrischen Feldstärke wird analog zur Gl. (2.14) als Ionenbeweglichkeit μ_+ bzw. μ_- bezeichnet. Damit lässt sich der ohmsche Widerstand einer Stromröhre mit Länge l und Querschnittsfläche A folgendermaßen darstellen

$$R = \frac{U}{I} = \frac{E\,l}{I} \overset{(2.14)}{=} \frac{l}{\eta z e \,(\mu_+ + \mu_-)\, A} \,. \tag{4.20}$$

Für die Leitfähigkeit der Flüssigkeit folgt aus einem Vergleich der Beziehungen (2.27) und (4.20) der Ausdruck

$$\kappa = \eta z e \,(\mu_+ + \mu_-) \,. \tag{4.21}$$

Diese Leitfähigkeit hängt sowohl von der Anzahl, d.h. von der Konzentration der verfügbaren Ladungsträger als auch von deren Beweglichkeit ab. Man kann davon ausgehen, dass im stationären Zustand nicht alle Moleküle in Ionen dissoziiert sind. Zwischen der ständigen Aufspaltung von Molekülen und der Wiedervereinigung von Anionen und Kationen wird sich im Mittel ein Gleichgewichtszustand einstellen. Der *Dissoziationsgrad*, der das Verhältnis von aufgespaltenen Molekülen zur Gesamtzahl der verfügbaren Moleküle angibt, hängt von der Konzentration und insbesondere von der Temperatur ab. Mit steigender Temperatur nimmt die Wärmebewegung und damit die Aufspaltung, d.h. die Anzahl der Ladungsträger zu. Gleichzeitig reduziert sich die Zähigkeit der Flüssigkeit, d.h. die Beweglichkeit wird mit zunehmender Temperatur größer. Beide Effekte verursachen eine zunehmende Leitfähigkeit. Im Gegensatz zu den Metallen ist der Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstandes daher negativ.

4.4 Ladungstransport in Halbleitern

Von den Beispielen der Stromleitung in Festkörpern haben wir bisher nur den Sonderfall der Leiter (Metalle) behandelt. Es gibt jedoch zwei weitere Gruppen von Materialien, die in diesem Zusammenhang bedeutungsvoll sind, zum einen die Nichtleiter (Isolatoren) und zum anderen die Halbleiter. Der wesentliche Unterschied zwischen den einzelnen Gruppen besteht in dem spezifischen Widerstand, der bei den Isolatoren um viele Zehnerpotenzen größer ist als bei den Leitern (▶Abb. 4.5).

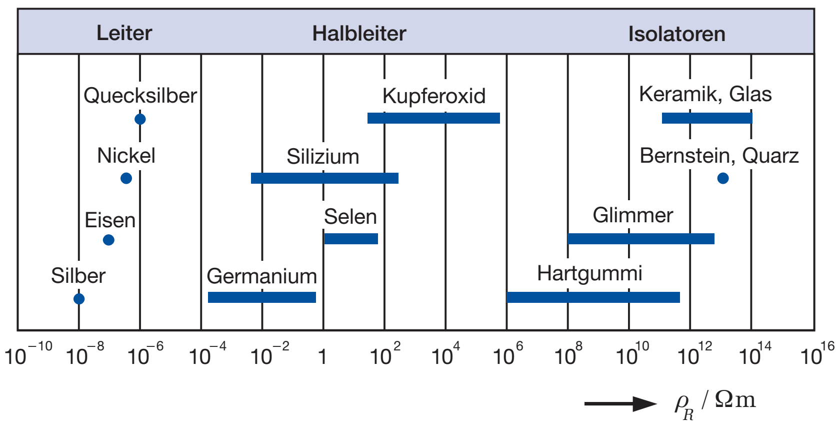


Abbildung 4.5: Spezifischer Widerstand fester Körper nach [16]

In diesem Kapitel wollen wir uns mit dem interessanteren Fall der Halbleiter beschäftigen. Um deren Verhalten verstehen zu können, betrachten wir noch einmal den Atomaufbau in Abb. 1.1. Dort haben wir gesehen, dass sich die Elektronenhülle aus mehreren Schalen aufbaut. Die Elektronen der äußeren Schale sind verantwortlich für die chemischen Verbindungen und auch für den Zusammenhalt der Materie. Da sie die chemische Wertigkeit (**Valenz**) des Elements bestimmen, werden sie **Valenzelektronen** genannt. Wichtige Halbleitermaterialien sind Germanium und Silizium, beide besitzen vier Valenzelektronen. In einem aus reinem Silizium bestehenden Material sind die Atome im dreidimensionalen Aufbau so angeordnet, dass sie ein regelmäßiges Gitter (**Kristallgitter**) bilden. Jedes Siliziumatom ist mit seinen vier Nachbaratomen dadurch verbunden, dass es eines seiner Valenzelektronen mit je einem Valenzelektron des jeweiligen Nachbaratoms gemeinsam besitzt. Man kann sich das so vorstellen, dass zwei derartige Valenzelektronen die beiden Atomkerne, zu denen sie gehören, gemeinsam umkreisen. Die ▶Abb. 4.6 zeigt eine zweidimensionale Darstellung mit den jeweils vier Valenzelektronen und den wegen der Ladungsneutralität vierfach positiven Atomrümpfen.

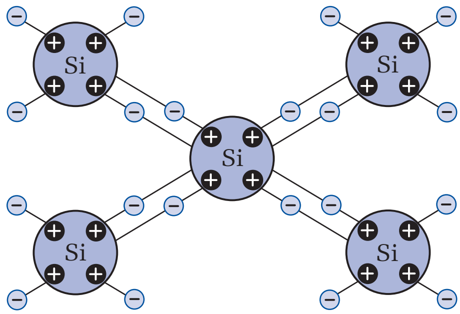


Abbildung 4.6: Atomare Struktur (zweidimensionale Darstellung)

Die Elektronen, die auf verschiedenen Schalen den Kern umkreisen, besitzen aufgrund ihrer unterschiedlichen Geschwindigkeiten (kinetische Energie) und ihres unterschiedlichen Abstands zum Kern (potentielle Energie) unterschiedliche Gesamtenergien, wobei die Elektronen auf den äußeren Schalen höhere Energien aufweisen. Valenzelektronen mit den höchsten Energieinhalten umkreisen in Paaren jeweils zwei Atomkerne und beeinflussen sich dabei gegenseitig. Als Konsequenz weist der Energieinhalt eines Valenzelektrons eine gewisse Schwankungsbreite auf, man spricht hier vom **Valenzband**. Dieser mögliche Energiebereich besitzt eine scharfe obere Grenze (▶Abb. 4.7). Man stellt diesen Sachverhalt in einem zweidimensionalen Diagramm dar, wobei aber die horizontale Achse praktisch bedeutungslos ist. Man könnte sie als einen Querschnitt durch den Kristall, d.h. als eine geometrische Abmessung interpretieren. Die vertikale Achse stellt den Energieinhalt der Elektronen dar. Die Valenzelektronen befinden sich alle in dem Valenzband, höhere Energieinhalte als die obere Grenze sind für diese Elektronen nicht möglich. Unter dem Valenzband befinden sich weitere gegeneinander abgegrenzte Energiebänder (in Abb. 4.7 nicht dargestellt), in denen sich die Elektronen der jeweils weiter innen liegenden Schalen befinden. Diese Elektronen sind aber fest an den Kern gebunden und tragen nicht zur Stromleitung bei.

Im Gegensatz dazu besitzen die freien Elektronen eine höhere Energie, sie befinden sich im **Leitungsband**. Für diese Elektronen existiert eine scharfe untere Grenze, die sie nicht unterschreiten können, ohne in das Valenzband zurückzufallen. Der Zwischenbereich wird als **verbotenes Band** bezeichnet. Die Breite des Bandabstandes zwischen der oberen Grenze des Valenzbandes und der unteren Grenze des Leitungsbandes ist maßgebend für die Leitfähigkeit des Materials. In elektrischen Leitern fehlt dieses verbotene Band und es existieren stets freie Elektronen in dem Kristallgitter. In Halbleitern ist dieses verbotene Band schmal. Schon bei der Umgebungstemperatur werden viele Elektronen infolge der thermischen Bewegung der Atome derart beschleunigt, dass sie sich im Leitungsband befinden. Bei Nichtleitern dagegen ist der Abstand zwischen Valenz- und Leitungsband wesentlich größer und nur wenigen Elektronen gelingt es, bei der Umgebungstemperatur bereits ins Leitungsband zu gelangen.

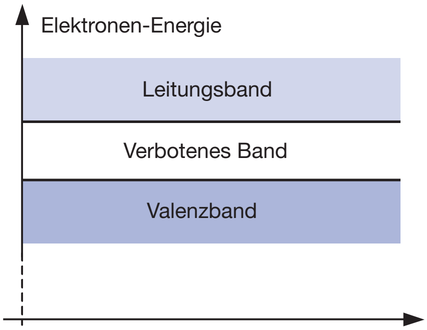


Abbildung 4.7: Bändermodell

Die Zuordnung von Materialien zu einer der drei Gruppen in Abb. 4.5 mithilfe des spezifischen Widerstandes ist in gewisser Weise willkürlich. Eine bessere Abgrenzung zwischen den Metallen und den Halbleitern gestattet das Temperaturverhalten des spezifischen Widerstandes. Metalle werden mit abnehmender Temperatur immer besser leitfähig. Bei einigen Materialien verschwindet der Widerstand unterhalb einer bestimmten Temperatur sprungartig. Man spricht in diesem Zusammenhang von **Supraleitung**. Die Sprungtemperatur liegt in der Nähe des absoluten Nullpunkts, bei Aluminium z.B. bei 1,18 K, bei Zink bei 0,85 K. Allerdings sind inzwischen auch aus Metalloxiden hergestellte Keramikwerkstoffe bekannt, bei denen die Sprungtemperatur in der Nähe von 92 K liegt, man spricht dann von Hochtemperatur-Supraleitung.

Bei den Halbleitern ist die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes im Vergleich zu den Leitern umgekehrt. Bei einer Temperatur nahe dem absoluten Nullpunkt verhalten sich die Halbleiter wie sehr gute Isolatoren. Mit steigender Temperatur nehmen die Schwingbewegungen der Atome zu und es kommt in steigendem Maße zu Trennungen in den gegenseitigen Bindungen zwischen den Atomen. Eine Stelle, an der ein Elektron frei wird und daher anschließend fehlt, bezeichnet man als **Elektronenfehlstelle**, **Defekt-Elektron** oder **Loch**. Dieses Loch (= fehlende negative Elementarladung) ist gleichbedeutend mit einer positiven Elementarladung, das Atom mit dem Defekt-Elektron ist ein positiv geladenes Ion. Nicht nur die Elektronen, auch die Löcher nehmen an der Bewegung der Ladungsträger teil, man spricht hier vom **Löcherstrom**. Dabei muss man jedoch beachten, dass die Ionen ortsgebunden sind und sich im Gegensatz zu den Elektronen nicht durch das Gitter bewegen können. Der Löcherstrom kommt dadurch zustande, dass ein Loch durch ein Valenzelektron aus einem Nachbaratom aufgefüllt wird, wobei dieses Valenzelektron ein Loch an einer anderen Stelle hinterlässt. Der Löcherstrom ist gleichbedeutend mit dem Weiterwandern der positiven Ionisierung von einem Atom zum nächsten.

Beim Aufbrechen der Verbindung zwischen zwei Atomen entsteht ein Ladungsträgerpaar, also gleichzeitig ein freies Elektron und ein Loch. Wird im umgekehrten Fall ein Loch von einem freien Elektron besetzt, dann bezeichnet man diesen Vorgang als **Rekombination**. Im stationären Zustand befinden sich Paarbildung und Rekombination zahlenmäßig im Gleichgewicht. Mit steigender Temperatur nimmt die Anzahl der Paarbildungen und Rekombinationen zu, die Anzahl der permanent vorhandenen freien Ladungsträger ist größer. Diese Eigenschaft wird ausgenutzt in stark temperaturabhängigen Widerständen wie z.B. den Heißleitern.

Wird an einen Halbleiter eine elektrische Spannung angelegt, dann bewegen sich die Ladungsträger unter dem Einfluss des äußeren Feldes, die Elektronen bewegen sich genauso wie im Metall in Gegenrichtung zur elektrischen Feldstärke, d.h. zum Pluspol der Spannungsquelle, und die Löcher in Richtung der elektrischen Feldstärke, d.h. zum Minuspol der Spannungsquelle. Diese im reinen Halbleitermaterial vorhandene temperaturabhängige Leitfähigkeit bezeichnet man als **Eigenleitfähigkeit**. Die Dichte der Leitungselektronen n, d.h. ihre Anzahl pro Volumen, ist bei der Eigenleitung genauso groß wie die Dichte der Löcher p. Bei der Umgebungstemperatur gilt für die Ladungsträgerdichte im Germanium $n = p \approx 2{,}5 \cdot 10^{13}\ \text{cm}^{-3}$ und im Silizium $n = p \approx 1{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^{-3}$. Das entspricht einem Verhältnis von Ladungsträgerpaaren zu Atomen von etwa $1/10^9$ bei Germanium und $1/10^{12}$ bei Silizium, d.h. lediglich ein Ladungsträgerpaar bei 10^{12} Si-Atomen ist getrennt. Die geringere Leitfähigkeit der Halbleiter gegenüber den Metallen beruht also vor allem auf der wesentlich geringeren Anzahl freier Ladungsträger, da bei den Metallen praktisch jedes Atom ein Leitungselektron zur Verfügung stellt.

Zur Steigerung der Leitfähigkeit von Halbleitermaterialien werden gezielt Fremdatome in das Kristallgitter eingebaut. Diesen Vorgang bezeichnet man als **Dotierung**, die Leitung bezeichnet man im Gegensatz zur Eigenleitung jetzt als **Störleitung**. Für diese Dotierung werden Atome verwendet, die entweder fünf Valenzelektronen wie z.B. Arsen, Antimon und Phosphor oder aber drei haben wie z.B. Gallium, Indium und Aluminium. Im ersten Fall nennt man die Fremdatome **Donatoren**, im zweiten Fall **Akzeptoren**. Die ▶Abb. 4.8 zeigt den Fall, dass ein Atom mit fünf Valenzelektronen in ein Silizium-Gitter eingebaut ist. An der Gitterstörstelle können nur vier Valenzelektronen von den benachbarten Siliziumatomen fest gebunden werden, während das fünfte Elektron ungebunden bleibt. Es genügt schon eine sehr kleine Energiezufuhr, z.B. durch thermische Schwingungen des Atoms, um dieses Elektron aus dem Atomverband zu lösen. Damit steht ein weiteres Leitungselektron zur Verfügung, das sich unter dem Einfluss eines von außen angelegten elektrischen Feldes bewegen kann. Die Anzahl der Leitungselektronen wird mit diesen Donatoren über die Zahl der bei der Eigenleitfähigkeit vorhandenen freien Elektronen hinaus erhöht. In der Praxis werden prozentual nur sehr wenige Fremdatome eingebaut. Ist das Verhältnis der Fremdatome zu den ursprünglichen Si-Atomen $1/10^9$ und nimmt man an, dass bereits bei Umgebungstemperatur alle Donatoratome ionisiert sind, dann steigt die Zahl der Leitungselektronen um einen Faktor in der Größenordnung 10^3 an. Als Folge dieses Elektronenüberschusses werden gleichzeitig mehr Löcher aufgefüllt und die Anzahl der an der Ladungsträgerbewegung beteiligten Löcher geht um etwa den gleichen Faktor zurück. Die Stromleitung erfolgt fast ausschließlich durch Elektronen, da die Anzahl der frei verfügbaren Ladungsträger der Anzahl der Fremdatome entspricht. Der Leiter wird dann als ***n*-Leiter** bezeichnet, die Elektronen heißen **Majoritätsträger**, die Löcher **Minoritätsträger**.

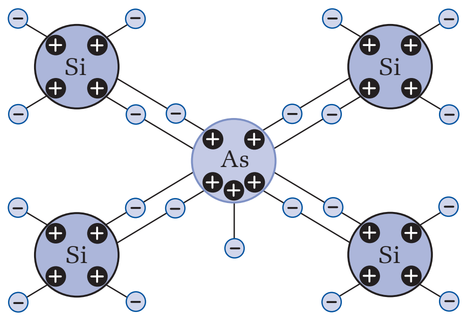


Abbildung 4.8: Atomare Struktur mit Donator-Atom

Wird ein Atom mit lediglich drei Valenzelektronen in das Kristallgitter eingefügt, dann entsteht an der Störstelle ein Defekt-Elektron, d.h. ein zusätzliches Loch. Wird auf diese Weise die Zahl der Löcher stark erhöht und damit gleichzeitig infolge der Rekombinationen die Zahl der freien Leitungselektronen reduziert, dann spricht man von einem ***p*-Leiter**. In diesem Fall sind die Löcher die Majoritätsträger, die Elektronen dagegen die Minoritätsträger.

4.4.1 Der *pn*-Übergang

Wir betrachten jetzt ein Halbleitermaterial, das auf der einen Seite *p*-dotiert, auf der anderen Seite *n*-dotiert ist (▶Abb. 4.9). Man beachte, dass in diesem Zustand beide Seiten noch immer elektrisch neutral sind. An der als *pn*-Übergang bezeichneten Stoßstelle zwischen den beiden Bereichen besteht ein starkes Konzentrationsgefälle für die freien Ladungsträger. In der *n*-Zone sind sehr viele Elektronen frei verfügbar, in der *p*-Zone sehr viele Löcher. Infolge der thermischen Bewegungen werden die freien Elektronen aus der *n*-Schicht in die elektronenarme *p*-Schicht **diffundieren**. Entsprechend diffundieren die Löcher in der umgekehrten Richtung aus der *p*-Schicht in die *n*-Schicht. Diese thermisch bedingte Diffusion der Majoritätsträger an der Grenzschicht nennt man **Diffusionsstrom**, im Gegensatz zu dem von einer äußeren elektrischen Feldstärke verursachten Driftstrom nach Abb. 2.6.

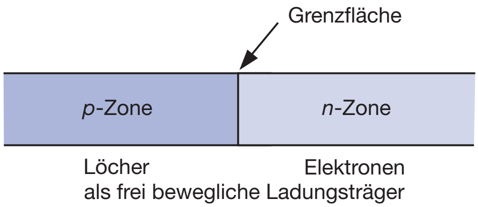


Abbildung 4.9: *pn*-Übergang

Auf beiden Seiten der Grenzfläche entsteht gegenüber dem vorher neutralen Ausgangszustand ein Raumladungsbereich. In der *p*-Zone stellt sich wegen der Löcherabwanderung und der gleichzeitig stattfindenden Elektronenzuwanderung eine negative Raumladung ein, während in der *n*-Zone eine positive Raumladung auftritt. Als Folge davon entsteht eine von der *n*-Zone zur *p*-Zone zeigende elektrische Feldstärke bzw. Spannung, die der Ladungsträgerdiffusion entgegenwirkt und so einen Gleichgewichtszustand hervorruft. Im stationären Zustand fließt kein Strom durch den *pn*-Übergang.

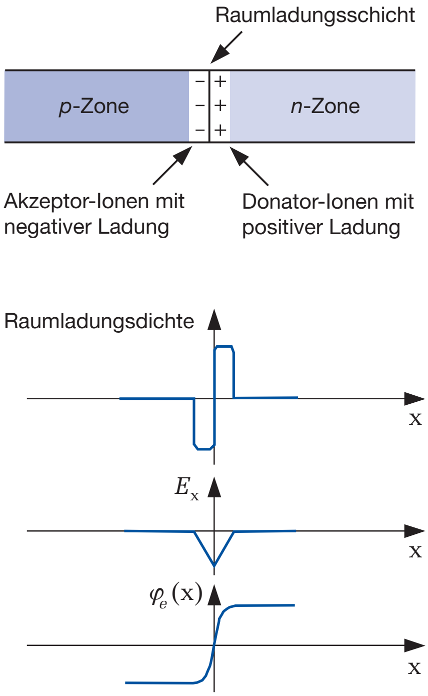


Abbildung 4.10: Verhalten an der Sperrschicht

Das Abwandern der negativen Ladungsträger aus der *n*-Zone führt dazu, dass hier die nunmehr positiv geladenen Donator-Ionen verbleiben, während in der *p*-Zone die negativ geladenen Akzeptor-Ionen verbleiben. Die dünne Raumladungsschicht enthält infolge der Diffusion keine frei beweglichen Ladungsträger mehr. Die sich einstellende Raumladungsdichte wird also durch die Zahl der Fremdatome (Dotierung) festgelegt und ist daher innerhalb der Raumladungsschicht nahezu konstant. Die in ▶Abb. 4.10 dargestellten Kurvenverläufe gelten für gleiche Dotierungsgrade, d.h. für homogene, einander entgegengesetzt gleiche Dotierungen in den beiden Zonen.

Mit der willkürlich gewählten x-Richtung ist die zugehörige x-gerichtete Feldstärke negativ. Sie zeigt von der *n*-Zone in Richtung *p*-Zone. Außerhalb der Raumladungszone ist die elektrische Feldstärke praktisch Null und in der Mitte zwischen den beiden Zonen weist sie ihren Maximalwert auf.

Die Potentialverteilung kann mithilfe der Gl. (1.30) berechnet werden. Legt man den Punkt P_1 auf die Grenzfläche $x = 0$, an der das Bezugspotential den willkürlich gewählten Wert $\varphi_e(0) = 0$ annehmen soll, dann erhält man für das von der Koordinate x abhängige Potential den bereits in Abb. 4.10 dargestellten Verlauf

$$\varphi_e(x) \overset{(1.30)}{=} -\int_0^x E_x \mathrm{d}x \,. \tag{4.22}$$

Diese Kurve kann auch interpretiert werden als Verlauf der Spannung $U(x)$ gegenüber der Grenzfläche. Im Bereich der *n*-Zone hat die Spannung einen positiven Wert, im Bereich der *p*-Zone einen negativen Wert.

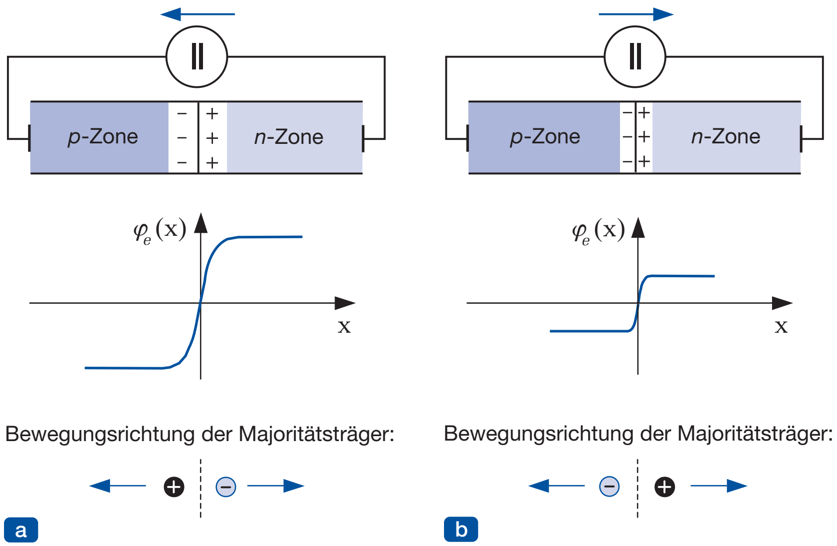


Abbildung 4.11: *pn*-Übergang an äußerer Spannung

Im nun folgenden Schritt soll das Halbleitermaterial mit den beiden unterschiedlich dotierten Bereichen entsprechend ▶Abb. 4.11 an eine äußere Spannungsquelle angeschlossen werden. Betrachten wir zunächst das Teilbild Abb. 4.11a, in dem die *n*-Zone an die Klemme mit dem höheren Potential angeschlossen wird. Die von außen angelegte Spannung hat die gleiche Richtung wie die Spannung, die sich vorher an der Sperrschicht aufgebaut hat. Die Elektronen der *n*-Zone werden von dem Pluspol der Spannungsquelle angezogen und die Löcher aus der *p*-Zone entsprechend von dem

Minuspol, d.h. die Überlagerung der äußeren Spannung führt zu einer Verbreiterung der Raumladungszone. Der Bereich, in dem sich keine freien Ladungsträger befinden, vergrößert sich also und ein weiterer Ladungsträgeraustausch kann nicht stattfinden. Die Raumladungszone verhindert einen kontinuierlichen Majoritätsträgerstrom und wird daher als **Sperrschicht** bezeichnet. Auf die vergleichsweise geringe Anzahl von Minoritätsträgern hat die Sperrschicht keinen Einfluss.

In Teilbild Abb. 4.11b ist die Polarität der Spannungsquelle umgekehrt. Die in die *p*-Zone diffundierten Elektronen werden vom Pluspol der Spannungsquelle angezogen, so dass die Sperrschicht abgebaut wird. Gleichzeitig werden vom Minuspol der Quelle neue Elektronen in die *n*-Zone nachgeliefert. Der Diffusionsvorgang wird von der von außen angelegten Spannung unterstützt. Je höher der Wert der angelegten Spannung, desto kleiner wird die verbleibende Sperrschicht. In Abhängigkeit von dem Wert der Quellenspannung stellt sich bei dieser Spannungsrichtung ein Majoritätsträgerstrom ein. Der *pn*-Übergang ist in **Durchlassrichtung** gepolt.

4.4.2 Die Diode

Aus den beiden Situationen der Abb. 4.11 ist zu erkennen, dass der *pn*-Übergang unterschiedliches Verhalten zeigt, je nachdem, in welcher Richtung die äußere Spannung gepolt ist. Diese Ventileigenschaften werden z.B. bei den Halbleiterdioden ausgenutzt. Das in ▶Abb. 4.12 eingetragene Schaltsymbol für eine Diode zeigt die Durchlassrichtung des Stromes an und zwar von der als Anode bezeichneten *p*-Zone zu der als Katode bezeichneten *n*-Zone.

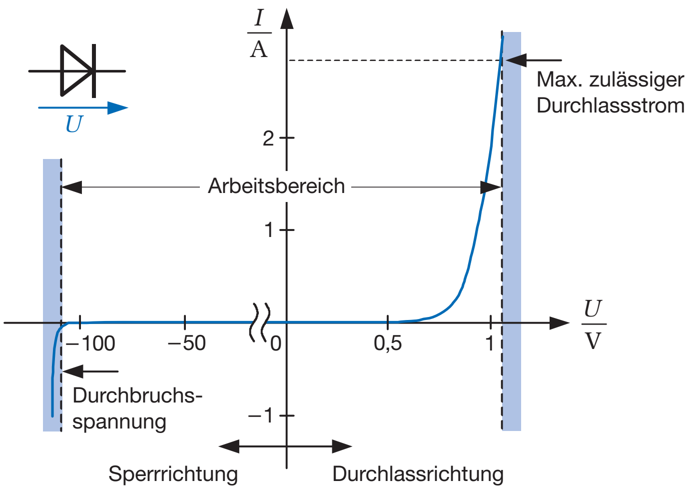


Abbildung 4.12: Diodenkennlinie

Die Abb. 4.12 zeigt außerdem eine typische Kennlinie (Strom-Spannungs-Diagramm) für eine Diode mit nominal 100 V Sperrspannung. Man beachte, dass sich die Skalierung der Spannungsachse in den beiden Bereichen $U > 0$ V bzw. $U < 0$ V um den Faktor 100 unterscheidet.

Liegt die Spannung in Durchlassrichtung an der Diode, dann fließt mit steigender Spannung ein zunehmend größerer Strom. Bei Silizium ist dieser Strom für Spannungen im Bereich $U < 0{,}7$ V noch sehr gering. Erst bei zunehmenden Spannungen wird die von der Raumladungsverteilung verursachte entgegengerichtete Feldstärke vollständig kompensiert und der Strom steigt näherungsweise exponentiell mit der Spannung entsprechend der Beziehung

$$I = I_0 \left(\mathrm{e}^{\frac{U}{nU_T}} - 1 \right) \tag{4.23}$$

an. Die im Exponenten auftretende Temperaturspannung U_T berechnet sich aus der Beziehung

$$U_T = \frac{kT}{e} \tag{4.24}$$

mit der Boltzmann-Konstante $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Ws/K (nach Ludwig Eduard Boltzmann, 1841 – 1906), der Elementarladung e und der absoluten Temperatur in K. Bei der Umgebungstemperatur $T = 20°\mathrm{C} = (273 + 20)$ K gilt näherungsweise $U_T \approx 25{,}2$ mV und bei 100°C gilt $U_T \approx 32{,}1$ mV. Der Emissionskoeffizient n liegt im Bereich zwischen 1 und 2. Für Werte $U > 3U_T$, also für Spannungen oberhalb von 100 mV, kann der Wert 1 in der runden Klammer von Gl. (4.23) vernachlässigt werden. Der Diodenstrom hat die Form einer Exponentialfunktion, die wegen Gl. (4.24) von der Temperatur abhängt. Er hat einen maximal zulässigen Wert, der durch die in der Diode entstehenden Verluste $P = UI$ begrenzt wird.

Liegt die Spannung dagegen in Sperrrichtung, dann fließt zunächst nur ein sehr kleiner Sperrstrom (Minoritätsträgerstrom). Dieser ist bei gleicher Achseneinteilung für Durchlass- und Sperrstrom in Abb. 4.12 praktisch nicht zu erkennen. Überschreitet die Sperrspannung einen von dem Bauelement vorgegebenen Grenzwert (**Durchbruchsspannung**), dann fließt ein wachsender Strom entgegen der Sperrrichtung der Diode. Ein Betrieb in diesem Bereich führt im Allgemeinen zur Zerstörung der Diode. Allerdings wird der Durchbruch bei einigen Bauelementen wie z.B. Z-Dioden (Zener-Dioden) ausgenutzt, um eine vom Strom unabhängige, definierte Spannung zu erzeugen.

ZUSAMMENFASSUNG

- Im Vakuum können Elektronen bereits mit kleinen Spannungen auf extrem hohe Geschwindigkeiten beschleunigt werden. Unter einem **Elektronenvolt** versteht man die Energieänderung, die ein Teilchen mit der Elementarladung e beim Durchlaufen einer Spannung von $1\ \mathrm{V}$ hinzugewinnt. Bei Beschleunigungsspannungen oberhalb von $30\ \mathrm{kV}$ gewinnen die relativistischen Effekte an Bedeutung.
- Die Stromleitung in Gasen kann wegen der Proportionalität zwischen der Kraft auf die Ladungsträger und der elektrischen Feldstärke in weiten Bereichen durch das Ohm'sche Gesetz beschrieben werden.
- Die Stromleitung in Flüssigkeiten entspricht einer Bewegung von Ionen zu den Elektroden. Dieser als **Elektrolyse** bezeichnete Stofftransport kann zur Abscheidung von Metallen ausgenutzt werden. Die abgeschiedene Masse ist proportional zu dem Produkt aus Stromstärke und Zeit.
- Die Leitfähigkeiten von Leitern und von Isolatoren können sich um bis zu 20 Größenordnungen unterscheiden. Dazwischen liegen die so genannten **Halbleiter**, die sich vor allem durch eine andere Temperaturabhängigkeit ihrer Leitfähigkeit von den anderen Gruppen unterscheiden. Bei tiefen Temperaturen verhalten sie sich wie **Isolatoren**, mit zunehmender Temperatur steigt ihre Leitfähigkeit.
- Die Leitfähigkeit von Halbleitern wird durch den Einbau von Fremdatomen in das Kristallgitter (Dotierung) stark beeinflusst. Die Grenzschicht zwischen einem **p-dotierten** und einem **n-dotierten** Bereich zeigt je nach Richtung der von außen angelegten Spannung stark unterschiedliches Verhalten. Diese Ventileigenschaften werden bei **Halbleiterdioden** ausgenutzt.

COMPANION WEBSITE
Lösungen

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1 Stromleitung im Vakuum

Zur Ablenkung des Elektronenstrahls in einer Bildröhre wird die Kraftwirkung des elektrischen Feldes ausgenutzt. Wir betrachten ein einzelnes Elektron der Elementarladung $-e$ und der Ruhemasse m_0, das mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{e}}_x v_0$ in den Bereich zwischen den beiden Platten eintritt. Die Platten befinden sich im Abstand d und liegen an einer Gleichspannung U.

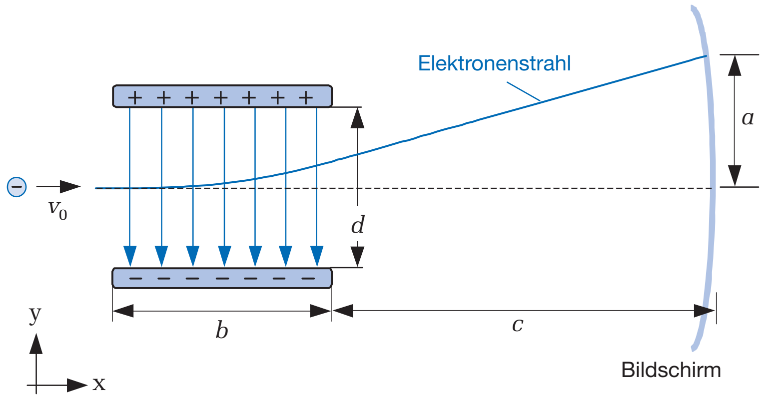


Abbildung 4.13: Prinzipielle Anordnung zur Ablenkung eines Elektronenstrahls

Bestimmen Sie die Auslenkung a des Elektronenstrahls in Abhängigkeit von der Spannung U, der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und den in der Abbildung angegebenen Abmessungen. Die leichte Bildschirmkrümmung soll dabei vernachlässigt werden.

Aufgabe 4.2 Stromleitung in Flüssigkeiten

Eine quaderförmige nichtleitende Wanne ist bis zur Höhe h mit einem Elektrolyt gefüllt. An den Stirnflächen sind ideal leitende Elektroden angebracht. Die Ladungsträgerkonzentration (Anzahl der Ladungen pro Volumen) der jeweils einfach geladenen Anionen und Kationen des Elektrolyts sei jeweils gleich η. Die Beweglichkeit der Anionen sei μ_A, die der Kationen μ_K. Zwischen den Elektroden wird eine Gleichspannungsquelle angeschlossen.

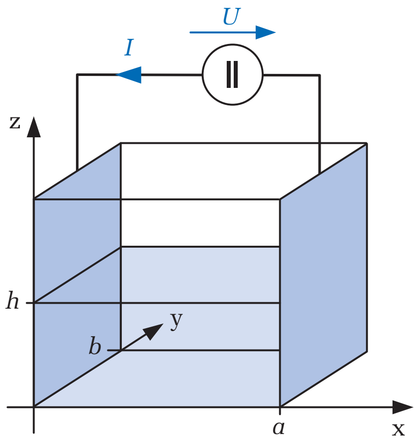


Abbildung 4.14: Betrachtete Anordnung

1. Wie groß ist die Stromdichte $\vec{\mathbf{J}}$, wenn der Strom I zunächst als bekannt angenommen wird?
2. Ermitteln Sie den Strom I in Abhängigkeit von den geometrischen Größen und von η, μ_A, μ_K sowie von der Elementarladung e und der Spannung U. Überlagern Sie dabei die Stromanteile der positiven und negativen Ladungsträger.
3. Wie groß sind die Stromdichte $\vec{\mathbf{J}}'$ und der Strom I', wenn der Behälter mit destilliertem Wasser bis zur Höhe $2h$ weiter aufgefüllt und die Flüssigkeit gleichmäßig durchmischt wird?

Aufgabe 4.3 Elektrolyse

Durch Elektrolyse sollen pro Tag 100 kg Aluminium gewonnen werden. Welcher Strom wird benötigt? (Atomgewicht von Aluminium: $A_r = 26{,}27$, Wertigkeit: $z = 3$)

Das stationäre Magnetfeld

5

ÜBERBLICK

Einführung

» Das nun folgende Kapitel hat eine ähnlich grundlegende Bedeutung wie das Kapitel Elektrostatik. Während uns die Kraft zwischen ruhenden elektrischen Ladungen auf den Begriff des elektrischen Feldes führte, so führt uns nun die Kraft zwischen bewegten Ladungen, d.h. zwischen Strömen, auf den Begriff des magnetischen Feldes. Diese Kraftwirkung wird in vielen Bereichen der Elektrotechnik ausgenutzt wie z.B. bei den Motoren. Wir werden feststellen, dass sich auch die von Magneten ausgeübten Kräfte durch die Bewegung von Ladungsträgern erklären lassen.

Die Begriffe Dipol und Polarisation werden uns wieder erlauben, das Verhalten der Materie im Magnetfeld zu beschreiben. Beim magnetischen Dipol handelt es sich um eine kleine Stromschleife; die Polarisation beschreibt wieder die Auswirkungen der Dipolausrichtung im Magnetfeld.

Die Analogie zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld führt zu gleichen Vorgehensweisen bei der Analyse von elektrischen und magnetischen Kreisen. Der Speicherung elektrischer Energie in Kondensatoren (die Eigenschaft des Bauelements nennen wir Kapazität) steht jetzt die Speicherung magnetischer Energie in Spulen (die Eigenschaft des Bauelements nennen wir Induktivität) gegenüber. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- Kräfte auf dünne stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld zu berechnen,
- die magnetische Feldstärke einfacher Leiteranordnungen zu berechnen,
- die gleichartigen Feldverteilungen von Stabmagneten und Zylinderspulen zu erklären,
- das Verhalten der Materie im Magnetfeld zu verstehen,
- das Verhalten der Feldgrößen an Sprungstellen der Materialeigenschaften zu bestimmen,
- die Analogie zwischen elektrischem und magnetischem Kreis zu verstehen und magnetische Kreise zu berechnen,
- die Induktivität einfacher Anordnungen zu berechnen sowie
- die verschiedenen Auswirkungen eines Luftspalts im magnetischen Kreis zu untersuchen.

5.1 Magnete

Das Kapitel 1 haben wir mit der beobachteten Kraftwirkung zwischen Glas- und Kunststoffstäben begonnen, die mit einem Wolltuch gerieben wurden. Schon lange bevor man zum ersten Mal diese elektrostatischen Kräfte beobachtete (die ersten Versuche wurden mit geriebenem Bernstein durchgeführt), waren die magnetischen Kraftwirkungen bestimmter Eisenerze bekannt. Durch einfache Versuche stellt man fest, dass ein aus diesem Material hergestellter Stabmagnet in seiner unmittelbaren Umgebung Kräfte ausübt, z.B. auf Eisenfeilspäne oder auch auf andere Magnete. Diese Kraftwirkungen sind auch im Vakuum zu beobachten. Offenbar versetzt auch der Magnet den umgebenden Raum in einen Zustand, (ähnlich wie die Ladungen in Kap. 1.3), der dazu führt, dass Kräfte auf andere Körper ausgeübt werden ohne direkten Kontakt und ohne ein stoffliches Medium, das die Kraftwirkung überträgt.

Man verwendet auch hier wieder den Begriff des Feldes und spricht in diesem Fall von einem **Magnetfeld**. Durch Versuche mit zwei Stabmagneten stellt man fest, dass sich die Enden der beiden Stabmagnete entweder anziehen oder abstoßen, je nachdem, welche Enden sich gegenüberstehen ▶Abb. 5.1. Zur Unterscheidung bezeichnet man die beiden Enden der Stabmagnete als Nordpol und Südpol. Die Versuche zeigen:

Merke

Ungleichnamige Pole ziehen sich an. Gleichnamige Pole stoßen sich ab.

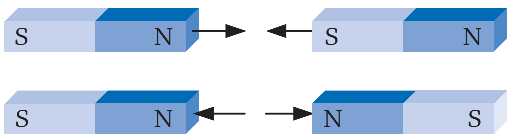


Abbildung 5.1: Kraftwirkungen zwischen Stabmagneten

Den Verlauf der Feldlinien in der Nähe eines Stabmagneten kann man mithilfe von Eisenfeilspänen sichtbar machen. Diese werden in dem magnetischen Feld selbst zu Magneten, man spricht in Analogie zu den Vorgängen in der Elektrostatik von **magnetischer Influenz**. Die Eisenfeilspäne verhalten sich wie magnetische Dipole, die sich analog zu den elektrischen Dipolen tangential zu den Feldlinien ausrichten. Den gleichen Vorgang beobachtet man bei einer Kompassnadel, die sich im Magnetfeld der Erde entlang den Feldlinien ausrichtet. Derjenige Pol der Kompassnadel, der zum geografischen Nordpol der Erde zeigt, wird auch als Nordpol bezeichnet. Da sich ungleichnamige Pole anziehen, ist der geografische Nordpol der Erde somit ein magnetischer Südpol.

Die magnetische Feldstärke ist genauso wie die elektrische Feldstärke ein Vektor. Es wird vereinbart, dass die magnetischen Feldlinien am Nordpol des Magneten austreten und am Südpol wieder eintreten. Das Feld verläuft also außerhalb des Magneten vom Nord- zum Südpol, innerhalb des Magneten vom Süd- zum Nordpol (▶Abb. 5.2)[1].

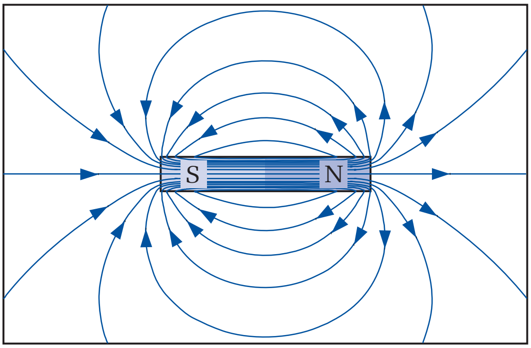


Abbildung 5.2: Verlauf der Feldlinien bei einem Stabmagneten

Einfache Versuche zeigen, dass Magnetpole nicht getrennt werden können. Ein in der Mitte aufgetrennter Stabmagnet ergibt wieder zwei vollständige Magnete mit Nord- und Südpol. Diese Situation ändert sich auch nicht bei kontinuierlich fortgesetzter Aufteilung. Offenbar kann man sich den Magneten aufgebaut denken aus sehr kleinen **Elementarmagneten**. Diese verhalten sich wie magnetische Dipole (vgl. Kap. 5.10), die aber im Gegensatz zu den elektrischen Dipolen nicht aufgetrennt werden können.

Merke

Es gibt keine magnetischen Einzelladungen.

Stahl und Weicheisen werden durch Streichen mit einem Magneten selbst magnetisch. Bei diesem **Magnetisierungsvorgang** werden die einzelnen Elementarmagnete geordnet, d.h. so ausgerichtet, dass sie mehrheitlich in die gleiche Richtung zeigen. Dieser Vorgang ist vergleichbar der Polarisation eines Dielektrikums im elektrischen Feld.

Wir haben gesehen, dass man elektrische Ladungen trennen und durch Berührung von einem Körper auf einen anderen übertragen kann. Als wesentlicher Unterschied dazu wird bei dem Magnetisierungsvorgang keine magnetische Ladung übertragen, sondern es werden lediglich die magnetischen Dipole geordnet.

Merke

Zu der Leitung von elektrischen Ladungsträgern gibt es keinen entsprechenden magnetischen Leitungsvorgang.

1 Der Feldlinienverlauf innerhalb des Stabmagneten ist eine idealisierte Darstellung. Er zeigt das gemäß einer makroskopischen Betrachtungsweise über eine große Anzahl von Atomen räumlich gemittelte Feld (vgl. Kap. 5.10).

5.2 Kraft auf stromdurchflossene dünne Leiter

Zur quantitativen Beschreibung des Magnetfeldes kann man wieder ähnlich wie beim elektrischen Feld von den messbaren Kraftwirkungen ausgehen. Wir werden diese Untersuchungen aber nicht am Beispiel der Kraftwirkung zweier Magnete aufeinander durchführen. Seit den Versuchen von Hans Christian Oersted (1777 – 1851) ist bekannt, dass stromdurchflossene Leiter in ihrer Umgebung ebenfalls ein Magnetfeld besitzen. Bei einem geraden stromdurchflossenen Draht stellt man mithilfe von Eisenfeilspänen fest, dass die Feldlinien konzentrische Kreise mit dem Leiter als Mittelpunkt bilden. Die Richtung der Feldlinien lässt sich mit einer kleinen Kompassnadel ermitteln. Feldlinienrichtung und Stromrichtung sind im Sinne einer Rechtsschraube einander zugeordnet (▶Abb. 5.3).

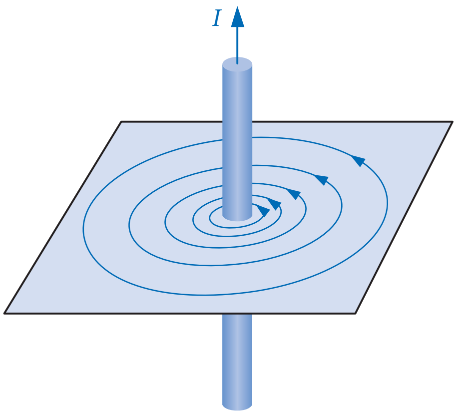


Abbildung 5.3: Verlauf der Feldlinien bei einem geraden Leiter

Dieser stromdurchflossene Leiter erzeugt nicht nur ein eigenes Magnetfeld, er erfährt auch eine Kraftwirkung in einem externen Magnetfeld, das von anderen stromführenden Leitern oder von Magneten hervorgerufen wird. Diese Tatsache werden wir nun verwenden, um die Stärke eines Magnetfeldes zu charakterisieren. Zu diesem Zweck bringen wir einen von dem Strom I durchflossenen Leiter in ein homogenes Magnetfeld.

Zur besseren Veranschaulichung betrachten wir die ▶Abb. 5.4. Das von dem Hufeisenmagnet erzeugte Feld sei homogen in dem Bereich des betrachteten Leiterstückes der Länge s. Verläuft der Strom senkrecht zu der Richtung der Magnetfeldlinien ($\alpha = \pi/2$), dann stellt man fest, dass die Kraft senkrecht auf der von dem stromführenden Leiter und den Feldlinien aufgespannten Ebene steht und proportional zur Leiterlänge s und zum Wert des Stromes I ist

$$F \sim I\,s \qquad \to \qquad F = B\,I\,s\,. \tag{5.1}$$

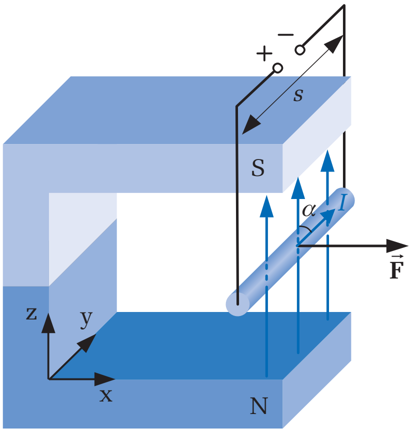


Abbildung 5.4: Bestimmung der Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter

Der Proportionalitätsfaktor B beschreibt die Wirkung des magnetischen Feldes und wird als **magnetische Flussdichte** (manchmal auch noch als **magnetische Induktion**) bezeichnet[2]. Ändert man den in der Abbildung eingezeichneten Winkel α zwischen der Stromrichtung und den Magnetfeldlinien, dann steht die Richtung der Kraft noch immer senkrecht auf der von dem Leiter und der Feldrichtung aufgespannten Ebene, ihr Wert ändert sich aber mit dem Sinus des Winkels

$$F = B\,I\,s\,\sin\alpha\,. \tag{5.2}$$

Verlaufen also Magnetfeld und Stromrichtung parallel zueinander, dann verschwindet die Kraft.

Da die magnetischen Feldlinien eine Richtung haben, muss auch die das Feld beschreibende Größe B gerichtet sein. Der Vektor $\vec{\mathbf{B}}$ zeigt, wie bereits vereinbart, vom Nord- zum Südpol und ist entsprechend der Festlegung des Koordinatensystems in der Abb. 5.4 z-gerichtet.

Wir haben eingangs von der Richtung des Stromes I gesprochen. Der Strom ist aber nach Gl. (2.11) nur eine skalare Größe. Streng genommen müssten wir die Richtung der Stromdichte $\vec{\mathbf{J}}$ verwenden. Unter der Voraussetzung, dass es sich bei dem Leiter um einen dünnen Draht handelt, in dem die Stromdichte nur eine Komponente in Richtung des Drahtes aufweist, können wir die Richtung der Stromdichte auch dem Verlauf des Drahtes zuordnen. Mit der Querschnittsfläche A des stromdurchflossenen Leiters und mit der y-gerichteten Stromdichte in Abb. 5.4 lässt sich der Zusammenhang

$$\vec{\mathbf{J}}\,A\,s \overset{(2.11)}{=} \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}}\,I\,s = I\,\vec{\mathbf{s}} \tag{5.3}$$

2 Die Dimension ist mit Gl. (5.1) bereits festgelegt $[B] = \mathrm{N/Am} = \mathrm{Vs/m^2} = \mathrm{T}$ und wird mit T (nach Nicola Tesla, 1856 – 1943) abgekürzt.

angeben. In der Gl. (5.2) ist dann die skalare Größe Is durch die vektorielle Größe $\vec{\mathbf{e}}_y Is = I\vec{\mathbf{s}}$ zu ersetzen. Betrachtet man zunächst nur die Beträge der Vektoren, dann kann die Gl. (5.2) in der Form

$$F = \left|\vec{\mathbf{F}}\right| = B\,I\,s\,\sin\alpha = \left|\vec{\mathbf{B}}\right|\left|I\,\vec{\mathbf{s}}\right|\sin\alpha = \left|\vec{\mathbf{B}}\times I\,\vec{\mathbf{s}}\right| \tag{5.4}$$

geschrieben werden. Bildet man das Kreuzprodukt $\vec{\mathbf{B}}\times I\vec{\mathbf{s}}$ mit den in Abb. 5.4 eingetragenen Richtungen für $\vec{\mathbf{B}}$ und $I\vec{\mathbf{s}}$, dann entspricht zwar der Betrag dem in Gl. (5.4) angegebenen Ausdruck $BIs\,\sin\alpha$, die Richtung zeigt aber entgegen der bei der Anordnung festgestellten Kraftrichtung, so dass die Reihenfolge der Vektoren beim Kreuzprodukt nach Gl. (A.9) vertauscht werden muss. Resultierend erhält man die vektorielle Gleichung

$$\vec{\mathbf{F}} = I\,\vec{\mathbf{s}}\times\vec{\mathbf{B}}\,, \tag{5.5}$$

die die Kraft auf ein vom Strom I durchflossenes geradliniges Leiterstück der gerichteten Länge $\vec{\mathbf{s}}$ in einem homogenen (ortsunabhängigen) Magnetfeld der Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ beschreibt.

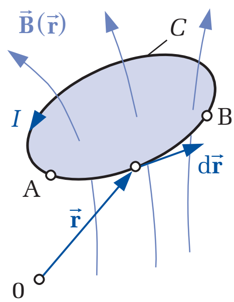


Abbildung 5.5: Leiterschleife im inhomogenen Magnetfeld

Zur Verallgemeinerung betrachten wir die ▶Abb. 5.5. Befindet sich der vom Strom I durchflossene dünne Leiter der Kontur C in einem Magnetfeld der ortsabhängigen Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}})$, dann ist die Kraft auf das zwischen den Punkten A und B gelegene Leiterstück durch die Integration der Beiträge entsprechend der Gl. (5.5) gegeben. Die vektorielle Strecke $\vec{\mathbf{s}}$ wird jetzt durch das vektorielle Wegelement $\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}$ ersetzt, das die Änderung des Ortsvektors $\vec{\mathbf{r}}$ entlang der Kontur C beschreibt und jeweils tangential zur Leiterschleife gerichtet ist

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{AB}} = I\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\left[\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}})\right]. \tag{5.6}$$

Zur Berechnung der auf die Leiterschleife wirkenden Gesamtkraft ist eine Integration über die geschlossene Leiterschleife durchzuführen

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = I\oint_C\left[\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}})\right]}\;. \tag{5.7}$$

Beispiel 5.1: Kraft auf stromdurchflossene kreisförmige Leiterschleife

Eine in der Ebene $z = \text{const}$ gelegene, vom Gleichstrom I durchflossene kreisförmige Leiterschleife des Radius a befindet sich im homogenen z-gerichteten Magnetfeld der Flussdichte $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{e}}_z B_0$. Zu bestimmen ist die Kraft auf die Leiterschleife.

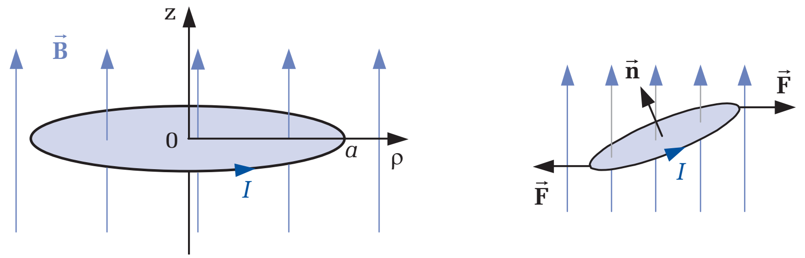


Abbildung 5.6: Leiterschleife im homogenen Feld

Lösung:

Die Berechnung erfolgt in Zylinderkoordinaten, wobei die Integration in der Gl. (5.7) über die Koordinate φ in den Grenzen von 0 bis 2π durchzuführen ist

$$\vec{\mathbf{F}} = I\int_0^{2\pi}\left(\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_\varphi a\,\mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}\times\vec{\mathbf{e}}_z B_0\right) = IaB_0\int_0^{2\pi}\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_\varphi\times\vec{\mathbf{e}}_z}_{\vec{\mathbf{e}}_\rho}\,\mathrm{d}\varphi = IaB_0\int_0^{2\pi}\left(\vec{\mathbf{e}}_x\cos\varphi+\vec{\mathbf{e}}_y\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = \vec{\mathbf{0}}\,. \quad (5.8)$$

Bei der Ausführung der Integration ist zu beachten, dass der Einheitsvektor $\vec{\mathbf{e}}_\rho$ von der Koordinate φ, d.h. von der Integrationsvariablen abhängt und somit bezüglich der Integration keine Konstante ist.

Berechnet man die Kraft auf ein Teilstück der Leiterschleife nach Gl. (5.6), dann stellt man eine ρ-gerichtete Kraftkomponente fest. Die Kraft wirkt an jeder Stelle des kreisförmigen Leiters radial nach außen. Betrachtet man dagegen die gesamte auf die geschlossene Leiterschleife wirkende Kraft, dann muss diese aus Symmetriegründen gemäß Gl. (5.8) verschwinden.

Legen wir die Stromschleife nicht in eine Ebene $z = \text{const}$, so wie z.B. auf der rechten Seite der Abbildung angedeutet, dann stehen die Feldlinien nicht mehr senkrecht auf der von der Schleife aufgespannten Fläche. In diesem Fall erhalten wir eine Situation vergleichbar der Darstellung in Abb. 1.26. Die Zerlegung der entlang der Leiterschleife auftretenden Kräfte liefert eine Teilkraft, die in der Schleifenebene liegt und versucht, die Schleife auseinanderzudrücken, sowie eine weitere Teilkraft, die ein Drehmoment ausübt und versucht, die Schleifenfläche senkrecht zu den Feldlinien zu positionieren, d.h. die Flächennormale $\vec{\mathbf{n}}$ wird in Richtung der Feldlinien ausgerichtet.

5.3 Kraft auf geladene Teilchen

An dieser Stelle kehren wir noch einmal zu der Beziehung (5.3) zurück. Drückt man in dieser Gleichung die Stromdichte durch das Produkt aus Raumladungsdichte ρ und Geschwindigkeit der Ladungsträger $\vec{\mathbf{v}}$ nach Gl. (2.9) aus, dann gilt der Zusammenhang

$$I\,\vec{\mathbf{s}} \overset{(5.3)}{=} \vec{\mathbf{J}}\,A\,s \overset{(2.9)}{=} \rho\,A s\,\vec{\mathbf{v}} = \rho V\,\vec{\mathbf{v}} = Q\,\vec{\mathbf{v}}\,, \tag{5.9}$$

in dem Q die gesamte in dem betrachteten Leiterstück der Länge s, d.h. in dem Volumen $V = As$ enthaltene bewegte Ladungsmenge bezeichnet. Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter nach Gl. (5.5) ist sowohl proportional zur bewegten Ladungsmenge Q als auch zur Geschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}}$, mit der sich die Ladungsträger bewegen. Durch Einsetzen der Gl. (5.9) in die Gl. (5.5) erhält man die Kraft auf eine Ladungsmenge Q, die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}}$ in einem Magnetfeld der Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ bewegt

$$\vec{\mathbf{F}} = Q\,\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}\,. \tag{5.10}$$

Diese Kraft wird als **Lorentz-Kraft** bezeichnet. Die Kraft auf die bewegten Ladungen innerhalb eines Leiters überträgt sich auf den metallischen Leiter, d.h. die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter entspricht der Summe aller Kräfte auf die bewegten Einzelladungen. Existiert neben dem Magnetfeld $\vec{\mathbf{B}}$ gleichzeitig ein elektrisches Feld der Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$, dann wirkt auf die Ladung Q mit Gl. (1.3) die Gesamtkraft

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = Q\left(\vec{\mathbf{E}}+\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}\right)}\,. \tag{5.11}$$

Beobachtet man eine Kraftwirkung $\vec{\mathbf{F}}$ auf ein bewegtes geladenes Teilchen Q, dann lässt sich nicht eindeutig feststellen, ob die Kraftwirkung von einem elektrischen Feld oder von der Bewegung in einem magnetischen Feld verursacht wird. Beide Felder können entsprechend der Gl. (5.11) mithilfe der Geschwindigkeit ineinander umgerechnet werden.

5.4 Definition der Stromstärke

Betrachten wir nun die ▶Abb. 5.7, in der zwei unendlich lange, geradlinige, parallel verlaufende Leiter die Ströme I_1 bzw. I_2 führen. Da sich jeder stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld des anderen Leiters befindet, üben die beiden Ströme nach Gl. (5.7) Kräfte aufeinander aus, die entgegengesetzt gleich sind. Wir werden bei dieser **ebenen**[3] Anordnung die Kraft auf den Leiter 2 infolge des im Leiter 1 fließenden

3 **Vereinbarung:** Unter einer ebenen Anordnung (Problemstellung) soll verstanden werden, dass sie in Richtung einer kartesischen Koordinate (üblicherweise die z-Koordinate) unendlich ausgedehnt und von dieser selbst unabhängig ist. Die Berechnungen erfolgen in der zweidimensionalen Schnittebene z = const. Die Ergebnisse (z.B. Kräfte) werden pro Längeneinheit der Koordinate z angegeben.

Stromes I_1 berechnen. Dieser Strom ruft den bereits in Abb. 5.3 dargestellten Feldverlauf hervor[4].

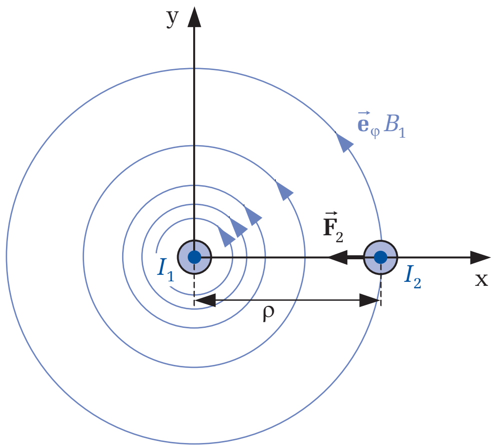


Abbildung 5.7: Kraft auf Linienstrom I_2 infolge des Linienstromes I_1

Die magnetische Flussdichte ist φ-gerichtet und kann aus Symmetriegründen nicht von der Koordinate φ abhängen. Zur Berechnung der Kraft auf den Leiter 2 kann von der Gl. (5.6) ausgegangen werden. Die Integration entlang der z-Koordinate über ein Leiterstück der Länge l führt auf die Beziehung

$$\vec{\mathbf{F}}_2 \overset{(5.6)}{=} I_2 \int_0^l \left(\vec{\mathbf{e}}_z \mathrm{d}z \times \vec{\mathbf{e}}_\varphi B_1\right) = I_2\, B_1 \int_0^l \left(-\vec{\mathbf{e}}_\rho\right) \mathrm{d}z = -\vec{\mathbf{e}}_\rho I_2\, B_1\, l\,. \tag{5.12}$$

Um diese Kraft in Abhängigkeit von dem verursachenden Strom I_1 angeben zu können, fehlt noch ein quantitativer Zusammenhang zwischen der Flussdichte B_1 an der Stelle des Leiters 2 und dem Strom I_1. Durch Messungen lässt sich leicht zeigen, dass die Kraft (5.12) proportional zu dem Strom I_1 und umgekehrt proportional zu dem Abstand zwischen den beiden Leitern ist, d.h. es muss gelten

$$B_1 \sim \frac{I_1}{\rho} \qquad \rightarrow \qquad B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{\rho}\,. \tag{5.13}$$

Die Proportionalitätskonstante wird in der angegebenen Form zu $\mu_0/2\pi$ festgelegt. Der Faktor μ_0 wird als **magnetische Feldkonstante** bzw. als **Permeabilität des Vakuums** bezeichnet. Sein Wert ergibt sich im Zusammenhang mit der Festlegung der Strom-

4 **Vereinbarung:** Die Richtung des Stromes wird durch einen Punkt markiert (Pfeilspitze), wenn der Strom senkrecht aus der Zeichenebene austritt, und durch ein Kreuz (Pfeilende), wenn der Strom in die Zeichenebene hineinfließt.

stärke. Setzt man die Gl. (5.13) in die Gl. (5.12) ein, dann gilt für die Kraft pro Längeneinheit der Koordinate z

$$\frac{\vec{\mathbf{F}}_2}{l} = -\vec{\mathbf{e}}_\rho \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{\rho} \; . \tag{5.14}$$

Die Einheit der Stromstärke ist nun folgendermaßen festgelegt (DIN-Normen 1357, Einheiten elektrischer Größen, 1967):

Festlegung

Zwei unendlich lange, parallele, gerade Leiter von vernachlässigbar kleinem Querschnitt sind im Vakuum im Abstand von 1 m voneinander angeordnet; sie werden von einem Gleichstrom durchflossen. Dieser hat die Stromstärke 1 A, wenn die elektrodynamisch verursachte Kraft zwischen beiden Leitern $2 \cdot 10^{-7}$ N für jeden Abschnitt der Anordnung beträgt, der aus einander gegenüberstehenden Leiterteilen von 1 m Länge besteht.

Mit dieser Definition ist auch die Permeabilität des Vakuums nach Gl. (5.14) eindeutig festgelegt

$$\frac{2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{m}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1\,\mathrm{A} \cdot 1\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{m}} \quad \to \quad \boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}} \; . \tag{5.15}$$

Hinweis

Die elektrische und die magnetische Feldkonstante ε_0 und μ_0 sind in der Form $c^2 = 1/(\mu_0 \varepsilon_0)$ über die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum (Lichtgeschwindigkeit c) miteinander verknüpft. Durch Festlegung von μ_0 in Gl. (5.15) und Messung von c ist ε_0 eindeutig bestimmt. Der sich so ergebende Wert wurde bereits in Kap. 1.2 angegeben.

Sind die beiden Ströme in Abb. 5.7 gleich gerichtet, dann wirkt die Kraft auf den Leiter 2 nach Gl. (5.14) in Richtung $-\vec{\mathbf{e}}_\rho$, d.h. in Richtung auf den Leiter 1.

Merke

Gleich gerichtete Ströme ziehen sich an, entgegengesetzt gerichtete Ströme stoßen einander ab.

5.5 Die magnetische Feldstärke

In der Elektrostatik haben wir zwei vektorielle Größen eingeführt, zum einen die elektrische Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$ als Intensitätsgröße, die sich durch Kraftwirkungen auf Ladungen bemerkbar macht. Die analoge Feldgröße bei den Magnetfeldern ist die Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$, auch sie ist eine Intensitätsgröße und macht sich durch Kraftwirkungen auf bewegte Ladungen bzw. auf Ströme bemerkbar. Zum anderen haben wir die elektrische Flussdichte (Erregung) $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}}$ als Quantitätsgröße eingeführt, die ein Maß für die vorhandene Ladungsmenge, also für die Ursache des Raumzustandes (Feldes) ist. In Analogie dazu führen wir auch bei den Magnetfeldern eine Quantitätsgröße $\vec{\mathbf{H}}$ ein, die ein Maß für die erregenden Ströme, also wiederum für die Ursache des Raumzustandes (Feldes) ist. Der formelmäßige Zusammenhang zwischen der Quantitätsgröße $\vec{\mathbf{H}}$ und dem Strom wird im folgenden Kapitel beschrieben. In der Gleichung

$$\boxed{\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\,\vec{\mathbf{H}}} \tag{5.16}$$

bezeichnen wir $\vec{\mathbf{H}}$ als **magnetische Feldstärke** (**magnetische Erregung**)[5]. Mit den bekannten Dimensionen von $\vec{\mathbf{B}}$ und μ_0 ist die Dimension der magnetischen Feldstärke ebenfalls bekannt: $[H] = \mathrm{A/m}$. Die beiden Feldvektoren haben im Vakuum die gleiche Richtung. Die Gl. (5.16) gilt auch mit sehr hoher Genauigkeit in Luft. Das Verhalten der Feldgrößen in anderen Werkstoffen wird in Kap. 5.10 detaillierter untersucht. Die Tabelle 5.1 gibt nochmals einen Überblick über die genannten Zusammenhänge.

Tabelle 5.1

Zusammenstellung der Feldgrößen

	Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Intensitätsgröße Beschreibt die Wirkung (Kraft)	$\vec{\mathbf{E}},\quad [\vec{\mathbf{E}}] = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ elektrische Feldstärke	$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\,\vec{\mathbf{H}},\quad [\vec{\mathbf{B}}] = \dfrac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$ magnetische Flussdichte
Quantitätsgröße Beschreibt die Ursache (Quelle)	$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\,\vec{\mathbf{E}},\quad [\vec{\mathbf{D}}] = \dfrac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}$ elektrische Flussdichte, elektrische Erregung	$\vec{\mathbf{H}},\quad [\vec{\mathbf{H}}] = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ magnetische Feldstärke, magnetische Erregung
Feldkonstante	$\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$ im Vakuum $\varepsilon = \varepsilon_r\,\varepsilon_0$ im Material	$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\dfrac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ im Vakuum $\mu = \mu_r\,\mu_0$ im Material

5 Aus historischen Gründen wird anders als beim elektrischen Feld nicht die die Kraft verursachende Intensitätsgröße $\vec{\mathbf{B}}$ als magnetische **Feldstärke** bezeichnet, sondern die Quantitätsgröße $\vec{\mathbf{H}}$.

5.6 Das Oersted'sche Gesetz

Legt man den unendlich langen Linienleiter in Abb. 5.3 auf die z-Achse des Zylinderkoordinatensystems, dann ist die von dem Strom I hervorgerufene magnetische Feldstärke durch die Beziehung

$$\vec{\mathbf{H}} \overset{(5.16)}{=} \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{B}} \overset{(5.13)}{=} \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{I}{2\pi\rho} \tag{5.17}$$

gegeben. Man erkennt, dass die Feldstärke in einem Abstand ρ von dem Linienleiter dem Verhältnis von dem erregenden Strom I zu dem Umfang des Kreises $2\pi\rho$ entspricht, auf dem die Feldstärke berechnet wird.

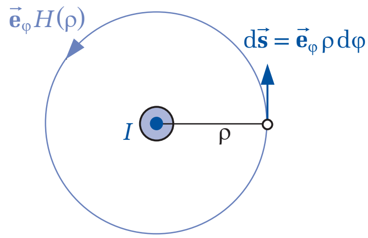


Abbildung 5.8: Zum vektoriellen Linienintegral

Multipliziert man umgekehrt den entlang des Kreises konstanten Wert der magnetischen Feldstärke mit dem Kreisumfang (▶Abb. 5.8), dann erhält man den von dem Kreis umfassten Strom. Dieser Zusammenhang kann auch als vektorielles Linienintegral geschrieben werden

$$\oint_{Kreis} \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \overset{(5.17)}{=} \int_0^{2\pi} \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{I}{2\pi\rho} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\varphi \rho\, d\varphi = \frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = I\,. \tag{5.18}$$

Man beachte, dass die Richtung des vektoriellen Wegelementes $d\vec{\mathbf{s}}$ (Integrationsrichtung) und die Stromrichtung (z-gerichteter Strom in dem Beispiel) im Sinne einer Rechtsschraube einander zugeordnet sind. Die Erfahrung zeigt nun, dass die Beziehung (5.18) verallgemeinert werden darf. Unter Beachtung der Zuordnung von Integrationsrichtung und Stromrichtung liefert das Wegintegral der magnetischen Feldstärke $\vec{\mathbf{H}}$ längs eines beliebigen geschlossenen Weges der Kontur C mit dem gerichteten Wegelement $d\vec{\mathbf{s}}$ immer den Gesamtstrom, der die von dem Integrationsweg umschlossene Fläche durchsetzt

$$\boxed{\oint_C \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = I}\,. \tag{5.19}$$

Diese Beziehung wird als **Oersted'sches Gesetz** (nach Hans Christian Oersted, 1777 – 1851) bezeichnet. Zur Veranschaulichung zeigt die ▶Abb. 5.9 nochmals den Fall mit mehreren Strömen. Mit der vorgegebenen Integrationsrichtung werden alle Ströme positiv bzw. negativ gezählt, wenn sie die Fläche A nach oben bzw. nach unten durchsetzen. Resultierend gilt das Ergebnis

$$\oint_C \vec{\mathbf{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \sum_k I_k = I_1 + I_2 - I_3 \,. \tag{5.20}$$

Schließt man die einzelnen in der Abb. 5.9 nur abschnittsweise dargestellten Stromkreise, dann greift der geschlossene Integrationsweg mit jedem geschlossenen Stromkreis wie die Glieder einer Kette ineinander. Man spricht daher bei der Gl. (5.20) davon, dass das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke mit dem die Fläche durchsetzenden Strom **verkettet** ist.

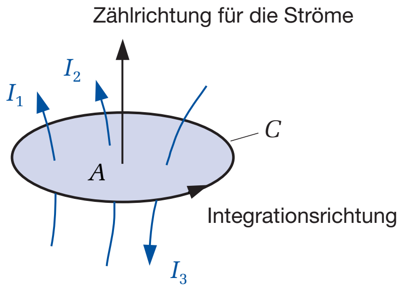


Abbildung 5.9: Zum Oersted'schen Gesetz

Da die Summe der Ströme auf der rechten Seite der Gl. (5.20) die Fläche durchflutet, bezeichnet man diesen Ausdruck als **Durchflutung** und verwendet dafür die folgende Abkürzung

$$\Theta = \sum_k I_k \qquad \to \qquad \oint_C \vec{\mathbf{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \Theta \,. \tag{5.21}$$

Während das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke beim elektrostatischen Feld nach Gl. (1.22) immer verschwindet, gilt dies beim magnetostatischen Feld nur für den Sonderfall, dass die Durchflutung verschwindet.

Das elektrostatische Feld haben wir in Kap. 1.8 als **Quellenfeld** bezeichnet. Da die magnetischen Feldlinien die Ströme umschließen, spricht man in diesem Fall von einem **Wirbelfeld**.

Im Oersted'schen Gesetz (5.19) ist keine Einschränkung hinsichtlich der räumlichen Verteilung des Stromes enthalten. Fließt der Strom insbesondere mit einer ortsabhängigen Dichte durch einen endlichen Leiterquerschnitt, dann muss der mit dem Umlaufintegral verkettete Strom nach Gl. (2.11) durch Integration der Stromdichte über die Querschnittsfläche berechnet werden

$$\boxed{\oint_C \vec{\mathbf{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \Theta = \iint_A \vec{\mathbf{J}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}} \,. \tag{5.22}$$

Diese verallgemeinerte Formulierung des Oersted'schen Gesetzes wird als **Durchflutungsgesetz** bezeichnet. Es gilt in dieser Form nur unter der bisherigen Voraussetzung zeitunabhängiger Felder. Unterschiedliche magnetische Materialeigenschaften entlang des Integrationsweges haben keinen Einfluss auf die Gültigkeit dieser Beziehung.

5.7 Die magnetische Feldstärke einfacher Leiteranordnungen

Das Oersted'sche Gesetz kann im Allgemeinen nicht zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke verwendet werden, da aus der bekannten Durchflutung nur eine Aussage über das Umlaufintegral von $\vec{\mathbf{H}}$, nicht aber über die ortsabhängige Verteilung der Feldstärke gemacht werden kann. Allerdings gibt es einige Ausnahmen, bei denen unter Ausnutzung von Symmetrieüberlegungen eine Bestimmung der magnetischen Feldstärke möglich ist. Einige Beispiele werden im folgenden Kapitel vorgestellt.

5.7.1 Unendlich langer kreisförmiger Linienleiter

Die magnetische Feldstärke $\vec{\mathbf{H}}$ eines unendlich langen Linienleiters nimmt nach Gl. (5.17) mit dem reziproken Abstand vom Leiter ab. Umgekehrt wächst die Feldstärke bei Annäherung an den Leiter im Grenzfall $\rho \to 0$ über alle Grenzen. Dieses Problem entsteht jedoch nur bei dem physikalisch nicht durchführbaren Versuch, einen endlichen Strom I durch einen unendlich dünnen Querschnitt fließen zu lassen. Um den Einfluss der endlichen Leiterabmessung zu untersuchen, betrachten wir den in ▶Abb. 5.10 dargestellten Fall eines kreisförmigen Leiters mit endlichem Radius a. Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke wird der Leiter in das zylindrische Koordinatensystem verlegt, wobei sein Mittelpunkt mit der z-Achse zusammenfallen soll.

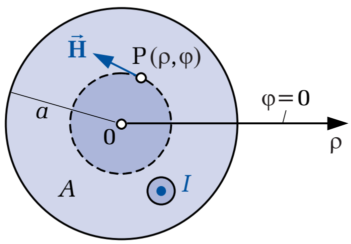


Abbildung 5.10: Magnetische Feldstärke bei kreisförmigem Drahtquerschnitt

Der z-gerichtete Gesamtstrom I sei homogen über die Querschnittsfläche $A = \pi a^2$ verteilt, so dass für die Stromdichte die Beziehung

$$\vec{\mathbf{J}} = \begin{cases} \vec{\mathbf{e}}_z\, I/\pi a^2 & \text{für} \quad \rho \le a \\ \vec{\mathbf{0}} & \phantom{\text{für}} \quad \rho > a \end{cases} \tag{5.23}$$

gilt. Die Stromrichtung ist durch die innerhalb des Leiterquerschnitts eingezeichnete Pfeilspitze markiert. Aus Symmetriegründen kann es nur eine φ-gerichtete, allein von der Koordinate ρ abhängige Feldstärke $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{e}}_\varphi H(\rho)$ geben. Wir berechnen zunächst die Feldstärkeverteilung innerhalb des Leiters. Bildet man das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke entlang des in Abb. 5.10 gestrichelt eingezeichneten Kreises vom Radius $\rho < a$, dann muss dies nach dem Oersted'schen Gesetz dem von dem Umlaufintegral eingeschlossenen Strom entsprechen. Mit Gl. (5.22) gilt die Beziehung

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_\varphi H(\rho)}_{\vec{\mathbf{H}}} \cdot \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_\varphi \rho \mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}} = 2\pi\rho H(\rho) \overset{(5.22)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_z \frac{I}{\pi a^2}}_{\vec{\mathbf{J}}} \cdot \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_z \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}} = \frac{\rho^2}{a^2} I \,, \tag{5.24}$$

aus der die magnetische Feldstärke innerhalb des Leiters unmittelbar bestimmt werden kann. Wendet man das Durchflutungsgesetz für den Bereich außerhalb des Leiters $\rho > a$ an, dann ist der gesamte Strom I mit dem Umlauf verkettet, so dass auf der rechten Seite der Gl. (5.24) der Wert I steht. Resultierend erhält man den Feldstärkeverlauf

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{I}{2\pi a} \begin{cases} \rho/a & \text{für} \quad \rho \le a \\ a/\rho & \phantom{\text{für}} \quad \rho \ge a \end{cases} . \tag{5.25}$$

Die magnetische Feldstärke steigt innerhalb des Leiters linear bis auf den Maximalwert $I/2\pi a$ an der Leiteroberfläche an und fällt außerhalb des Leiters mit dem reziproken Abstand vom Leitermittelpunkt ab. Auf der Oberfläche des Leiters $\rho = a$ ist die magnetische Feldstärke stetig, so dass hier beide Beziehungen (5.25) gültig sind. Die Ortsabhängigkeit der Feldstärke lässt sich leicht veranschaulichen, wenn man sie in den Ebenen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$, d.h. auf der positiven und der negativen x-Achse darstellt. Wegen $\vec{\mathbf{e}}_\varphi = -\vec{\mathbf{e}}_x \sin\varphi + \vec{\mathbf{e}}_y \cos\varphi = \pm\vec{\mathbf{e}}_y$, wobei das positive (negative) Vorzeichen für den Bereich $x > 0$ ($x < 0$) gilt, erhält man hier nur eine y-Komponente mit dem in ▶Abb. 5.11 dargestellten Verlauf.

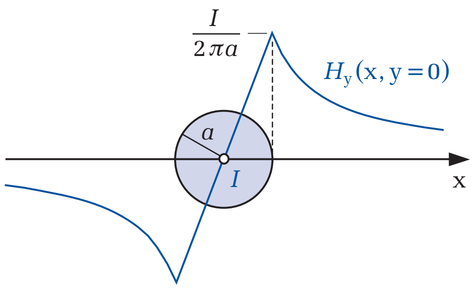


Abbildung 5.11: Magnetische Feldstärke auf der x-Achse

5.7.2 Toroidspule

Als zweites Beispiel soll das Feld in einem Ringkern berechnet werden, der gleichmäßig und dicht mit dünnem Draht bewickelt ist. Ein solches Bauelement bezeichnet man als Toroidspule. Die Feldstärke in dem Kern ist φ-gerichtet und aus Symmetriegründen von der Koordinate φ unabhängig.[6]

6 In der Realität ist der Strom nicht gleichmäßig über die Oberfläche verteilt, sondern er fließt konzentriert in den Leitern. Zwischen den Leitern verschwindet die Stromdichte. Unter der Voraussetzung einer sehr dichten gleichmäßigen Bewicklung können wir den Strom als homogen verteilten *Strombelag* auf der Oberfläche auffassen und den Einfluss der bei *mikroskopischer* Betrachtungsweise ortsabhängigen Stromverteilung auf das Ergebnis vernachlässigen.

Die Querschnittsfläche des Toroids kann kreisförmig oder auch rechteckig sein (vgl. Abb. 5.28). Innerhalb des Toroids ist die magnetische Feldstärke nur von dem Achsabstand, d.h. von der in ▶Abb. 5.12 eingetragenen Koordinate ρ abhängig, so dass wir die Berechnung in den Koordinaten des Kreiszylinders durchführen.

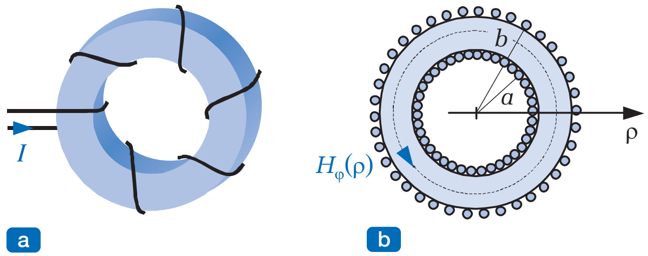


Abbildung 5.12: Toroidspule, a) prinzipieller Wickelaufbau b) Querschnitt durch dicht bewickelte Spule

Das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke innerhalb des Toroids umschließt nach Abb. 5.12b alle N Windungen. Der gewählte Umlaufsinn ist mit der Richtung des Stromes nach Abb. 5.12a bereits rechtshändig verknüpft, so dass mit der Durchflutung NI die Beziehung

$$NI = \Theta \overset{(5.21)}{=} \int_0^{2\pi} \vec{\mathbf{e}}_\varphi H_\varphi(\rho) \cdot \vec{\mathbf{e}}_\varphi \rho \, d\varphi = 2\pi\rho H_\varphi(\rho) \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{NI}{2\pi\rho} \tag{5.26}$$

für die magnetische Feldstärke innerhalb des Toroids gilt. Ist die Querschnittsfläche des Toroids klein gegenüber seinen sonstigen Abmessungen, d.h. Innen- und Außendurchmesser $2a$ und $2b$ unterscheiden sich nur unwesentlich, dann ist die magnetische Feldstärke im Inneren des Toroids praktisch konstant.

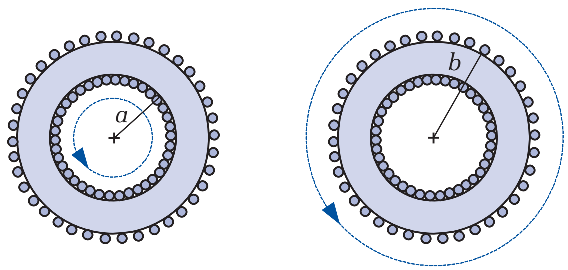


Abbildung 5.13: Zur Feldberechnung außerhalb des Toroids

Wählt man entsprechend ▶Abb. 5.13 den Integrationsweg außerhalb des Toroids, dann verschwindet die Durchflutung in allen Fällen

$$\Theta = 0 = \oint_C \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \oint_C \vec{\mathbf{e}}_\varphi H_\varphi(\rho) \cdot \vec{\mathbf{e}}_\varphi \rho \, d\varphi = 2\pi\rho H_\varphi(\rho) \, . \tag{5.27}$$

Wegen der φ-gerichteten, nur von der Koordinate ρ abhängigen Feldstärke $H_\varphi(\rho)$ verschwindet das Ergebnis auf der rechten Seite der Gleichung aber nur, wenn die Feldstärke verschwindet, d.h. der Raum außerhalb des Toroids ist feldfrei.

Bei einer genaueren Analyse stellt man allerdings fest, dass diese Aussage nur eingeschränkt gilt. Infolge der fortlaufenden Wicklung besitzen die nebeneinanderliegenden Windungen eine Steigungshöhe in Richtung der Zylinderkoordinate φ. Besonders deutlich ist diese Situation in der Abb. 5.12a zu erkennen. Bei einer einlagigen, über den gesamten Umfang verteilten Wicklung mit N Windungen nach ▶Abb. 5.14 beträgt die Steigungshöhe für jede Windung $2\pi/N$. Zur näherungsweisen Berechnung des Magnetfeldes außerhalb des Toroids kann man eine einzelne Stromschleife längs des Toroids, wie in Abb. 5.14 auf der rechten Seite dargestellt, annehmen. Das von dieser Schleife hervorgerufene unerwünschte *Streufeld* werden wir im Folgenden vernachlässigen.

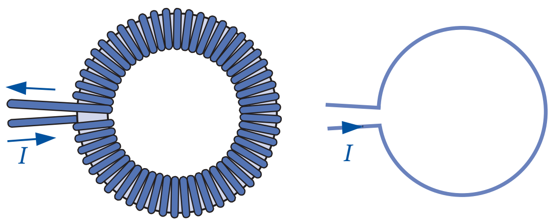


Abbildung 5.14: Einlagige Toroidspule

5.7.3 Lang gestreckte Zylinderspule

Als letztes Beispiel betrachten wir noch eine lang gestreckte Zylinderspule, die gleichmäßig und dicht mit dünnem Draht bewickelt ist. Diese üblicherweise als **Solenoid** bezeichnete Anordnung kann als Sonderfall einer Toroidspule mit unendlich großem Radius $a \to \infty$ angesehen werden.

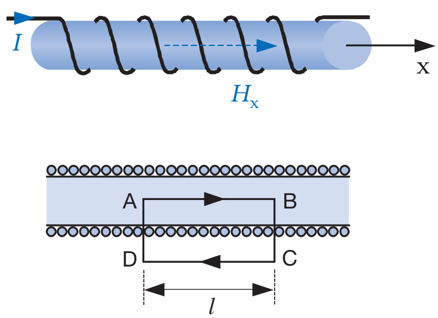


Abbildung 5.15: Lang gestreckte Zylinderspule

Zunächst sei der Fall einer in x-Richtung unendlich lang ausgedehnten Zylinderspule betrachtet. Die magnetische Feldstärke ist dann x-gerichtet und von der Koordinate x unabhängig. Da die Feldstärke außerhalb der Spule verschwindet (bzw. vernachlässigt wird), liefert das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke entlang des eingezeichneten Rechtecks nur zwischen den Punkten A und B einen nicht verschwindenden

Beitrag. Bezeichnen wir mit N die Anzahl der auf der Länge l vorhandenen Windungen, dann folgt aus dem Durchflutungsgesetz die homogene Feldstärkeverteilung

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}} \frac{N\,I}{l} \tag{5.28}$$

innerhalb der Spule. Für eine *endlich* lange Spule, bei der die Gesamtlänge noch immer sehr groß ist gegenüber dem Spulendurchmesser, erhält man den in ▶Abb. 5.16 dargestellten Feldverlauf.

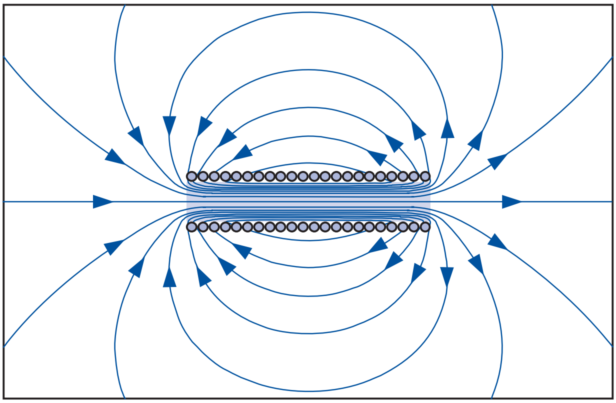


Abbildung 5.16: Lang gestreckte Zylinderspule

Im Spuleninneren ist die Feldstärke noch immer relativ homogen. An den Spulenenden tritt sie aus und schließt sich über den Außenraum. Der Betrag der Feldstärke ist im Außenraum erheblich kleiner als im Inneren der Spule. Das Feldbild der Spule ist identisch zu dem des Stabmagneten in Abb. 5.2, so dass man zu der folgenden Aussage gelangt:

Merke

Eine gleichstromdurchflossene Spule besitzt die gleichen magnetischen Eigenschaften wie ein Stabmagnet.

Diese Tatsache hat schon sehr früh Anlass zu der Vermutung gegeben, dass alle magnetischen Erscheinungen auf bewegte Ladungen zurückzuführen sind. Das Verhalten der Magnete lässt sich durch Kreisströme in den Atomen erklären. Die Elektronen umkreisen den Kern und besitzen zusätzlich eine Eigendrehung (Spin). Die gleich gerichtete Ausrichtung der Atome führt zu einer gleichsinnigen Überlagerung dieser Effekte und zu dem nach außen wirksamen Verhalten.

Die ▶Abb. 5.17 zeigt die beiden Situationen, in denen sich gleichnamige bzw. ungleichnamige Pole von Stabmagneten gegenüberstehen. Da die Feldlinien definitionsgemäß am Nordpol austreten und am Südpol wieder in den Magneten eintreten, müssen die im Inneren anzunehmenden Ströme die in der Abbildung dargestellten

Richtungen aufweisen. Man erkennt, dass die Ströme im Fall der beiden sich gegenüberstehenden ungleichnamigen Pole die gleiche Orientierung haben. Da sich nach den Aussagen in Kap. 5.4 gleich gerichtete Ströme anziehen, entgegengesetzt gerichtete Ströme aber abstoßen, lassen sich die beiden dargestellten Situationen durch die Annahme der atomaren Ströme unmittelbar erklären.

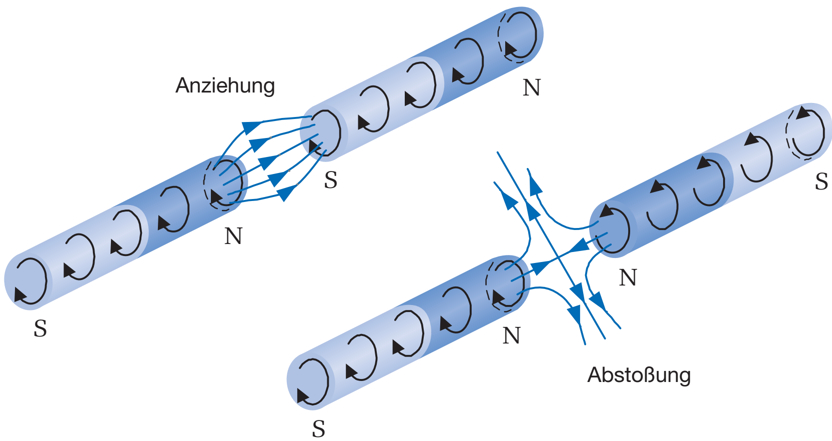


Abbildung 5.17: Kraftwirkungen zwischen Stabmagneten

5.8 Die magnetische Spannung

In Analogie zur elektrischen Spannung (1.30) wird die magnetische Spannung V_m der Dimension A zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 als das Linienintegral der magnetischen Feldstärke definiert

$$V_{m12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \,. \tag{5.29}$$

Während das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke über einen geschlossenen Weg nach Gl. (1.22) verschwindet und damit die Summe aller Spannungen in einer Masche nach Gl. (3.4) ebenfalls Null wird, verschwindet das Umlaufintegral der magnetischen Spannung über eine geschlossene Kurve (man spricht von der magnetischen Umlaufspannung) nur dann, wenn der mit der eingeschlossenen Fläche verkettete Strom nach Gl. (5.22) ebenfalls verschwindet. Im anderen Fall erhält man aus dem Ringintegral die Durchflutung.

Für den Sonderfall, dass jedes Umlaufintegral in einem bestimmten Gebiet verschwindet, also kein resultierender Gesamtstrom mit einem Umlauf verkettet ist, folgt analog zum elektrostatischen Fall, dass die magnetische Spannung V_{m12} zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 unabhängig vom Integrationsweg immer den gleichen Wert annimmt. Damit kann wiederum jedem Punkt eindeutig ein skalarer Wert zugeordnet werden, der als **magnetisches Skalarpotential** bezeichnet wird. Der Bezugspunkt ist wieder beliebig.

5.9 Der magnetische Fluss

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir gesehen, dass aus der Kenntnis der magnetischen Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ Kräfte auf stromdurchflossene Leiter berechnet werden können. Es gibt aber noch weitere beobachtbare Wirkungen im Magnetfeld (vgl. Kap. 6), bei denen es z.B. darauf ankommt, wie viel Flussdichte die von einer Windung eingeschlossene Fläche durchsetzt.

In Analogie zur Elektrostatik bezeichnet man das Integral der Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ über eine Fläche A mit dem gerichteten Flächenelement $\vec{\mathbf{n}}\mathrm{d}A = \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$ nach ▶Abb. 5.18 als den **magnetischen Fluss** Φ der Dimension Vs, der die Fläche A in Richtung der Flächennormalen $\vec{\mathbf{n}}$ durchsetzt

$$\Phi = \iint_A \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \ . \tag{5.30}$$

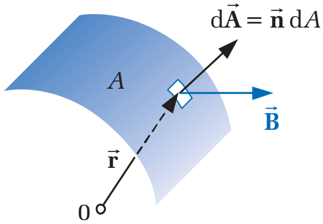


Abbildung 5.18: Magnetischer Fluss Φ durch die Fläche A

Das Integral der elektrischen Flussdichte über eine geschlossene Hüllfläche gibt die innerhalb des Volumens eingeschlossene Ladung an. Da es erfahrungsgemäß keine magnetischen Einzelladungen gibt, verschwindet das über eine geschlossene Hüllfläche berechnete Integral der magnetischen Flussdichte

$$\oint\!\!\!\oint_A \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = 0 \ . \tag{5.31}$$

5.10 Die magnetische Polarisation

In Kap. 1.14 haben wir die Wirkung eines elektrostatischen Feldes auf nichtleitende Materie untersucht und festgestellt, dass die auf die einzelnen Ladungen wirkenden Coulomb'schen Kräfte zur Ausbildung von elektrischen Dipolen, d.h. zu einer Polarisation des dielektrischen Materials führen. Wir haben unterschieden zwischen der Elektronenpolarisation, die nur als Folge eines externen elektrischen Feldes auftritt und der Orientierungspolarisation, bei der die Moleküle bereits polarisiert sind, ihre statistische Verteilung infolge der Wärmebewegung aber keine nach außen feststellbare Wirkung hervorruft. Erst durch ein externes elektrisches Feld erfahren die Dipole ein Drehmoment und ihre mehrheitliche Orientierung in Richtung des Feldes führt auch makroskopisch gesehen zu einer messbaren Polarisation.

Betrachten wir nun die Situation im magnetostatischen Feld. In den Kapiteln 5.2 und 5.3 haben wir die Kraft auf stromdurchflossene Leiter bzw. auf bewegte Ladungen untersucht. Nach dem in Abb. 1.1 dargestellten vereinfachten Atommodell bewegen sich die Elektronen auf Kreisbahnen um den Kern. Diese Ladungsträgerbewegungen im atomaren Bereich können als elementare Stromschleifchen (Ampère'sche Kreisströme) aufgefasst werden. Zusätzlich besitzen die Elektronen eine als Spin bezeichnete Eigendrehung, die zu einem ähnlichen Verhalten führt wie die Bewegung auf der Umlaufbahn. Die Stromschleifchen erzeugen ein eigenes Magnetfeld und sie erfahren in einem externen magnetischen Feld Kräfte bzw. Drehmomente. Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass die hier zugrunde gelegten Modelle nur eine grobe Vorstellung von dem Verhalten der Materie geben können, ein tiefer gehendes Verständnis ist nur im Rahmen der Quantenmechanik möglich.

An dieser Stelle führen wir zunächst den Begriff des **magnetischen Dipols** ein. Darunter versteht man eine kleine vom Strom I durchflossene Schleife, die eine ebene Fläche A umschließt (▶Abb. 5.19).

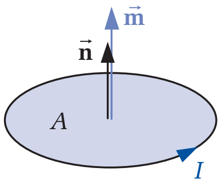


Abbildung 5.19: Magnetischer Dipol

Das Produkt aus Strom I und vektorieller Fläche $\vec{\mathbf{A}}$ heißt **magnetisches Moment**

$$\vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{n}}\, I\, A = I\, \vec{\mathbf{A}}\ . \tag{5.32}$$

Die Flächennormale $\vec{\mathbf{n}}$ und der Umlaufsinn des Stromes sind rechtshändig miteinander verknüpft. In vielen Fällen wird die Größe

$$\vec{\mathbf{j}} = \mu_0 \vec{\mathbf{m}} = \mu_0 I\, \vec{\mathbf{A}} \tag{5.33}$$

verwendet, die als **magnetisches Dipolmoment** bezeichnet wird. Befinden sich N magnetische Dipole in einem Volumen V, dann bezeichnet man die auf das Volumen bezogene vektorielle Summe der Momente als **Magnetisierung** $\vec{\mathbf{M}}$

$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{1}{V}\sum_{n=1}^{N} \vec{\mathbf{m}}_n \tag{5.34}$$

und in Analogie zur Elektrostatik heißt

$$\vec{\mathbf{J}} = \frac{1}{V}\sum_{n=1}^{N} \vec{\mathbf{j}}_n = \mu_0\, \vec{\mathbf{M}} \tag{5.35}$$

magnetische Polarisation[7].

7 **Vorsicht:** Die magnetische Polarisation $\vec{\mathbf{J}}$ der Dimension Vs/m^2 darf nicht mit der Stromdichte $\vec{\mathbf{J}}$ der Dimension A/m^2 verwechselt werden.

In den Atomen tragen sowohl die Eigendrehung der Elektronen als auch ihre Bewegung auf der Umlaufbahn zu dem magnetischen Dipolmoment bei. Ein zusätzlicher Beitrag der Nukleonen ist im Allgemeinen zu vernachlässigen. Unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes werden sich die Dipole nach Möglichkeit so ausrichten, dass sie keine weitere Krafteinwirkung mehr erfahren. Nach Beispiel 5.1 tritt dieser Fall ein, wenn die Richtung des Dipols mit der Feldrichtung übereinstimmt.

Analog zur Gl. (1.65) in der Elektrostatik kann das makroskopisch betrachtete magnetische Verhalten des jeweiligen Materials durch eine Erweiterung der Beziehung (5.16) formelmäßig erfasst werden

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_r \, \mu_0 \, \vec{\mathbf{H}} = \mu \, \vec{\mathbf{H}} \qquad \text{mit} \qquad \mu = \mu_r \, \mu_0 = \text{Permeabilität.} \tag{5.36}$$

Die Wirkung der im Einzelnen nicht zugänglichen molekularen Ströme wird so auf einfache Weise durch eine Materialkonstante μ_r beschrieben.

Bei gleicher magnetischer Feldstärke $\vec{\mathbf{H}}$ wird sich die Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ umso stärker ändern, je mehr Dipole sich gleichsinnig orientieren. Der als **Permeabilitätszahl** bezeichnete reine Zahlenfaktor μ_r beschreibt das Verhältnis der magnetischen Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ im Material zu der Flussdichte im Vakuum bei gleicher magnetischer Feldstärke $\vec{\mathbf{H}}$. In Luft gilt mit sehr hoher Genauigkeit $\mu_r = 1$. In der folgenden Tabelle ist die Permeabilitätszahl für verschiedene Materialien angegeben.

Tabelle 5.2

Permeabilitätszahl μ_r für verschiedene Materialien nach [16]

Diamagnetische Stoffe	μ_r	
Aluminiumoxid	0,999 986 4	
Kupfer	0,999 990 4	
Wasser	0,999 990 97	
Paramagnetische Stoffe	μ_r	
Aluminium	1,000 020 8	
Eisen 800°C	1,149	
Eisen 1200°C	1,002 59	
Sauerstoff	1,000 001 86	
Ferromagnetische Stoffe	Anfangswert $\mu_{r\,a}$ $(H = 0)$	Maximalwert $\mu_{r\,\max}$
Baustahl	100	800 – 2 000
Permalloy 78,5 Ni, 3 Mo	6 000	70 000

Der Zusammenhang zwischen den beiden Feldvektoren $\vec{\mathbf{B}}$ und $\vec{\mathbf{H}}$ kann formelmäßig auch auf andere Weise erfasst werden. Ausgehend von der mikroskopischen Betrachtungsweise kann man sich die magnetische Flussdichte im Material nach Gl. (5.36) zusammengesetzt denken aus der Flussdichte $\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}}$, die bereits im Vakuum vorliegt, und dem zusätzlich durch die Polarisation der elementaren Stromschleifen im Werkstoff verursachten Anteil $\vec{\mathbf{J}}$

$$\vec{\mathbf{B}} \overset{(5.36)}{=} \mu\vec{\mathbf{H}} = \mu_0\vec{\mathbf{H}} + (\mu - \mu_0)\,\vec{\mathbf{H}} = \mu_0\vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{J}}\,. \tag{5.37}$$

Die Auflösung der Gl. (5.37) nach $\vec{\mathbf{J}}$ liefert

$$\vec{\mathbf{J}} = (\mu - \mu_0)\,\vec{\mathbf{H}} = \mu_0(\mu_r - 1)\,\vec{\mathbf{H}} = \mu_0\,\chi\,\vec{\mathbf{H}}\,. \tag{5.38}$$

Die Differenz χ zwischen der Permeabilitätszahl $\mu_r = \mu/\mu_0$ der Materie und dem Wert 1 des Vakuums wird **magnetische Suszeptibilität** genannt. Die beiden Gleichungen (5.37) und (5.38) entsprechen in ihrem Aufbau völlig den Beziehungen (1.66) und (1.67).

Da in der Technik oft die Magnetisierung $\vec{\mathbf{M}}$ anstelle der Polarisation $\vec{\mathbf{J}}$ verwendet wird, sollen die entsprechenden Gleichungen auch für die Magnetisierung angegeben werden. Durch Einsetzen der Gl. (5.35) in die Gl. (5.37) folgt unmittelbar

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\left(\vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}}\right) \quad \text{und} \quad \vec{\mathbf{M}} = \chi\,\vec{\mathbf{H}}\,. \tag{5.39}$$

Merke

- Die magnetische Polarisation $\vec{\mathbf{J}}$ beschreibt den Zuwachs der magnetischen Flussdichte im Material gegenüber Vakuum $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{B}} - \mu_0\vec{\mathbf{H}}$ bei gleicher magnetischer Feldstärke.
- Die Magnetisierung $\vec{\mathbf{M}}$ beschreibt die Abnahme der magnetischen Feldstärke im Material gegenüber Vakuum

$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{H}}$$

  bei gleicher Flussdichte.

Ähnlich wie bei der elektrischen Polarisation gibt es auch im magnetischen Feld mehrere Mechanismen, die zu einer Polarisation führen. Entsprechend der unterschiedlichen Auswirkungen auf das Materialverhalten werden die Werkstoffe in verschiedene Gruppen eingeteilt:

- Materialien mit $\mu_r < 1$, die das B-Feld geringfügig schwächen, bezeichnet man als **diamagnetisch**.
- Materialien mit $\mu_r > 1$, die das B-Feld geringfügig stärken, nennt man **paramagnetisch**.
- Im Gegensatz zu den beiden erstgenannten Gruppen gibt es Stoffe, insbesondere Eisen, Nickel und Kobalt, bei denen die Permeabilitätszahl sehr stark von 1 abweicht. Solche Materialien mit $\mu_r >> 1$ heißen **ferromagnetisch**.

5.10.1 Diamagnetismus

Das unterschiedliche magnetische Verhalten der Werkstoffe in einem äußeren Magnetfeld hängt wesentlich von den atomaren magnetischen Dipolen ab. Stoffe, bei denen Dipolmomente nur infolge eines äußeren Magnetfeldes entstehen, werden als diamagnetisch bezeichnet. Bei diesen Stoffen kompensieren sich Spinmomente und Bahnmomente der Elektronen in einem Atom ohne äußeres Feld vollständig. Nach außen hin ist kein resultierendes magnetisches Moment erkennbar. Durch die Einwirkung eines äußeren Feldes wird die Elektronenbewegung beeinflusst. Infolge ihrer Drehbewegungen reagieren diese ähnlich einem Kreisel, auf den eine Kraft ausgeübt wird, mit einer Präzessionsbewegung. Das dadurch entstehende Moment ist nach der Lenz'schen Regel (nach H. F. E. Lenz, 1804 – 1865) dem verursachenden äußeren Feld entgegengerichtet, das Feld wird geschwächt. Bringt man einen diamagnetischen Körper in ein sehr starkes inhomogenes Magnetfeld, dann wird der Körper aus dem Feld herausgedrängt, d.h. im Gegensatz zum elektrostatischen Fall, bei dem ausschließlich Anziehungskräfte auf Dielektrika entstehen, können bei der magnetischen Polarisation auch Abstoßungskräfte auftreten.

Wegen der Feldschwächung bei den diamagnetischen Stoffen gilt $\mu_r < 1$ und die magnetische Suszeptibilität ist negativ. Für den Diamagnetismus gelten ähnliche Aussagen wie für die Elektronenpolarisation. Beide Effekte sind genau dann vorhanden, wenn sich die Atome in einem äußeren Magnetfeld bzw. in einem äußeren elektrischen Feld befinden. Diese Materialeigenschaft wird nicht von den thermischen Bewegungen der Atome beeinflusst, d.h. μ_r ist von der Temperatur unabhängig.

5.10.2 Paramagnetismus

Ein zur Orientierungspolarisation im elektrostatischen Feld ähnliches Verhalten zeigen die paramagnetischen Stoffe. Bei diesen Stoffen kompensieren sich Spinmomente und Bahnmomente in einem Atom auch bei nicht vorhandenem äußerem Feld nicht vollständig, d.h. ein einzelnes Atom verhält sich bereits wie ein magnetischer Dipol. Dieser Fall tritt bei Atomen mit einer ungeraden Anzahl von Elektronen auf. Wegen der zufälligen Verteilung der einzelnen Momente innerhalb eines Materials ist keine Gesamtwirkung nach außen feststellbar. Erst unter dem Einfluss eines äußeren Feldes werden die atomaren Dipole im statistischen Mittel in Richtung des Feldes ausgerichtet, wodurch das Magnetfeld verstärkt wird. Die in diesem Fall ebenfalls auftretenden diamagnetischen Effekte sind jedoch gegenüber den paramagnetischen Effekten zu vernachlässigen. Da die thermischen Bewegungen die Dipolausrichtung behindern, wird der paramagnetische Effekt nur bei entsprechend großen äußeren Magnetfeldern oder bei entsprechend niedriger Temperatur spürbar. Mit den technisch realisierbaren Magnetfeldstärken gelingt es nicht, alle Dipole entgegen der Wärmebewegung in Feldrichtung auszurichten, d.h. eine Sättigung wie bei den ferromagnetischen Stoffen tritt nicht auf. Wegen der Feldverstärkung gilt $\mu_r > 1$. Die magnetische Suszeptibilität ist bei den paramagnetischen Stoffen positiv und proportional zum Kehrwert der Temperatur $\chi \sim 1/T$. Wird das äußere Feld entfernt, dann gehen die Dipole infolge der thermischen Bewegungen wieder in den ungeordneten Zustand über.

Sowohl bei den diamagnetischen als auch bei den paramagnetischen Stoffen ist die Abweichung der Permeabilitätszahl von dem Wert 1 nur sehr gering. Daher werden diese Stoffe häufig als nicht magnetisch bezeichnet.

5.10.3 Ferromagnetismus

Auch bei dem für die technischen Anwendungen wichtigen Fall des Ferromagnetismus kompensieren sich die Beiträge von Spinmoment und Bahnmoment nicht vollständig. Im Unterschied zu den paramagnetischen Stoffen gibt es jedoch größere Bereiche (Größenordnungen im µm-Bereich), in denen die Dipole bereits parallel zueinander ausgerichtet sind (▶Abb. 5.20a). Diese so genannten **Weiß'schen Bezirke** (nach P. E. Weiß, 1865 – 1940) sind jedoch wiederum statistisch verteilt, so dass ohne ein äußeres Magnetfeld noch kein resultierendes Dipolmoment nach außen erkennbar ist. Die Übergangsbereiche zwischen den Weiß'schen Bezirken sind dünne Schichten, so genannte **Blochwände**, in denen sich die Orientierung der Dipole kontinuierlich von der Orientierung des einen Bereichs bis zur Orientierung des benachbarten Bereichs ändert.

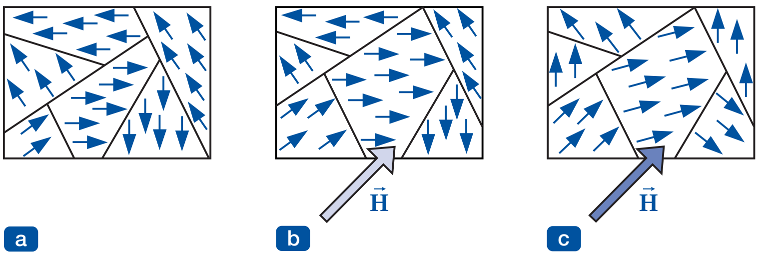


Abbildung 5.20: Weiß'sche Bezirke: a) ohne äußeres Magnetfeld, b) schwaches äußeres Magnetfeld, c) starkes äußeres Magnetfeld

Wird dieses Material in ein äußeres Magnetfeld gebracht, dessen Wert sich langsam von Null erhöht, dann dehnen sich die Weiß'schen Bezirke, deren Dipole näherungsweise in Richtung des äußeren Feldes zeigen, auf Kosten der anderen Bezirke aus (Abb. 5.20b). Dieser als Blochwandverschiebung bezeichnete Vorgang ist reversibel, d.h. der Zustand verschwindet, wenn das äußere Feld verschwindet. Zum leichteren Verständnis betrachten wir gleichzeitig die **Hysteresekurve** in ▶Abb. 5.21. In dieser Kurve ist die Flussdichte als Funktion der Feldstärke aufgetragen. Beim ersten Anlegen eines Feldes bewegt man sich ausgehend vom unmagnetischen Zustand ($H = 0$, $B = 0$) entlang der so genannten **Neukurve**. Der soeben beschriebene Vorgang befindet sich zwischen den Punkten 0 und 1 auf der Neukurve.

Bei weiter ansteigender äußerer Feldstärke erfolgen sprungartige Blochwandverschiebungen. Die einzelnen Bezirke klappen ihre Magnetisierungsrichtung derart um, dass die Dipole näherungsweise in Richtung des äußeren Feldes zeigen (Abb. 5.20c). Dieser

Vorgang ist irreversibel. Bei verschwindendem äußerem Feld behalten diese Bezirke zum Teil ihre neue Magnetisierungsrichtung bei. Dieser Vorgang spielt sich zwischen den Punkten 1 und 2 der Neukurve ab (steiler Kurvenverlauf). In der Praxis stellen die nummerierten Punkte auf der Hysteresekurve keine scharfe Abgrenzung zwischen den einzelnen Abschnitten dar, die Übergänge sind vielmehr fließend.

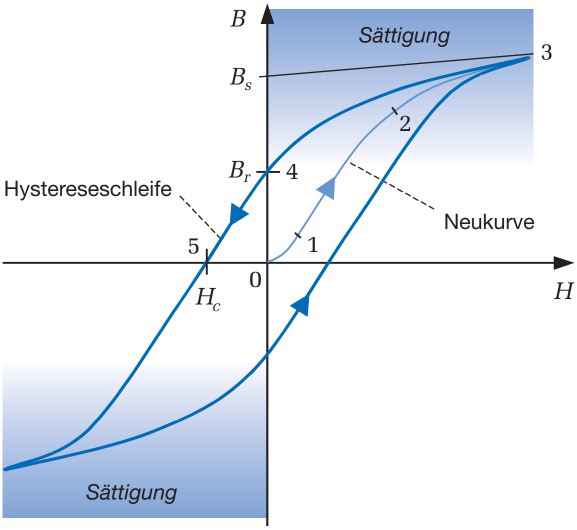


Abbildung 5.21: Magnetisierungskurve eines ferromagnetischen Materials

Wird die Feldstärke noch weiter erhöht, dann sind alle Bezirke umgeklappt und können nur noch möglichst genau in Feldrichtung gedreht werden. In dem Bereich zwischen den Punkten 2 und 3 geht die Magnetisierung in **Sättigung**. Bei Abnahme der äußeren Feldstärke ist diese Drehung wieder reversibel. Auch in dem Sättigungsbereich steigt die Flussdichte mit zunehmender magnetischer Feldstärke weiter an, allerdings spielt das Material dann keine Rolle mehr und die verbleibende geringe Steigung $\Delta B/\Delta H$ ist lediglich durch die Permeabilität des Vakuums μ_0 gegeben.

Bei einer anschließenden Reduzierung der äußeren Feldstärke auf den Wert Null wird der Kurvenbereich 3 – 4 durchlaufen. Interessanterweise reduziert sich die Flussdichte nicht ebenfalls auf den Wert Null, sondern es bleibt eine als **Remanenz** bezeichnete Restmagnetisierung B_r erhalten. Die Mehrheit der umgeklappten Bereiche bleibt noch in die gleiche Richtung orientiert. Erst mit einer Gegenfeldstärke von außen wird infolge der Umklappvorgänge in die Gegenrichtung die Remanenzinduktion nach und nach abgebaut. Bei der Gegenfeldstärke H_c (**Koerzitivfeldstärke**) heben sich die Orientierungen im Mittel wieder auf (Punkt 5). Bei weiter steigender Gegenfeldstärke bildet sich eine mehrheitliche Ausrichtung der Dipole in der neuen Feldrichtung aus. Dieser Vorgang führt bei den von außen angelegten wechselnden Magnetfeldern zu der in Abb. 5.21 dargestellten Hysteresekurve.

Materialien mit einer großen Koerzitivfeldstärke H_c, bei denen eine vollständige Entmagnetisierung nur mit einer entsprechend großen Gegenfeldstärke möglich ist, werden als magnetisch hart, Materialien mit einem kleinen Wert H_c als magnetisch weich bezeichnet.

Aus der Hystereseschleife ist zu erkennen, dass der Zusammenhang zwischen $\vec{\mathbf{B}}$ und $\vec{\mathbf{H}}$ bei den ferromagnetischen Stoffen nichtlinear ist. Die Permeabilität in der Beziehung (5.36) ist einerseits von dem verwendeten Material, andererseits von der äußeren Feldstärke, aber auch von der Temperatur und sogar von der Vorgeschichte abhängig. Das erkennt man daran, dass zu einem Feldstärkewert unterschiedliche Flussdichten gehören, je nachdem, ob man sich von höheren oder niedrigeren Feldstärkewerten dem augenblicklichen Zustand genähert hat. Die lineare Beziehung (5.36) kann daher nur als eine grobe Näherung angesehen werden, die aber umso genauer gilt, je enger die materialabhängige Hystereseschleife oder je kleiner die Aussteuerung, d.h. die Differenz zwischen Maximal- und Minimalwert der auftretenden magnetischen Feldstärke ist[8].

Zur quantitativen Beschreibung der Sättigung verwendet man die Sättigungsinduktion B_s. Diese erhält man als Schnittpunkt der Ordinate $H = 0$ mit der im Bereich der Sättigung an die Hystereseschleife gezeichneten Tangente. Die maximal im Material erreichbare Flussdichte kann nicht größer werden als die Summe aus der Flussdichte im Vakuum $\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}}$ und der Sättigungsinduktion B_s. Genauso wie die Permeabilitätszahl ist auch die Sättigungsinduktion stark von der Temperatur abhängig.

Oberhalb einer bestimmten materialabhängigen Temperatur verlieren die Stoffe ihre ferromagnetischen Eigenschaften. Die Ursache liegt in den starken thermischen Bewegungen der einzelnen Atome, die dazu führt, dass die gemeinsame Orientierung in eine Richtung wieder verloren geht. Die Temperatur, bei der dieser Übergang stattfindet, wird **Curie-Temperatur** genannt (nach Marie Curie, 1867 – 1934) und liegt bei Eisen etwa bei 770°C.

5.10.4 Dauermagnete

Vor diesem Hintergrund lassen sich auch die Eigenschaften der **Dauermagnete** leicht verstehen. Hierbei handelt es sich z.B. um magnetisiertes Eisen, das sich noch im Remanenzzustand (Punkt 4 in Abb. 5.21) befindet. Der vorausgegangene Magnetisierungsvorgang kann entweder durch die Magnetfelder von Spulen oder durch das Bestreichen mit einem anderen Magneten erfolgt sein. Am besten geeignet für Dauermagnete sind Materialien mit einer möglichst hohen Remanenz (Stärke des Magneten) und einer hohen Koerzitivfeldstärke H_c (Dauerhaftigkeit des Magnetisierungszustandes), da diese nicht so leicht entmagnetisiert werden können.

---

8 Bei der Berechnung der magnetischen Feldstärke einer Anordnung, die aus mehreren Einzelleitern besteht, werden die Beiträge der einzelnen Leiter an jedem Ort des Raumes vektoriell, d.h. nach Größe und Richtung, addiert. Diese Vorgehensweise ist nicht mehr zulässig, wenn der Zusammenhang zwischen Feldstärke und Flussdichte wie z.B. bei ferromagnetischen Stoffen nichtlinear ist.

An dieser Stelle kehren wir noch einmal zur Analogie bei den Feldverläufen von einem Stabmagneten nach Abb. 5.2 und einer Zylinderspule nach Abb. 5.16 zurück. Aus dem gleichen Feldverlauf im Außenbereich der beiden Komponenten haben wir in Abb. 5.17 die Anziehung bzw. Abstoßung zwischen den Magnetpolen durch die Kräfte zwischen den gleichsinnig oder gegensinnig fließenden Strömen in den Windungen *auf der Oberfläche* der Zylinderspule erklärt. Wie aber ist es zu verstehen, dass sich ein massiver Stabmagnet genauso verhält wie eine Anordnung, bei der die Ströme ausschließlich auf der Oberfläche fließen? Betrachten wir dazu die ▶Abb. 5.22. Da sich das Eisen noch im Remanenzzustand befindet, können wir die Dipole zur Vereinfachung als gleichsinnig orientiert ansehen. Natürlich ist die Situation im mikroskopischen Bereich, ähnlich wie bei der elektrischen Polarisation, äußerst kompliziert. Die atomaren Kreisströme sind von Punkt zu Punkt sehr unterschiedlich, d.h. die in Gl. (5.34) definierte Magnetisierung gilt nicht für einen beliebigen Punkt innerhalb des Materials, sondern lediglich als Mittelwert über einen Bereich, dessen Ausdehnung wesentlich größer als die Abmessungen der Atome sein muss.

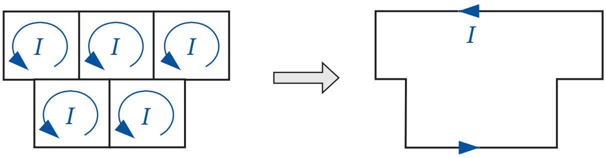


Abbildung 5.22: Homogene Verteilung magnetischer Dipole

Vom Standpunkt einer makroskopischen Betrachtungsweise aus können wir aber das mittlere magnetische Dipolmoment über eine hinreichend große Anzahl von Atomen durch eine kleine Stromschleife beschreiben, die wir zum leichteren Verständnis quadratisch darstellen. Die Orientierung der Dipolmomente ist in der Abb. 5.22 senkrecht zur Zeichenebene angenommen. Unter der Voraussetzung einer homogenen Magnetisierung werden alle elementaren Stromschleifen vom gleichen Strom I durchflossen. An den Stoßstellen jeweils zweier benachbarter Schleifen sind die Ströme immer entgegengesetzt gerichtet, d.h. ihre Wirkungen heben sich innerhalb des Materials gegenseitig auf. Lediglich auf der äußeren Berandung gibt es keine gegensinnig gerichteten Ströme, so dass die auf der linken Seite der Abb. 5.22 dargestellten elementaren Stromschleifen in ihrer Wirkung durch die Gesamtschleife auf der rechten Seite der Abbildung ersetzt werden können (vgl. dazu auch Abb. 1.27). Einen Beitrag zum Magnetfeld erhält man somit nur von dem resultierenden Strom auf der äußeren Berandung der Anordnung. Damit wird auch deutlich, warum sich der zylinderförmige, in Richtung der Achse magnetisierte Stabmagnet genauso verhält wie die Zylinderspule.

5.11 Das Verhalten der Feldgrößen an Grenzflächen

In diesem Abschnitt werden wir das Verhalten der beiden Feldgrößen $\vec{\mathbf{B}}$ und $\vec{\mathbf{H}}$ an den Sprungstellen der Materialeigenschaften etwas genauer untersuchen.

Dazu betrachten wir die Oberfläche A des in der ▶Abb. 5.23 dargestellten quaderförmigen Körpers, der aus einem Material der Permeabilität μ_1 besteht und sich im umgebenden Raum der Permeabilität μ_2 befindet. Die Feldgrößen in den beiden Bereichen werden durch die gleichen Indizes gekennzeichnet wie die Permeabilitäten.

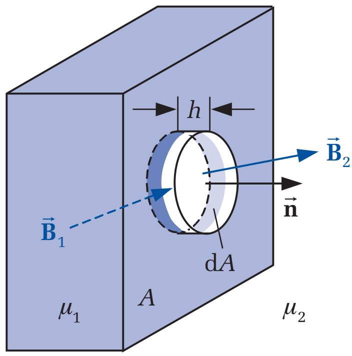


Abbildung 5.23: Grenzfläche mit Sprung der Permeabilität

Im ersten Schritt wollen wir das Verhalten der Normalkomponenten (Index n) untersuchen. Zu diesem Zweck legen wir um die Trennfläche zwischen den beiden Materialien einen kleinen Flachzylinder der verschwindenden Höhe $h \to 0$. Da das Hüllflächenintegral der Flussdichte nach Gl. (5.31) verschwindet und der Zylindermantel wegen $h \to 0$ keinen Beitrag liefert, muss der Fluss durch das elementare Flächenelement dA auf beiden Seiten der Trennfläche gleich sein

$$B_{n1}\mathrm{d}A = B_{n2}\mathrm{d}A \quad \to \quad \boxed{B_{n1} = B_{n2}}\,. \tag{5.40}$$

Die Stetigkeit der Normalkomponente der Flussdichte erfordert aber wegen der auf beiden Seiten unterschiedlichen Permeabilität einen Sprung in der Normalkomponente der magnetischen Feldstärke

$$B_{n1} = \mu_1 H_{n1} = B_{n2} = \mu_2 H_{n2} \quad \to \quad \boxed{\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}}\,. \tag{5.41}$$

Im zweiten Schritt soll das Verhalten der Tangentialkomponenten (Index t) untersucht werden. Zu diesem Zweck betrachten wir das in ▶Abb. 5.24 um die Trennfläche gelegte Rechteck mit der elementaren Seitenlänge ds und der wiederum verschwindenden Abmessung $h \to 0$. Da mit dem Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke entlang dieses Rechtecks kein Strom verkettet ist, muss es nach Gl. (5.22) verschwinden. Wegen $h \to 0$ liefern nur die Seiten ds einen Beitrag, so dass die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke auf beiden Seiten der Trennfläche den gleichen Wert aufweist

$$H_{t1}\,\mathrm{d}s - H_{t2}\,\mathrm{d}s = 0 \quad \to \quad \boxed{H_{t1} = H_{t2}}\,. \tag{5.42}$$

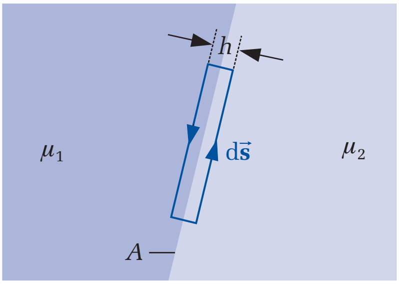


Abbildung 5.24: Grenzfläche mit Sprung der Permeabilität

Die Stetigkeit der Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke erfordert aber wegen der auf beiden Seiten unterschiedlichen Permeabilität einen Sprung in der Tangentialkomponente der Flussdichte

$$H_{t1} = \frac{1}{\mu_1} B_{t1} = H_{t2} = \frac{1}{\mu_2} B_{t2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}} \,. \tag{5.43}$$

Zusammengefasst gilt die Aussage:

Merke

Bei einer sprunghaften Änderung der Permeabilität auf einer Fläche der Normalen $\vec{\mathbf{n}}$ sind die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte B_n und die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke H_t stetig. Die Forderungen für die beiden anderen Komponenten B_t und H_n ergeben sich aus den Beziehungen $\vec{\mathbf{B}}_1 = \mu_1 \vec{\mathbf{H}}_1$ und $\vec{\mathbf{B}}_2 = \mu_2 \vec{\mathbf{H}}_2$.

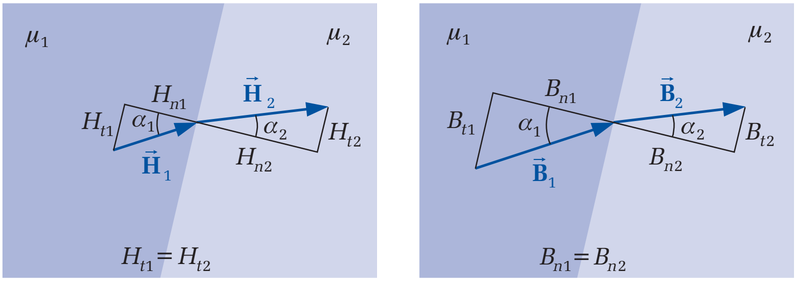


Abbildung 5.25: Zum Brechungsgesetz

Diese Zusammenhänge sind in ▶Abb. 5.25 nochmals dargestellt. Aus den Beziehungen

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{H_{t1}}{H_{n1}} \frac{H_{n2}}{H_{t2}} \overset{(5.42)}{=} \frac{H_{n2}}{H_{n1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{B_{t1}}{B_{n1}} \frac{B_{n2}}{B_{t2}} \overset{(5.40)}{=} \frac{B_{t1}}{B_{t2}} \tag{5.44}$$

folgt für beide Feldvektoren das gleiche Brechungsgesetz

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{H_{n2}}{H_{n1}} = \frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\,. \tag{5.45}$$

Wir betrachten noch den Sonderfall, dass einer der Teilräume aus ferromagnetischem, d.h. hochpermeablem Material besteht. Lässt man die Permeabilität des Teilraumes 1 gegen unendlich gehen $\mu_1 \to \infty$, dann bleibt die Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}_1$ endlich und die Feldstärke muss wegen Gl. (5.36) im hochpermeablen Material verschwinden. Weiterhin folgt aus Gl. (5.42) unmittelbar, dass $H_{t2} = 0$ und mit Gl. (5.36) auch $B_{t2} = 0$ gelten muss. Die Tangentialkomponenten von Flussdichte und Feldstärke verschwinden auf der Oberfläche des hochpermeablen Raumes. Wir haben hier ein ähnliches Verhalten wie bei der elektrischen Feldstärke an leitenden Oberflächen.

Merke

Magnetische Feldstärke und Flussdichte stehen senkrecht auf der Oberfläche eines hochpermeablen Körpers. Innerhalb desselben gilt $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{0}}$.

5.12 Die Analogie zwischen elektrischem und magnetischem Kreis

Wir haben bereits gesehen, dass es viele Größen beim elektrischen und beim magnetischen Feld gibt, die einander entsprechen. In diesem Kapitel wollen wir den zum elektrischen Stromkreis analogen magnetischen Kreis betrachten. Die ▶Abb. 5.26 zeigt auf der linken Seite einen aus einem Material der Leitfähigkeit κ bestehenden Körper, der sich aus vier Schenkeln mit rechteckigem Querschnitt zusammensetzt. Wird an der eingezeichneten Trennstelle mithilfe zweier Elektroden eine Spannung U_0 angelegt, dann stellt sich ein Strom I ein, der nun berechnet werden soll.

Der erste Schritt besteht darin, die dreidimensionale Anordnung durch ein möglichst einfaches Ersatzschaltbild zu ersetzen. Wir nehmen an, dass der Strom homogen über den jeweiligen Schenkelquerschnitt verteilt fließt und dass die Leiterlänge der gestrichelt eingezeichneten mittleren Weglänge entspricht[9]. Unter dieser Voraussetzung kann jeder Schenkel durch einen ohmschen Widerstand entsprechend Gl. (2.27) ersetzt werden. Mit dem Zählindex $i = 1 \ldots 5$ gilt für den Widerstand im i-ten Leiterabschnitt der Ausdruck

$$R_i \overset{(2.27)}{=} \frac{l_i}{\kappa A_i}\,, \tag{5.46}$$

9 In der Praxis wird sich der Strom insbesondere in den Ecken nicht mehr homogen verteilen, d.h. die hier durchgeführte Rechnung liefert eine Näherungslösung, die aber umso genauer ist, je größer die Schenkellängen gegenüber den Querschnittsabmessungen sind.

in dem l_i die eingezeichnete mittlere Schenkellänge und A_i die Querschnittsfläche des i-ten Schenkels bedeuten. Mithilfe des Ohm'schen Gesetzes kann der gesuchte Strom I aus dem zugehörigen Ersatzschaltbild berechnet werden

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0 \overset{(3.4)}{=} -U_0 + I \sum_{i=1}^{5} R_i \quad \rightarrow \quad I = \frac{U_0}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5} \,. \tag{5.47}$$

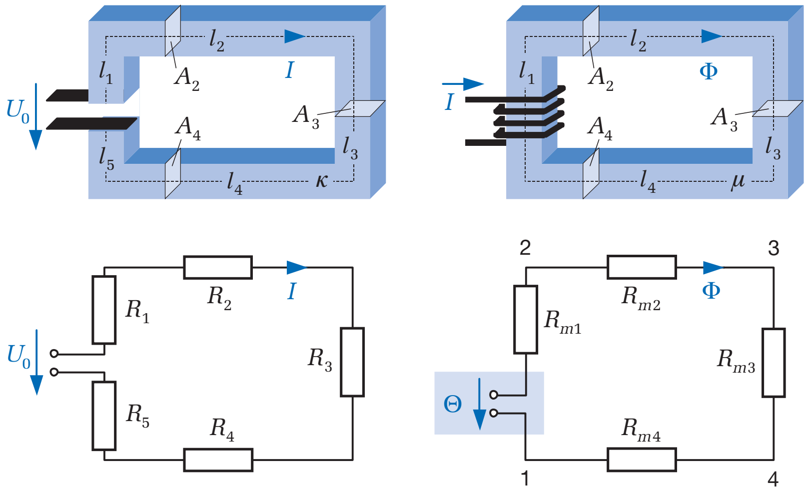


Abbildung 5.26: Elektrischer und magnetischer Kreis

Betrachten wir nun den magnetischen Kreis auf der rechten Seite der Abb. 5.26. Dabei soll angenommen werden, dass der Körper aus ferromagnetischem Material mit μ_r>>1 besteht. Innerhalb des hochpermeablen Materials ist die tangential zur Oberfläche gerichtete Flussdichtekomponente entsprechend der Randbedingung (5.43) um den Faktor μ_r größer als in dem umgebenden Raum, d.h. der Fluss wird in dem hochpermeablen Material geführt und darf im umgebenden Raum vernachlässigt werden. Lassen wir auch in diesem Fall den besonderen Flussverlauf in den Ecken unberücksichtigt, dann darf eine homogene Feldverteilung über den Querschnitt des jeweiligen Schenkels angenommen werden. Der magnetische Fluss ist ebenso wie der Strom eine skalare Größe. Es wurde vereinbart, den Strom positiv zu zählen, wenn die Stromdichte die betrachtete Querschnittsfläche in Richtung der Flächennormalen durchsetzt (vgl. Kap. 3.1). Analog dazu wird der magnetische Fluss positiv gezählt, wenn die Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ die Querschnittsfläche in Richtung der Flächennormalen durchsetzt. Für den Schenkel 1 gilt mit Gl. (5.30)

$$\Phi_1 \overset{(5.30)}{=} B_1 A_1 \overset{(5.36)}{=} \mu_r \mu_0 H_1 A_1 = \mu H_1 A_1 \,. \tag{5.48}$$

Wie aus dem verschwindenden Hüllflächenintegral der Stromdichte (3.5) die Kirchhoff'sche Knotenregel (3.7) folgte, so folgt jetzt aus dem verschwindenden Hüllflächenintegral der Flussdichte (5.31) die Forderung, dass die Summe aller zu einem Knoten hinfließenden Flüsse gleich sein muss zu der Summe aller von dem Knoten wegfließenden Flüsse. Der Begriff Knoten bezieht sich jetzt allgemein auf eine Verzweigung mehrerer Schenkel. In dem hier vorliegenden Sonderfall existiert keine Verzweigung, so dass der magnetische Fluss in allen Schenkeln gleich groß ist (analog zu dem überall gleichen Strom in einem Stromkreis mit nur einer einzigen Masche). Resultierend muss gelten

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = \Phi \qquad \rightarrow \qquad H_1 A_1 = H_2 A_2 = H_3 A_3 = H_4 A_4 \,. \tag{5.49}$$

Das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke entlang des gestrichelt eingezeichneten Weges auf der rechten Seite der Abb. 5.26 liefert nach Gl. (5.22) die Durchflutung

$$\oint_C \vec{\mathbf{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \underbrace{H_1 l_1}_{V_{m12}} + \underbrace{H_2 l_2}_{V_{m23}} + \underbrace{H_3 l_3}_{V_{m34}} + \underbrace{H_4 l_4}_{V_{m41}} \overset{(5.22)}{=} \Theta = N I \tag{5.50}$$

mit $N = 4$ gemäß dem Beispiel in der Abbildung. Mithilfe der Gl. (5.29) kann die Durchflutung als Summe der magnetischen Spannungen in den Schenkeln dargestellt werden. Die Indizes bei V_m korrespondieren mit den Bezeichnungen an den Ecken des Ersatzschaltbildes. Aus den Beziehungen (5.48) bis (5.50) erhält man für jeden Schenkel eine Gleichung, z.B.

$$V_{m23} \overset{(5.50)}{=} H_2 l_2 \overset{(5.48)}{=} \frac{l_2}{\mu A_2} \Phi = R_{m2} \Phi \qquad \text{mit} \qquad \boxed{R_m = \frac{l}{\mu A}} \,, \tag{5.51}$$

die völlig analog zum Ohm'schen Gesetz $U = RI$ im elektrischen Stromkreis aufgebaut ist. Der magnetische Widerstand R_m, der auch als **Reluktanz** bezeichnet wird, ist genauso wie der elektrische Widerstand proportional zur Länge l und umgekehrt proportional zur Materialeigenschaft (Permeabilität) und zum Querschnitt A. Trotz des gleichen Aufbaus der Beziehungen ergibt sich bei der Berechnung der magnetischen Netzwerke in der Praxis jedoch eine zusätzliche Schwierigkeit. Während die elektrische Leitfähigkeit κ eine vom Strom unabhängige Materialkonstante ist, hängt die Permeabilität μ entsprechend der Hysteresekurve vom magnetischen Fluss ab.

Die Beziehung

$$\boxed{V_m = R_m \Phi} \tag{5.52}$$

heißt **Ohm'sches Gesetz des magnetischen Kreises**. Entsprechend der Gl. (2.32) definiert man auch den **magnetischen Leitwert** der Dimension Vs/A

$$\boxed{\Lambda_m = \frac{1}{R_m} = \frac{\mu A}{l}} \tag{5.53}$$

als den Kehrwert des magnetischen Widerstandes. Denkt man sich die Durchflutung als erregende Quelle ebenfalls in das Ersatzschaltbild eingetragen, wie z.B. in Abb. 5.26 angedeutet[10], dann kann mit diesem magnetischen Kreis in der gleichen Weise wie mit einem elektrischen Netzwerk gerechnet werden. Man beachte die Beziehung

10 Die Differenz aus dem Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke und der Durchflutung liefert immer den Wert Null.

zwischen der Zählrichtung der Durchflutung (Generatorzählpfeilsystem) und dem den Fluss verursachenden Strom auf der rechten Seite der Abb. 5.26. Mit dem Ersatzschaltbild gelten dann insbesondere die den Kirchhoff'schen Gleichungen analogen Beziehungen. Die der Maschenregel des elektrischen Kreises (5.47) entsprechende Beziehung lautet jetzt

$$\oint_C \vec{\mathbf{H}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} - \Theta \overset{(5.21)}{=} 0 = \Phi \sum_i R_{mi} - \Theta \quad \rightarrow \quad \boxed{\Theta = \sum_{Masche} R_m \Phi = \sum_{Masche} V_m} \; . \tag{5.54}$$

Für den Stromknoten gilt analog zu (3.7) die Beziehung

$$\boxed{\sum_{Knoten} \Phi = 0} \; . \tag{5.55}$$

Diese Gleichungen werden in späteren Kapiteln bei der Berechnung von Induktivitäten und deren Kopplungen benötigt. In der folgenden Tabelle sind noch einmal die Beziehungen für den elektrischen und den magnetischen Kreis gegenübergestellt.

Tabelle 5.3

Gegenüberstellung der Beziehungen für elektrisches und magnetisches Netzwerk

Bezeichnung	Elektrisches Netzwerk	Magnetisches Netzwerk
Leitfähigkeit	κ	μ
Widerstand	$R = \frac{l}{\kappa A}$	$R_m = \frac{l}{\mu A}$
Leitwert	$G = \frac{1}{R}$	$\Lambda_m = \frac{1}{R_m}$
Spannung	$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$	$V_{m12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{H}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$
Strom bzw. Fluss	$I = \iint_A \vec{\mathbf{J}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \kappa \iint_A \vec{\mathbf{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$	$\Phi = \iint_A \vec{\mathbf{B}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \mu \iint_A \vec{\mathbf{H}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$
Ohm'sches Gesetz	$U = R\,I$	$V_m = R_m \Phi$
Maschengleichung (Abb. 5.26)	$U_0 = \sum_{Masche} R\,I$	$\Theta = \sum_{Masche} R_m \Phi$
Knotengleichung	$\sum_{Knoten} I = 0$	$\sum_{Knoten} \Phi = 0$

5.13 Die Induktivität

In Kap. 1.17 haben wir den Kondensator als ein Bauelement kennen gelernt, in dem elektrische Energie gespeichert werden kann. Diese Fähigkeit haben wir als Kapazität bezeichnet. Sie ist eine das Bauelement charakterisierende Eigenschaft und stellt in dem formelmäßigen Zusammenhang $Q = CU$ die Proportionalitätskonstante zwischen der Ladung bzw. dem nach Gl. (1.36) insgesamt von einer Kondensatorplatte ausgehenden elektrischen Fluss und der angelegten Spannung dar.

Die Fähigkeit, magnetische Energie zu speichern, wird als **Induktivität** bezeichnet. Die Bauelemente mit dieser Eigenschaft werden **Spule**, Drossel oder auch selbst Induktivität genannt. Zum besseren Verständnis betrachten wir die in ▶Abb. 5.27 dargestellte Stromschleife. Der Strom erzeugt ein magnetisches Feld, das proportional zu dem Wert des Stromes ist. Die Richtung eines positiven Stromes und die Richtung des Magnetfeldes sind im Sinne einer Rechtsschraube einander zugeordnet.

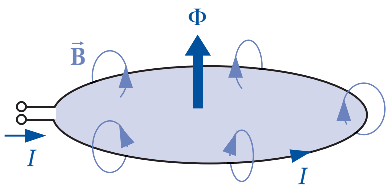


Abbildung 5.27: Stromschleife mit angedeutetem Verlauf des Magnetfeldes

In völliger Analogie zum Kondensator wird das Verhältnis aus dem gesamten magnetischen Fluss zu dem ihn verursachenden Strom als Induktivität L bezeichnet

$$\boxed{\Phi = L\,I} \, . \tag{5.56}$$

Bleibt die Frage zu beantworten, wie der gesamte von der Stromschleife erzeugte magnetische Fluss berechnet werden kann. Beim Kondensator haben wir eine geschlossene Hüllfläche um die Kondensatorplatte mit der positiven Ladung gelegt und die elektrische Flussdichte nach außen über diese Hüllfläche integriert. Das Ergebnis war identisch zu der Ladung auf der eingeschlossenen Kondensatorplatte.

Bei der Stromschleife muss ebenfalls die gesamte von dem Strom erzeugte Flussdichte integriert werden. Bei der in Abb. 5.27 dargestellten Anordnung wird die magnetische Feldstärke bzw. die zu ihr proportionale Flussdichte die von der Schleife nach innen aufgespannte Fläche in der angegebenen Richtung durchsetzen. Da jeder Stromkreis in sich geschlossen ist, definiert der *dünne* stromführende Leiter eindeutig eine Kurve im Raum, die die Berandung für eine ansonsten beliebig geformte Fläche festlegt. Über diese Fläche ist die Flussdichte zu integrieren. Die Form der Fläche spielt für das Ergebnis wegen Gl. (5.31) keine Rolle, solange ihre Berandung mit der Stromschleife identisch ist.

Zählt man bei der Berechnung des Flusses die eingezeichnete Richtung als positiv, d.h. Flächennormale und Zählrichtung des Stromes sind im Sinne einer Rechtsschraube einander zugeordnet, dann ergeben sich automatisch positive Werte für die Induktivität.

Die Induktivität hat die gleiche Dimension Vs/A wie der magnetische Leitwert. Wegen der großen Bedeutung wird eine eigene Bezeichnung Henry (nach Joseph Henry, 1797 – 1878) für die Dimension der Induktivität eingeführt 1 H = 1 Vs/A (vgl. Tabelle D.2).

Merke

Unter der Induktivität L versteht man das Verhältnis aus dem gesamten die Stromschleife durchsetzenden magnetischen Fluss zu dem den Fluss verursachenden Strom. Sie ist ein Maß für die Fähigkeit einer Anordnung, magnetische Energie zu speichern.

Die exakte Berechnung der Induktivität für eine vorgegebene Leiteranordnung ist nur in wenigen Ausnahmefällen leicht durchführbar. Ein Problem besteht darin, dass sich die Integration des Flusses über eine Fläche erstreckt, die von dem Strom berandet wird. Wir haben aber bereits in Kap. 5.7.1 gesehen, dass der endliche Leiterquerschnitt bei der Berechnung der magnetischen Feldstärke berücksichtigt werden muss. Wegen der unterschiedlichen Gleichungen zur Beschreibung der magnetischen Flussdichte müssen die Bereiche innerhalb und außerhalb des Leiters getrennt betrachtet werden. Wir kommen auf diese Besonderheit in Kap. 5.13.2 zurück.

5.13.1 Induktivität der Ringkernspule

Die dicht bewickelte Ringkernspule (Toroidspule) gehört zu den Anordnungen, bei denen eine sehr genaue Berechnung der Induktivität mit relativ geringem Aufwand möglich ist. Wir betrachten einen aus einem Material der Permeabilität $\mu >> \mu_0$ bestehenden Ringkern mit den in ▸Abb. 5.28 angegebenen Abmessungen.

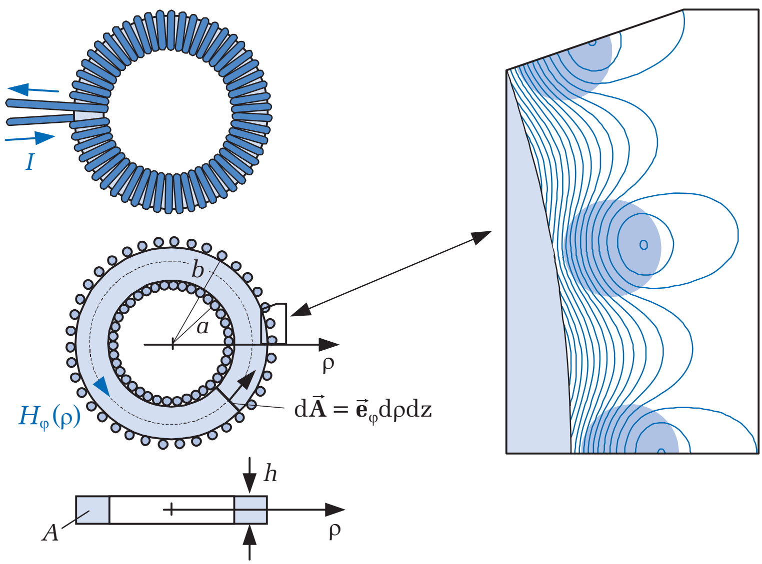


Abbildung 5.28: Ringkernspule mit Feldverteilung im Bereich der Leiter

Zur Berechnung der Induktivität wird ein Strom durch die Spule angenommen, der sich später wegen der Proportionalität von Fluss und Strom aus der Beziehung (5.56) wieder wegkürzt. Bezeichnet N die Anzahl der Windungen, dann ist die magnetische Feldstärke innerhalb des Ringkerns durch die Beziehung (5.26) gegeben. Da wir jetzt sowohl den Fluss durch die Querschnittsfläche A des Ringkerns als auch den Fluss durch die von der Leiterschleife aufgespannte Fläche benötigen, wird zur besseren Unterscheidung der magnetische Fluss Φ_A durch die im Bild dargestellte Querschnittsfläche $A = (b-a)h$ mit einem Index A gekennzeichnet. Diesen Fluss findet man mit Gl. (5.30) zu

$$\Phi_A \overset{(5.30)}{=} \iint_A \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \overset{(5.36)}{=} \mu \iint_A \vec{\mathbf{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \overset{(5.26)}{=} \frac{\mu N I}{2\pi} \int_{z=0}^{h} \int_{\rho=a}^{b} \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\varphi \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}z = \frac{\mu N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} . \tag{5.57}$$

Zur Berechnung der Induktivität nach Gl. (5.56) muss aber der Fluss Φ durch die gesamte von der Leiterschleife aufgespannte Fläche, man spricht von dem insgesamt *mit der Spule verketteten Fluss*, berechnet werden. Die Leiterschleife setzt sich aus der Summe aller von den einzelnen Windungen aufgespannten Teilflächen zusammen. Jede einzelne Windung umschließt den Kern genau einmal und wird daher von dem Fluss Φ_A in Gl. (5.57) durchsetzt. Bei der vorliegenden Anordnung sind alle Windungen gleich aufgebaut und werden auch von dem gleichen Fluss durchströmt. Der mit der Spule verkettete Fluss kann unter dieser Voraussetzung durch einfache Multiplikation der Windungszahl N mit dem Fluss durch den Kernquerschnitt Φ_A berechnet werden

$$\Phi = N \Phi_A . \tag{5.58}$$

Für die Induktivität der Toroidspule gilt dann die Beziehung

$$L \overset{(5.56)}{=} \frac{\Phi}{I} = \frac{N \Phi_A}{I} = N^2 \frac{\mu h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} . \tag{5.59}$$

Zu diesem Ergebnis sind einige zusätzliche Anmerkungen erforderlich:

- Bei der Berechnung des Flusses wurde nur die innerhalb des permeablen Ringkerns liegende Querschnittsfläche berücksichtigt. In der Praxis werden derartige Kerne aus hochpermeablem Material mit $\mu_r >> 1$ hergestellt. Aus diesem Grund kann auf die exakte Berechnung der Flussverteilung außerhalb des Kerns in unmittelbarer Umgebung der Windungen (hier gilt $\mu = \mu_0$) verzichtet werden, da dieser Beitrag zur Induktivität zu vernachlässigen ist. Um zumindest einen Eindruck von dem komplizierten Feldlinienverlauf im Bereich der Windungen zu erhalten, zeigt Abb. 5.28 für einen kleinen Ausschnitt das Feldbild in diesem Bereich.
- Genauso wie die Kapazität hängt auch die Induktivität prinzipiell nur von der Geometrie der Anordnung (Abmessungen und Windungszahl) sowie von der Materialeigenschaft μ ab. Während aber die dielektrischen Materialeigenschaften ε relativ unabhängig von den verschiedenen physikalischen Einflussgrößen sind, muss bei den Induktivitäten die Abhängigkeit der Permeabilität von der Temperatur, von der Frequenz, von der Materialaussteuerung, d.h. von dem Strom sowie von der Vorgeschichte entsprechend der Hysteresekurve in Abb. 5.21 berücksichtigt werden.

- Die Induktivität L ist proportional zu dem *Quadrat* der Windungszahl N, d.h. große Induktivitätswerte lassen sich nicht nur mit großen Permeabilitäten, sondern auch mit großen Windungszahlen erreichen. Es ist allerdings zu beachten, dass dieses Ergebnis auf einigen Näherungen beruht, die in vielen praktischen Fällen nur noch eingeschränkt gelten. Im vorliegenden Beispiel kommt der quadratische Zusammenhang dadurch zustande, dass jede Windung nach Gl. (5.57) den gleichen Beitrag zum Fluss Φ_A im Kern liefert und dass nach Gl. (5.58) alle Windungen gleichermaßen von diesem Fluss Φ_A durchströmt werden.

An dieser Stelle soll zunächst noch eine Näherungslösung für die Induktivität der Ringkernspule in Abb. 5.28 angegeben werden, auf die wir später noch einmal zurückgreifen. Wir nehmen vereinfachend an, dass die magnetische Feldstärke in dem Ringkern überall den gleichen Wert aufweist. Diese Annahme ist umso besser erfüllt, je kleiner die Dicke des Ringkerns $b - a$ ist. Unter dieser Voraussetzung kann der Kreisumfang $2\pi\rho$ in Gl. (5.26) durch eine mittlere Weglänge $l_m = 2\pi(a + b)/2$ ersetzt werden. Für die Feldstärke gilt dann näherungsweise

$$\vec{\mathbf{H}} \overset{(5.26)}{=} \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{N I}{l_m} = \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{N I}{\pi(a+b)} . \tag{5.60}$$

Den Fluss durch den Kern (5.57) erhält man dann durch einfache Multiplikation der überall gleichen Flussdichte μH mit dem Kernquerschnitt $A = (b - a)h$

$$\Phi_A = \mu H A = \mu \frac{N I}{l_m} A \tag{5.61}$$

und anstelle der exakten Induktivität (5.59) gilt die Näherungsbeziehung

$$L = \frac{N \Phi_A}{I} = N^2 \frac{\mu A}{l_m} = N^2 \frac{\mu h}{\pi} \frac{b-a}{b+a} , \tag{5.62}$$

die für $b - a << a$ (Dicke des Ringes klein gegenüber dem Radius, d.h. homogenes Feld im Kern) wegen $\ln(b/a) = \ln(1 + (b - a)/a) \approx (b - a)/a$ auch unmittelbar aus der exakten Gl. (5.59) hergeleitet werden kann.

5.13.2 Induktivität einer Doppelleitung

Als weiteres Beispiel, bei dem jetzt aber die Flussdichte innerhalb des Drahtes nicht mehr vernachlässigt werden kann, soll die Induktivität einer Doppelleitung berechnet werden. Zur Vereinfachung betrachten wir die Anordnung hinsichtlich der Koordinate z (senkrecht zur Zeichenebene) als eben, d.h. die Doppelleitung wird als unendlich lang angenommen und die Induktivität wird pro Längeneinheit der Koordinate z berechnet. Die Abmessungen sind in ▶Abb. 5.29 angegeben.

Zur Berechnung der Induktivität nach Gl. (5.56) wird ein Strom $\pm I$ in der Doppelleitung angenommen und der zugehörige Fluss berechnet. Die Abb. 5.29 zeigt die von den Leitern hervorgerufene y-gerichtete magnetische Feldstärke in der Ebene $y = 0$ (vgl. Abb. 5.11). Der Fluss durch die von den beiden Leitern aufgespannte Querschnittsfläche setzt sich aus den Beiträgen der beiden Leiter zusammen, die als Integral der Flussdichte über die Fläche aus Symmetriegründen gleich groß sein müssen.

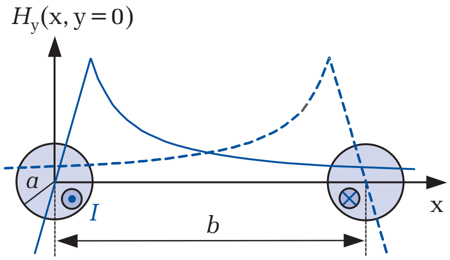


Abbildung 5.29: Unendlich lange Doppelleitung

Es genügt also, den Fluss nach ▶Abb. 5.30 infolge des linken Leiters zu berechnen und das Ergebnis später mit dem Faktor 2 zu multiplizieren.

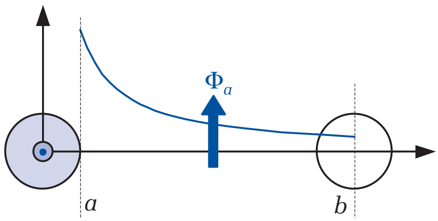


Abbildung 5.30: Zur Berechnung des äußeren Flusses Φ_a

Die Feldstärke infolge des linken Leiters ist nach Gl. (5.25) bekannt. In der Halbebene $y = 0$, $x > 0$ gilt wegen $\vec{\mathbf{e}}_\varphi = \vec{\mathbf{e}}_y$ die Beziehung

$$H_y \overset{(5.25)}{=} \frac{I}{2\pi a} \cdot \begin{cases} x/a \\ a/x \end{cases} \text{für} \quad \begin{matrix} x \le a \\ x \ge a \end{matrix} \,. \tag{5.63}$$

Bei dieser Anordnung ist zu beachten, dass die Feldstärke innerhalb des Leiters eine andere Abhängigkeit von der x-Koordinate aufweist als außerhalb und dass die Feldlinien innerhalb des linken Leiters nur einen Teil des Stromes I umfassen, d.h. die Durchflutung ist bei einem derartigen Umlauf kleiner als I. Die Berechnung des Flusses nach Gl. (5.30) wird daher in zwei Anteile aufgeteilt, einerseits in die Berechnung des *äußeren* Flusses durch die Querschnittsfläche $a \le x \le b$, d.h. von der Oberfläche des linken Leiters bis zum Mittelpunkt des rechten Leiters, und andererseits in die Berechnung des *inneren* Flusses im Bereich $0 \le x \le a$, d.h. innerhalb des linken Leiters. Entsprechend dieser Flussaufteilung setzt sich auch die nach Gl. (5.56) zu berechnende Induktivität aus zwei Beiträgen zusammen, die als **äußere** bzw. **innere Induktivität** bezeichnet werden.

Dem nach Gl. (5.30) berechneten äußeren Fluss

$$\Phi_a \overset{(5.30)}{=} \int_{z=0}^{l} \int_{x=a}^{b} \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_y \mu_0 H_y}_{\vec{\mathbf{B}}} \cdot \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_y \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z}_{\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}} \overset{(5.63)}{=} \mu_0 \frac{I\,l}{2\pi} \int_{x=a}^{b} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I\,l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \tag{5.64}$$

wird gemäß Gl. (5.56) die äußere Induktivität zugeordnet

$$L_a \overset{(5.56)}{=} \frac{\Phi_a}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \,. \tag{5.65}$$

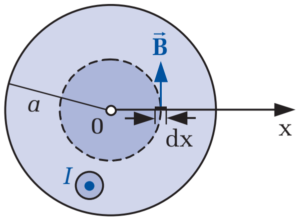


Abbildung 5.31: Zur Berechnung des inneren Flusses Φ_i

Zur Berechnung des inneren Flusses betrachten wir die ▶Abb. 5.31. An der Stelle $x < a$ innerhalb des Leiters liefert die Flussdichte mit Gl. (5.63) den Beitrag

$$d\Phi_i = B_y \,dx\,dz = \frac{\mu_0 I x}{2\pi a^2} dx\,dz \tag{5.66}$$

zum Fluss. Jetzt ist aber zu beachten, dass die im Bild gestrichelt eingezeichnete zugehörige Feldlinie nur den Anteil des Stromes umfasst, der sich innerhalb der Feldlinie befindet. Dieser Strom ist aber im Verhältnis der beiden Kreisflächen, d.h. um den Faktor $(x/a)^2$ kleiner als der als Bezugswert I verwendete Gesamtstrom in Gl. (5.56). Das bedeutet aber, dass der mit dem Fluss nach Gl. (5.66) berechnete Induktivitätsbeitrag um genau diesen Faktor zu groß wird. Zur Korrektur wird der differentielle Fluss (5.66) mit dem gleichen Faktor multipliziert (gewichtet). Mit anderen Worten bedeutet das, dass der Fluss, der nur einen Teil des Stromes umschließt, auch nur anteilsmäßig zur Gesamtinduktivität beiträgt[11]. Die anschließende Integration über den Leiterradius liefert als Ergebnis den inneren Fluss, dem die innere Induktivität zugeordnet ist

$$L_i \overset{(5.66)}{=} \frac{1}{I} \int_{z=0}^{l} \int_{x=0}^{a} \frac{x^2}{a^2} B_y \,dx\,dz = \frac{\mu_0 l}{2\pi a^4} \int_0^a x^3 dx = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \,. \tag{5.67}$$

Interessanterweise ist das Ergebnis (5.67) unabhängig von dem Leiterradius a. Die Gesamtinduktivität der Doppelleitung (pro Längeneinheit) setzt sich wegen der Beiträge von Hin- und Rückleiter aus dem doppelten Wert der bisher berechneten inneren und äußeren Induktivität zusammen

$$\frac{L}{l} = \frac{2(L_i + L_a)}{l} = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right) . \tag{5.68}$$

Dieses Ergebnis ist als Funktion des Leiterabstandes b in ▶Abb. 5.32 für verschiedene Leiterradien a dargestellt. Mit wachsendem Leiterabstand nimmt der Fluss Φ_a in Abb. 5.30 durch die größer werdende Querschnittsfläche zu und in gleichem Maße steigt

11 Dass die Einbeziehung des Gewichtsfaktors in das Integral (5.67) zum richtigen Ergebnis führt, werden wir im Beispiel 6.4 nochmals zeigen, in dem die innere Induktivität aus der im Draht gespeicherten magnetischen Energie berechnet wird.

dann auch die Induktivität der Doppelleitung. Aus der Abb. 5.30 ist ebenfalls zu erkennen, dass auch eine Reduzierung des Leiterradius a eine Zunahme von Φ_a, d.h. von der äußeren Induktivität bedeutet. Wegen der von a unabhängigen inneren Induktivität steigt die Gesamtinduktivität auch mit kleiner werdendem Leiterradius an.

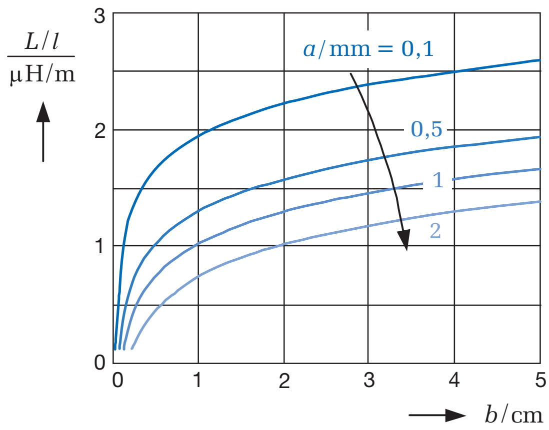


Abbildung 5.32: Induktivität der Doppelleitung pro Längeneinheit

Für die spätere Praxis kann man sich den Wert $L/l = 1\ \mu H/m$ für eine Doppelleitung mit Drahtradius $a = 1$ mm und Leiterabstand $b = 1$ cm gut merken.

An dieser Stelle ist noch eine ergänzende Bemerkung zur Aufteilung der Induktivität in die beiden Anteile L_i und L_a erforderlich. In dem bisherigen Beispiel mit zwei unendlich langen Drähten wurde die Fläche zur Berechnung des äußeren Flusses in Abb. 5.30 durch die Oberfläche des ersten *stromführenden* Leiters und die Mitte des zweiten *stromlosen* Leiters begrenzt. Diese Situation ist perspektivisch in ▶Abb. 5.33a dargestellt.

Die Induktivität einer Leiterschleife lässt sich aber auch aus der im Magnetfeld gespeicherten Energie (vgl. Kap. 6.5) berechnen. Damit lässt sich zeigen, dass die aus der bisherigen Aufteilung in den Beitrag des Hinleiters und anschließende Multiplikation mit dem Faktor 2 erhaltene Induktivität (5.68) nicht nur für den Sonderfall $b >> a$ gilt, sondern auch dann noch richtig ist, wenn sich der Drahtradius a dem halben Leiterabstand b annähert.

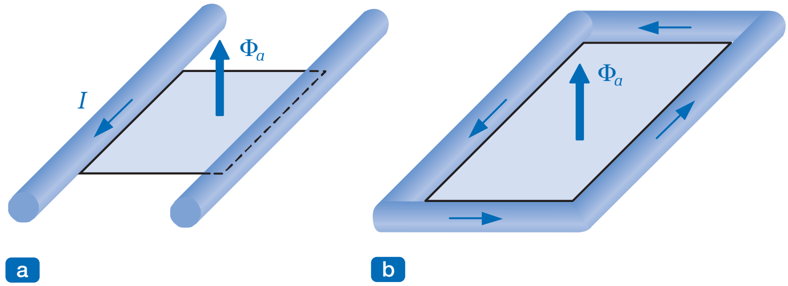


Abbildung 5.33: a) Unendlich lange Doppelleitung, b) Endliche Leiterschleife

Bei einer *endlichen* Leiterschleife gemäß Abb. 5.33b ist diese Aufteilung nicht durchführbar, d.h. für die Berechnung führt die gesamte Schleife gleichzeitig Strom und die Fläche zur Integration der Flussdichte verläuft dann zwangsläufig mit ihrem gesamten Rand entlang der Oberfläche der Leiterschleife.

Übertragen auf das vorliegende Beispiel der Doppelleitung hätte sich die Querschnittsfläche in Abb. 5.30 also nur noch über den Bereich $a \leq x \leq b - a$ erstreckt. Dadurch entsteht ein prinzipieller Fehler, so dass die Aufteilung in eine innere und eine äußere Induktivität bei einer Flächenberandung gemäß Abb. 5.33b als Näherungslösung anzusehen ist. Für eine allgemeine Leiterkontur ist das Ergebnis umso ungenauer, je größer der Drahtdurchmesser im Vergleich zur Schleifenabmessung ist. In den vielen praktischen Fällen mit den aus „dünnen" Drähten bestehenden Leiterschleifen ist der dadurch entstehende Fehler im Ergebnis jedoch zu vernachlässigen.

5.14 Der magnetische Kreis mit Luftspalt und der A_L-Wert

Im Zusammenhang mit der Induktivität der Toroidspule nach Gl. (5.59) haben wir bereits die Probleme mit den nichtlinearen Eigenschaften der Permeabilität diskutiert. Mit wachsenden Durchflutungen NI steigt die magnetische Feldstärke nach Gl. (5.26) entsprechend an. Wird das Kernmaterial dabei bis in den Bereich der Sättigung ausgesteuert (Abb. 5.21), dann reduziert sich die Permeabilität (diese entspricht nach Gl. (5.36) der Steigung der B-H Kurve) und in gleichem Maße reduziert sich der Wert der Induktivität. Dieses Problem lässt sich dadurch vermeiden, dass in den Kern ein Luftspalt eingebaut wird (▶Abb. 5.34).

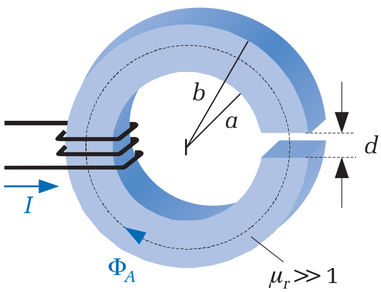


Abbildung 5.34: Ringkernspule mit Luftspalt

Dieser magnetische Kreis kann nach Kap. 5.12 genauso behandelt werden wie ein elektrischer Stromkreis. Die Durchflutung $\Theta = NI$ können wir in Abb. 5.34 als bekannt voraussetzen. Der gesamte magnetische Widerstand besteht aus der Reihenschaltung des magnetischen Widerstandes des Ringkerns R_{mK} und des magnetischen Widerstandes des Luftspalts R_{mL}.

Aus der Maschenregel (5.54) folgt für die in ▶Abb. 5.35 dargestellte Ersatzanordnung der Zusammenhang

$$\Theta = \left(R_{mK} + R_{mL}\right) \Phi_A = R_m \Phi_A \,. \tag{5.69}$$

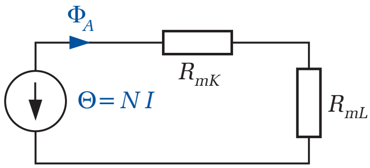


Abbildung 5.35: Ersatzschaltung

Zur besseren Unterscheidung zwischen dem magnetischen Fluss Φ_A durch die Querschnittsfläche A des Kerns und dem später benötigten mit den N Windungen der Spule verketteten Gesamtfluss verwenden wir wieder den Index A.

Die Bestimmung der beiden Widerstände erfolgt mithilfe der Gl. (5.51). Mit der mittleren Länge $l_m \approx \pi(a+b) - d$ des Ringkerns und dessen Querschnittsfläche $A = (b-a)h$ ist der magnetische Widerstand des Kerns durch

$$R_{mK} \overset{(5.51)}{=} \frac{l_m}{\mu A} = \frac{l_m}{\mu_r \mu_0 A} \tag{5.70}$$

gegeben. Die Berechnung des magnetischen Widerstandes R_{mL} ist nur in Sonderfällen leicht durchführbar. Im allgemeinen Fall wird sich das Magnetfeld in den umgebenden Luftraum ausdehnen (▶Abb. 5.36), so dass die wirksame Querschnittsfläche im Luftspalt größer ist als im Kern.

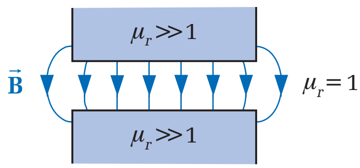


Abbildung 5.36: Magnetfeld in der Umgebung des Luftspalts

Wir setzen daher voraus, dass die Luftspaltlänge d klein ist gegenüber den Querschnittsabmessungen. In diesem Fall darf angenommen werden, dass das Feld homogen im Luftspalt verteilt ist und das Feld außerhalb des Luftspalts nur wenig zum Gesamtfluss beiträgt und daher vernachlässigt werden kann. Der magnetische Widerstand des Luftspalts beträgt dann

$$R_{mL} = \frac{d}{\mu_0 A}\,. \tag{5.71}$$

Nach Zusammenfassung der Gleichungen (5.69) bis (5.71)

$$\Theta \overset{(5.21)}{=} NI = \left(\frac{l_m}{\mu_r \mu_0 A} + \frac{d}{\mu_0 A}\right)\Phi_A = \frac{1}{\mu_r \mu_0 A}(l_m + d\,\mu_r)\,\Phi_A \tag{5.72}$$

kann der magnetische Fluss im Kern angegeben werden

$$\Phi_A \overset{(5.69)}{=} \frac{\Theta}{R_m} \overset{(5.72)}{=} NI\frac{\mu_r \mu_0 A}{l_m + d\,\mu_r}\,. \tag{5.73}$$

Zur Berechnung der Induktivität kann wieder davon ausgegangen werden, dass alle Windungen von dem gleichen Fluss Φ_A durchströmt werden. Für die Induktivität der Anordnung 5.34 gilt dann die Beziehung

$$L = \frac{N\,\Phi_A}{I} \overset{(5.73)}{=} N^2 \frac{\mu_r \mu_0\, A}{l_m + d\,\mu_r}\,, \tag{5.74}$$

die sich für $d = 0$, d.h. bei nicht vorhandenem Luftspalt, unmittelbar in die Gl. (5.62) überführen lässt.

An dieser Gleichung ist ein weiterer Vorteil des Luftspalts zu erkennen. Durch einen Feinabgleich mithilfe der Luftspaltlänge d kann die Induktivität sehr genau auf einen gewünschten Wert eingestellt werden.

Zur Berechnung der Induktivität (5.74) wird wieder das Quadrat der Windungszahl mit einem Faktor multipliziert, in dem ausschließlich Abmessungen und Materialeigenschaften enthalten sind. Da dieser Ausdruck für jeden beliebigen Kern ermittelt werden kann, wird von den Herstellern in den Datenblättern für jeden Kern mit zugehörigem Material und zugehöriger Luftspaltgröße ein so genannter **A_L-Wert** der Dimension nH angegeben, mit dessen Hilfe die Induktivität ebenfalls in nH nach der einfachen Beziehung

$$\boxed{L = N^2 A_L} \tag{5.75}$$

berechnet werden kann. Die Dimensionierung einer Spule wird dadurch wesentlich vereinfacht.

Aus den bereits weiter oben angegebenen Gleichungen findet man, dass der A_L-Wert dem magnetischen Leitwert des Kerns bzw. dem Kehrwert des magnetischen Widerstandes entspricht

$$L \overset{(5.74)}{=} \frac{N\,\Phi_A}{I} \overset{(5.73)}{=} \frac{N\,\Theta}{I\,R_m} \overset{(5.21)}{=} \frac{N^2}{R_m} \overset{(5.53)}{=} N^2\,\Lambda_m \quad \rightarrow \quad \boxed{A_L = \Lambda_m = \frac{1}{R_m}}\,. \tag{5.76}$$

5.14.1 Zusammenhang von Luftspaltlänge und Windungszahl

Ein Vergleich der Beziehungen (5.70) und (5.71) zeigt, dass bereits ein sehr kleiner Luftspalt den magnetischen Widerstand des Kreises deutlich erhöht. Nach Gl. (5.74) kann die zu realisierende Induktivität L mit unterschiedlichen Kombinationen von Windungszahl N und Luftspaltlänge d realisiert werden. Für einen größeren Luftspalt, d.h. für einen größeren magnetischen Widerstand, werden entsprechend mehr Windungen benötigt.

Mit der Querschnittsfläche $A = (b - a)h$ und der mittleren Länge $l_m \approx \pi(a + b) - d$ des Ringkerns lässt sich die erforderliche Windungszahl durch Umstellen der Gl. (5.74) angeben

$$N = \sqrt{L \frac{l_m + d\,\mu_r}{\mu_r \mu_0\, A}} = \sqrt{L \frac{\pi(a+b) + d(\mu_r - 1)}{\mu_r \mu_0 (b-a) h}}\,. \tag{5.77}$$

Um den Luftspalteinfluss besser einschätzen zu können, wollen wir ein konkretes Zahlenbeispiel untersuchen.

Beispiel 5.2: Zahlenbeispiel

Gegeben sei ein aus Ferritmaterial der Permeabilität $\mu = \mu_r \mu_0$ mit $\mu_r = 2\,000$ bestehender Ringkern mit Innenradius $a = 1{,}5$ cm und Außenradius $b = 2{,}5$ cm nach Abb. 5.34 und mit der Höhe $h = 1$ cm. Der Ringkern kann mit einem Luftspalt der Länge d in dem Bereich $0 \le d \le 2$ mm hergestellt werden. Die Windungszahl N ist in Abhängigkeit von der Luftspaltlänge so zu wählen, dass die Spule eine Induktivität $L = 0{,}5$ mH besitzt. Zur Vereinfachung soll das Feld im Bereich des Luftspalts bei allen Rechnungen als homogen angenommen werden.

Lösung:

Die Auswertung der Gl. (5.77) liefert mit den angegebenen Daten den in ▶Abb. 5.37 dargestellten Zusammenhang. Da der magnetische Widerstand des Luftspalts wegen $\mu_r = 1$ sehr viel größer ist als der magnetische Widerstand des Kerns mit $\mu_r = 2\,000$, hat bereits ein sehr kleiner Luftspalt einen beträchtlichen Einfluss auf die Windungszahl. Bei einer mittleren Kernlänge von $l_m \approx 125$ mm erzwingt ein Luftspalt von lediglich 2 mm eine Erhöhung der Windungszahl von $N = 16$ auf $N = 90$ zur Realisierung der gleichen Induktivität.

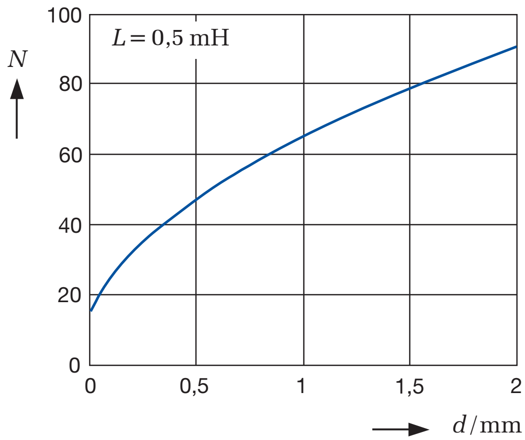


Abbildung 5.37: Windungszahl N als Funktion der Luftspaltlänge d

Die Frage nach der optimalen Kombination von N und d muss aufgrund anderer Kriterien, z.B. durch die entstehenden Verluste oder durch die Sättigung des Kernmaterials, entschieden werden.

5.14.2 Zusammenhang von Luftspaltlänge und Flussdichte

In diesem Abschnitt wollen wir die Vermeidung der Sättigung des Kernmaterials mithilfe eines Luftspalts untersuchen. Die Hysteresekurve in Abb. 5.21 wird bei großen Aussteuerungen immer flacher, die Steigung der Kurve $\Delta B/\Delta H = \mu_r\mu_0$ fällt im Extremfall bis auf den Wert $\Delta B/\Delta H = \mu_0$ ab, d.h. die Permeabilitätszahl fällt von $\mu_r > 1\,000$ um mehrere Zehnerpotenzen auf $\mu_r = 1$ ab. Bei nicht vorhandenem Luftspalt $d = 0$ ist aber die Induktivität nach Gl. (5.74) direkt proportional zu μ_r. Als Konsequenz ist die Induktivität eines derartigen Bauelements sehr stark von der Aussteuerung des Kernmaterials, d.h. von dem Strom durch das Bauelement abhängig. Diese Nachteile lassen sich vermeiden, wenn die Flussdichte auch bei dem maximal auftretenden Spulenstrom wesentlich kleiner als die Sättigungsinduktion B_s bleibt. In diesem Fall kann μ_r nur noch einen eingeschränkten Wertebereich als Folge eines sich ändernden Stromes durchlaufen.

Wir berechnen zunächst allgemein die Flussdichte im Kern für eine Windungszahl N

$$B \overset{(5.30)}{=} \frac{\Phi_A}{A} \overset{(5.62)}{=} \frac{L\,I}{N\,A} \tag{5.78}$$

und erhalten dann unter Einbeziehung der Gl. (5.77) einen Zusammenhang

$$B = \frac{L\,I}{N\,A} \overset{(5.77)}{=} I\sqrt{\frac{L}{A}\cdot\frac{\mu_r\mu_0}{l_m + d\,\mu_r}}\,, \tag{5.79}$$

der die Flussdichte in Abhängigkeit von der Luftspaltlänge für den Sonderfall des Ringkerns darstellt.

Beispiel 5.3: Zahlenbeispiel

Für die Daten aus Beispiel 5.2 soll die Flussdichte im Kern als Funktion der Luftspaltlänge berechnet werden. Die Auswertung soll für einen Strom $I = 1$ A und unter der vereinfachenden Annahme durchgeführt werden, dass die Permeabilitätszahl $\mu_r = 2000$ von der Flussdichte B unabhängig sei[12].

Lösung:

Nach Auswertung der Gl. (5.79) erhalten wir das in ▶Abb. 5.38 dargestellte Ergebnis.

12 Streng genommen müssten wir μ_r in Gl. (5.79) entsprechend der Hysteresekurve als Funktion von B ansehen, was die Auswertung zwar deutlich erschwert, den prinzipiellen Zusammenhang in Abb. 5.38 aber nicht beeinflusst.

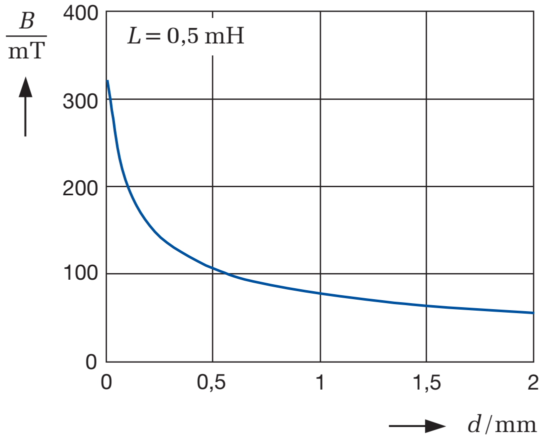


Abbildung 5.38: Flussdichte im Kern als Funktion der Luftspaltlänge d

Bei Ferritkernen liegt die Sättigungsinduktion abhängig vom Material und von der Temperatur im Bereich 300 – 450 mT. Aus der Abb. 5.38 ist zu erkennen, dass die maximale Flussdichte bereits mit kleinen Luftspalten, z.B. $d = 1$ mm, erheblich reduziert werden kann, im vorliegenden Beispiel fast auf ein Viertel des Wertes bei fehlendem Luftspalt.

Fassen wir die wesentlichen Ergebnisse aus diesem Kapitel noch einmal zusammen:

Merke

Die Eigenschaften einer mit einem hochpermeablen Kern hergestellten Induktivität werden durch Einfügen eines kleinen Luftspalts stark beeinflusst:

- Zur Realisierung eines vorgegebenen Induktivitätswertes wird eine wesentlich höhere Anzahl von Windungen benötigt.
- Die Flussdichte im Kern nimmt stark ab, d.h. die Sättigung des Kernmaterials kann vermieden werden.
- Die Abhängigkeit der Induktivität L von den nichtlinearen Eigenschaften des Kernmaterials, z.B. von der Temperatur oder von der Aussteuerung, d.h. von dem Spulenstrom, wird wesentlich geringer.

5.15 Praktische Ausführungsformen von Induktivitäten

Ähnlich wie bei den Kondensatoren und Widerständen gibt es auch bei den Spulen je nach Anwendungsfall sehr unterschiedliche Bauformen. Allerdings ist die Verfügbarkeit vorgefertigter induktiver Komponenten auf standardisierte Anwendungen begrenzt. In der überwiegenden Zahl der Fälle werden Spulen und auch die in Kap. 6.7 zu behandelnden Transformatoren wegen der Vielfalt unterschiedlicher Anforderungen an das Bauelement für die jeweilige Applikation speziell dimensioniert. Zu diesem Zweck stehen die unterschiedlichsten Bauformen von Kernen aus unterschiedlichen hochpermeablen Materialien mit zugehörigen Wickelkörpern sowie eine große Vielfalt von lackisolierten Kupferdrähten als Volldraht, als Litzedraht oder auch als Kupfer- oder Aluminiumflachband zur Verfügung. Einige häufig verwendete Bauformen werden in den folgenden Abschnitten betrachtet.

5.15.1 Drahtgewickelte Luftspulen

Eine sehr einfache Bauform besitzen die Luftspulen. Auf einen meist zylindrischen Wickelkörper aus Kunststoff werden mehrere Windungen eines Kupferrunddrahtes neben- bzw. übereinander gewickelt. Die ▶Abb. 5.39 zeigt den Querschnitt durch verschiedene Luftspulen mit unterschiedlichen Wickelanordnungen.

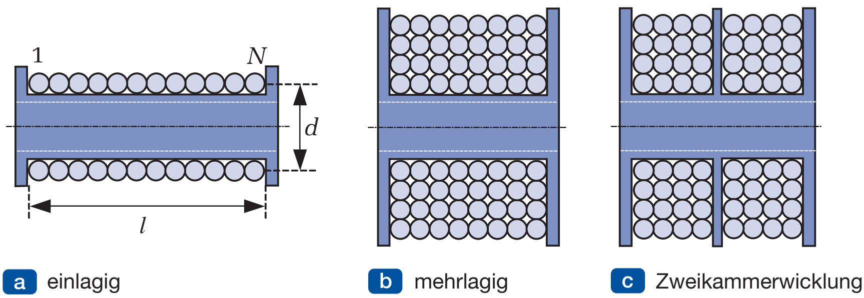


Abbildung 5.39: Querschnitt durch unterschiedliche Luftspulen

Die einlagige Spule nach Abb. 5.39a entspricht in ihrem Aufbau der lang gestreckten Zylinderspule in Abb. 5.15. Sind N Windungen auf einer Länge l gleichmäßig verteilt, dann ist die Feldstärke im Spuleninneren bei einem angenommenen Spulenstrom I durch die Beziehung (5.28) gegeben. Mit dem Spulenquerschnitt $A = \pi d^2/4$ kann die Induktivität näherungsweise berechnet werden

$$L \overset{(5.62)}{=} \frac{N\Phi_A}{I} \overset{(5.30)}{=} \frac{N\mu_0 H A}{I} \overset{(5.28)}{=} N^2 \frac{\mu_0 A}{l}\,. \tag{5.80}$$

Die hierbei gemachten Voraussetzungen, nämlich homogene Feldverteilung im Spuleninneren und Feldfreiheit außerhalb der Spule, sind nach Abb. 5.16 umso besser erfüllt, je größer die Spulenlänge l gegenüber dem Durchmesser d ist. Wesentlich genauere

Ergebnisse für Abmessungsverhältnisse $l/d > 0{,}3$, also auch für kurze Spulen, liefert die in [20] angegebene Beziehung

$$L \approx N^2 \frac{\mu_0 A}{l + d/2{,}2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{L}{\text{nH}} \approx N^2 \frac{22}{1 + 2{,}2\, l/d} \cdot \frac{d}{\text{cm}} \, . \tag{5.81}$$

Betrachten wir ein konkretes Zahlenbeispiel: Eine einlagige Luftspule mit dem Durchmesser $d = 1$ cm wird mit einem Kupferrunddraht des Durchmessers 0,1 mm gewickelt. Die Induktivität soll als Funktion der Windungszahl $50 \le N \le 400$ berechnet werden. Bei dem gegebenen Drahtdurchmesser variiert die Spulenlänge in dem Bereich 0,5 cm $\le l \le$ 4 cm. Die Auswertung ist als die unterste Kurve in ▶Abb. 5.40 dargestellt. Da der Nenner in der Gl. (5.81) für $l > d$ fast linear mit l und damit auch mit der Windungszahl N ansteigt, wächst die Induktivität praktisch nur noch linear mit der Windungszahl.

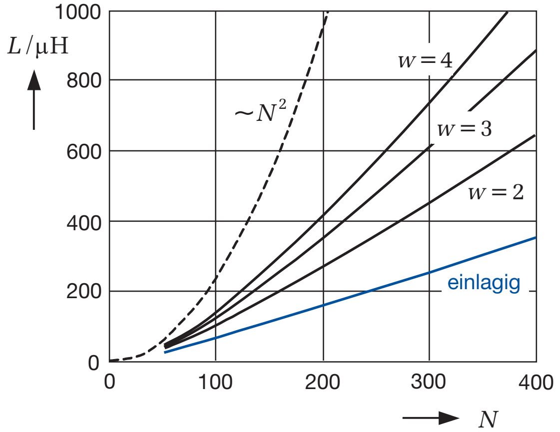


Abbildung 5.40: Induktivität als Funktion der Windungszahl für unterschiedliche Lagenzahlen

Eine prinzipielle Möglichkeit zur Erhöhung der Induktivität bei einer vorgegebenen Windungszahl N besteht darin, die Windungen, so wie in Abb. 5.39b gezeigt, nicht komplett nebeneinander, sondern auf mehrere Lagen verteilt übereinanderzuwickeln, wobei jede Lage N/w Windungen enthält (w kennzeichnet die Anzahl der Lagen). Infolge der besseren Kopplung zwischen den Windungen steigt die Gesamtinduktivität deutlich an[13]. Das Ergebnis einer exakten Berechnung ist für die gleichen Windungszahlen $50 \le N \le 400$, jetzt aber verteilt auf $w = 2$, 3 oder 4 Lagen, ebenfalls in Abb. 5.40 dargestellt. Zum Vergleich ist die zum Quadrat der Windungszahl proportionale Induktivität in die Abbildung eingetragen. Dieser theoretische Verlauf ist aber

13 Die Kopplung wird in Kap. 6.4 behandelt. Einfach ausgedrückt bedeutet es bei diesem Beispiel, dass der mittlere Abstand zwischen den Windungen geringer wird und dass deshalb der von einer Windung erzeugte magnetische Fluss zu einem größeren Teil die anderen Windungen durchsetzt.

bei den Luftspulen wegen der geringen Kopplung in der Praxis nicht erreichbar, im Gegensatz zu den Spulen mit hochpermeablen Kernen, in denen der Fluss geführt wird (vgl. Kap. 5.13.1).

Zur Berechnung der mehrlagigen Spule wird zunächst die Induktivität einer einlagigen Spule mit N/w Windungen und der reduzierten Länge l/w nach Gl. (5.81) ermittelt. Solange die Anzahl der Lagen klein ist gegenüber der Anzahl der Windungen in einer Lage, ist die Kopplung zwischen den Lagen sehr gut und das Ergebnis einer Lage kann mit dem Quadrat der Lagenzahl multipliziert werden. Der formelmäßige Zusammenhang unterscheidet sich nur wenig von der Gl. (5.81)

$$L \approx \left[(N/w)^2 \frac{\mu_0 A}{l/w + d/2{,}2} \right] \cdot w^2 = N^2 \frac{\mu_0 A}{l/w + d/2{,}2} \,. \tag{5.82}$$

Ein großes Problem bei der Realisierung möglichst idealer Induktivitäten sind die parasitären, d.h. unerwünschten Eigenschaften der induktiven Bauelemente in Form von Verlustmechanismen und **Wicklungskapazitäten**. Da im Betrieb zwischen den Anschlussklemmen eine Spannung liegt, die sich über die einzelnen Windungen aufteilt, besteht zwischen den benachbarten Windungen ein Potentialunterschied und damit ein elektrisches Feld. Zwischen den einzelnen Windungen existieren also Teilkapazitäten, die sich in einem Ersatzschaltbild als eine zwischen den Anschlussklemmen, d.h. parallel zur Spule liegende Gesamtkapazität bemerkbar machen. Die ▶Abb. 5.41 zeigt ein einfaches Ersatzschaltbild einer realen Spule. Der Widerstand R repräsentiert z.B. den ohmschen Widerstand der Kupferwicklung und die **Hystereseverluste** infolge der Ummagnetisierungsvorgänge in einem permeablen Kernmaterial bei zeitabhängigen Strömen (vgl. Kap. 6.5.2).

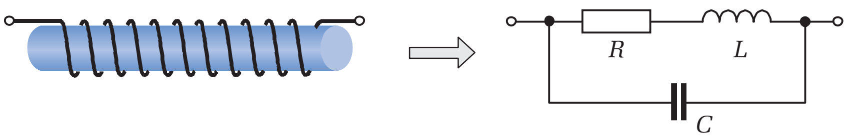


Abbildung 5.41: Ersatzschaltbild einer realen Spule

In vielen praktischen Anwendungen wie z.B. bei Filterspulen sollte die Wicklungskapazität möglichst minimal sein. Das lässt sich dadurch erreichen, dass Windungen, zwischen denen ein großer Potentialunterschied besteht wie z.B. zwischen der ersten und letzten Windung möglichst weit auseinander liegen. Die in dieser Hinsicht optimale Lösung stellt die einlagige Spule dar, den ungünstigsten Fall bildet die Spule mit genau zwei Lagen, da hier Anfang und Ende der Wicklung unmittelbar übereinanderliegen. Zur Verdeutlichung dieser komplizierten Zusammenhänge zeigt die ▶Abb. 5.42 den Kapazitätsverlauf als Funktion der Windungszahl bzw. der Lagenzahl für ein konkretes Zahlenbeispiel (Wickelkörper eines ETD34-Kerns mit einem Durchmesser von 13,4 mm, mehrlagige Wicklung mit einem Draht des Durchmessers 0,3 mm, 61 Windungen/Lage).

Ist die zur Realisierung einer geforderten Induktivität benötigte Windungszahl so groß, dass mehrere Lagen erforderlich sind, dann können die Windungen gemäß Abb. 5.39c auf mehrere Kammern verteilt werden, wobei jeweils eine Kammer zuerst vollgewickelt wird, bevor mit der nächsten begonnen wird. Theoretisch geht die Wicklungskapazität bei n Kammern um den Faktor n^2 zurück, in der Praxis wird diese Reduzierung wegen der geringen Distanz zwischen den Kammern jedoch nur zum Teil erreicht.

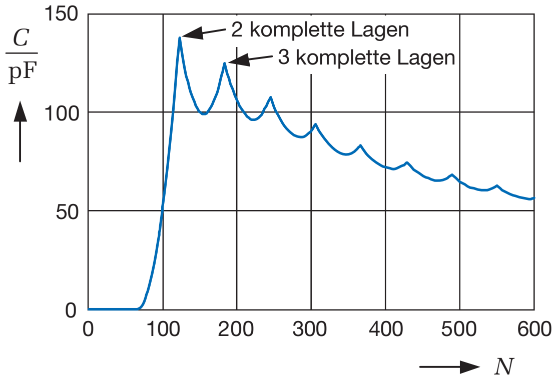


Abbildung 5.42: Kapazitätsverlauf als Funktion der Windungszahl N

5.15.2 Planare Luftspulen

Eine andere Bauform von Luftspulen sind die so genannten planaren Spulen. Diese werden direkt auf den Leiterplatten realisiert, indem aus der zunächst vollständigen Kupferbeschichtung eine z.B. spiralförmige Leiterbahn geätzt wird, deren Anfang und Ende die Anschlüsse für die Spule darstellen. Das Prinzip der mehrlagigen Spulen lässt sich auch in der planaren Technologie realisieren, indem mehrere spiralförmige Strukturen mit sehr dünnen Isolationszwischenlagen übereinandergelegt und durch die Schichten hindurch miteinander verschaltet werden.

Gegenüber den im folgenden Abschnitt beschriebenen Spulen mit hochpermeablen Kernen besitzen die Luftspulen nicht nur einen Kostenvorteil, sie sind insbesondere unabhängig von den nichtlinearen Materialeigenschaften (Permeabilitäten).

5.15.3 Spulen mit hochpermeablen Kernen

Zur Realisierung größerer Induktivitätswerte werden die Spulen auf hochpermeable Kerne gewickelt. Auch hier gibt es unzählige unterschiedliche Variationen. Bei den Stabkernspulen werden die Wickelanordnungen in Abb. 5.39 auf zylindrische Stäbe aus permeablem Material geschoben. Mit dieser Bauform sind allerdings auch nur begrenzte Induktivitätswerte realisierbar. In dem Stab ist die Feldstärke wegen der großen Permeabilität sehr klein, d.h. die magnetische Feldstärke wird in den Außenraum verdrängt, der hier wie ein großer Luftspalt wirkt.

Als geschlossene magnetische Kreise werden Ringkerne verwendet. Da diese aber nicht so leicht zu bewickeln sind, werden alternative Bauformen bevorzugt, bei denen die Wicklung zunächst auf einen Kunststoffwickelkörper aufgebracht und dieser mit den aus zwei Teilen bestehenden Kernen zusammengebaut wird. Die ▶Abb. 5.43 zeigt eine mit einem E-Kern realisierte Spule sowie zwei Beispiele für mögliche Kernformen, eine E-Kernhälfte und eine auch als Schalenkern bezeichnete P-Kernhälfte (*P*otcore). Ein eventuell erforderlicher Luftspalt wird üblicherweise im Mittelschenkel realisiert.

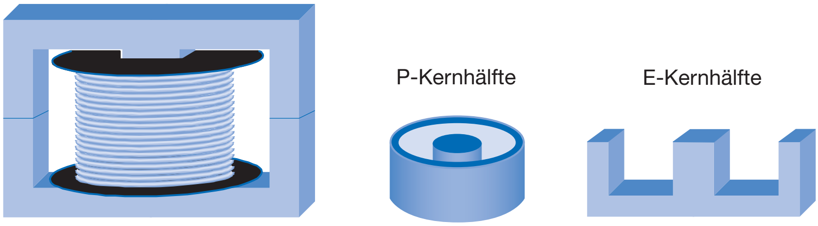


Abbildung 5.43: Ferritkernspule mit E-Kern und handelsübliche Kernformen

Bei Frequenzen im unteren kHz-Bereich werden vorzugsweise Eisenlegierungen als Kernmaterialien verwendet. Die Sättigung tritt bei diesen Materialien erst bei Flussdichten oberhalb von 1 T auf. Wegen der guten elektrischen Leitfähigkeit können allerdings so genannte Wirbelströme induziert werden (vgl. Kap. 6), die zu erhöhten Kernverlusten führen. Aus diesem Grund bestehen diese Kerne aus dünnen Blechpaketen, wobei die Bleche zur Unterbrechung möglicher Strompfade elektrisch gegeneinander isoliert sind.

Im Frequenzbereich bis einige MHz werden aus Metalloxiden (Eisen, Zink, Mangan, Nickel) gesinterte Ferritkerne verwendet. Der Vorteil dieser Materialien besteht in der wesentlich geringeren elektrischen Leitfähigkeit. Allerdings tritt die Sättigung schon bei Flussdichten im Bereich 300 ... 450 mT auf, bei steigenden Temperaturen liegen diese Grenzwerte noch niedriger. Die Curie-Temperatur liegt im Bereich 200 ... 250°C.

ZUSAMMENFASSUNG

- **Gleichströme** erzeugen zeitlich **konstante Magnetfelder**. Das magnetische Feld ist ein Wirbelfeld, die Feldlinien umschließen den stromdurchflossenen Leiter.
- **Bewegte Ladungen** bzw. Ströme **erfahren Kräfte** in einem Magnetfeld. Die Kraft auf eine bewegte Ladung ist proportional zur magnetischen Flussdichte. Ihre Richtung steht senkrecht auf der von der Flussdichte und der Bewegungsrichtung der Ladungsträger aufgespannten Ebene. Gleich gerichtete Ströme ziehen sich an, entgegengesetzt gerichtete Ströme stoßen einander ab.
- Das Integral der **Flussdichte** über eine Fläche bezeichnen wir als den **magnetischen Fluss**, der die Fläche durchsetzt. Da es keine magnetischen Einzelladungen gibt, verschwindet der magnetische Fluss durch eine geschlossene Hüllfläche.
- Neben der magnetischen Flussdichte wird ein zweiter Feldvektor, die **magnetische Feldstärke**, eingeführt. Das längs eines geschlossenen Weges gebildete Integral des Skalarprodukts aus magnetischer Feldstärke und vektoriellem Wegelement entspricht dem von dem Integrationsweg umschlossenen Strom. Für einfache, meist symmetrische stromdurchflossene Leiteranordnungen lässt sich aus dieser Aussage die ortsabhängige Feldverteilung bestimmen.
- Stabmagnete und gleichstromdurchflossene Zylinderspulen erzeugen **gleiche Magnetfeldverteilungen**. Das Verhalten der Magnete lässt sich mithilfe atomarer Stromschleifen erklären.
- Magnetische Kreise lassen sich mit den gleichen Gesetzmäßigkeiten wie elektrische Stromkreise behandeln. In den Gleichungen entsprechen sich elektrischer Strom und magnetischer Fluss, elektrische Spannung und Durchflutung, elektrischer und magnetischer Widerstand.
- Bei einer Stromschleife bezeichnen wir das Verhältnis aus dem von der Schleife insgesamt erzeugten magnetischen Fluss und dem verursachenden Strom als Induktivität. Diese Eigenschaft beschreibt die Fähigkeit einer Anordnung, **magnetische Energie** zu **speichern**.
- Zur Realisierung **großer Induktivitätswerte** können Kerne aus **hochpermeablem Material** und aus vielen Windungen bestehende Leiterschleifen verwendet werden.
- Um den Einfluss der nichtlinearen Materialeigenschaften zu minimieren, werden die Kerne mit Luftspalten versehen. Bereits bei sehr kleinen Luftspalten ist der überwiegende Teil der magnetischen Energie in dem Luftspalt lokalisiert.

Übungsaufgaben

CWS COMPANION WEBSITE
Lösungen

Aufgabe 5.1 Kraftberechnung im Magnetfeld

Die im Querschnitt dargestellte Leiteranordnung ist in z-Richtung unendlich ausgedehnt. An den Stellen $x = -a$ und $x = a$ befinden sich zwei Linienleiter, die von den Gleichströmen $I_1 = I/2$ und $I_2 = I/2$ mit der im Bild angegebenen Orientierung durchflossen werden. Der Rückleiter besteht aus einem Hohlzylinder mit dem Radius b und einer vernachlässigbar kleinen Wandstärke. Er wird von dem über den Querschnitt des Rückleiters homogen verteilten Gleichstrom $I_3 = -I$ durchflossen.

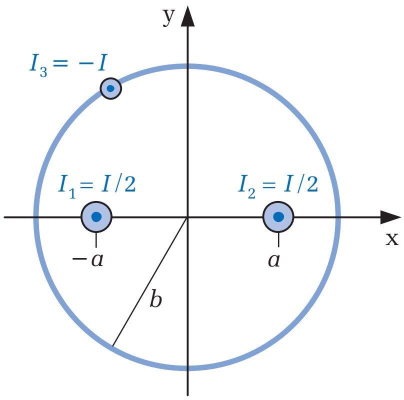


Abbildung 5.44: Leiteranordnung

1. Bestimmen Sie das magnetische Feld $\vec{\mathbf{H}}(x,y)$ im gesamten Raum, indem Sie die Beiträge der einzelnen Leiter überlagern.
2. Welche auf die Länge l bezogene Kraft $\vec{\mathbf{F}}$ wirkt auf den bei $x = -a$ befindlichen Linienleiter?

Aufgabe 5.2 Drehmomentberechnung (Prinzip des Drehspulinstruments)

In einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{e}}_y B_0$ ist eine rechteckige Leiterschleife um die z-Achse des kartesischen Koordinatensystems drehbar gelagert. Die Leiterschleife besitzt die Höhe h und die Breite b. Der Abstand d zwischen den Stromzuführungen sei vernachlässigbar klein. ▶Abb. 5.45a zeigt den Schnitt durch eine Ebene $z = z_0$ mit $0 < z_0 < h$ bei einem Winkel $\varphi > 0$, Abb. 5.45b zeigt die Vorderansicht bei dem Winkel $\varphi = 0$. Diese Anordnung kann zur Messung eines die Leiterschleife durchfließenden Gleichstromes I verwendet werden.

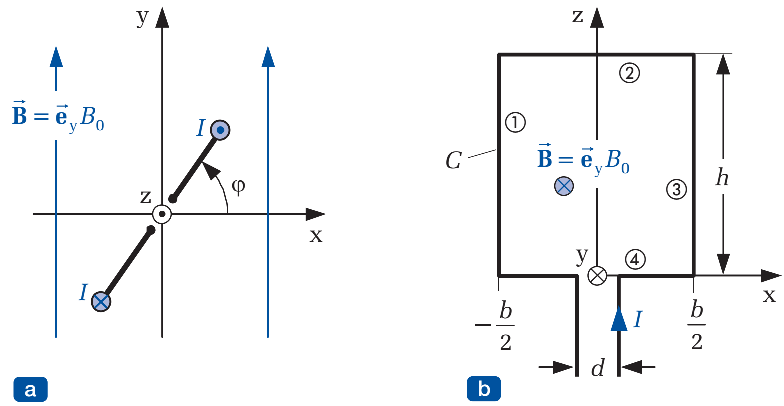


Abbildung 5.45: Im externen Magnetfeld drehbar gelagerte Leiterschleife

1. Bestimmen Sie die Teilkräfte $\vec{\mathbf{F}}_1$ bis $\vec{\mathbf{F}}_4$ auf die vier Leiterstücke der Kontur C in Abhängigkeit des Winkels φ und des Stromes I.
2. Bestimmen Sie das Drehmoment auf die Leiterschleife.

Aufgabe 5.3 Hall-Effekt

Die ▶Abb. 5.46 zeigt einen Ausschnitt aus einem rechteckigen Leiter der Breite b und der Dicke d, der von einem Strom I in der angegebenen Richtung durchflossen wird. Der Leiter befindet sich in einem x-gerichteten homogenen Magnetfeld der Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$.

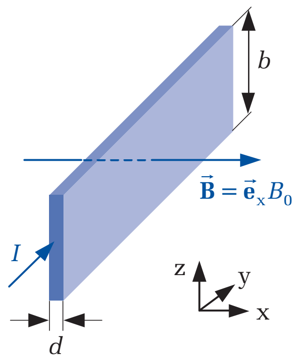


Abbildung 5.46: Stromdurchflossener Leiter im homogenen Magnetfeld

1. Bestimmen Sie die Kraftwirkungen auf die bewegten Ladungsträger.
2. Bestimmen Sie die sich zwischen oberer und unterer Berandung des Leiters einstellende Hall-Spannung (benannt nach dem amerikanischen Physiker E. H. Hall, 1855 – 1938).
3. Bestimmen Sie die Anzahl der am Ladungstransport beteiligten Elektronen pro Volumen.

Aufgabe 5.4 Feldstärkeberechnung

Das in z-Richtung als unendlich lang angenommene Koaxialkabel in ▶Abb. 5.47 führt im Innenleiter einen Gleichstrom I, der im Außenleiter wieder zurückfließt.

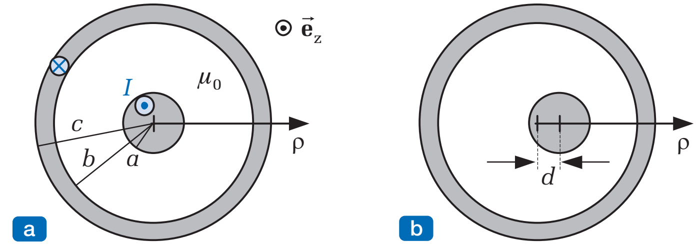


Abbildung 5.47: Querschnitt durch ein Koaxialkabel

Berechnen Sie die magnetische Feldstärke im gesamten Bereich $0 \leq \rho < \infty$ für die beiden Fälle: a) die beiden Leiter besitzen die gleiche Symmetrieachse und b) der Mittelleiter ist um den Abstand d aus dem Mittelpunkt verschoben.

Aufgabe 5.5 Induktivitätsberechnung

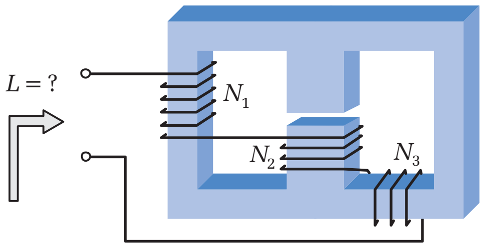


Abbildung 5.48: Permeabler Kern mit Luftspalt

Die beiden Außenschenkel des aus Ferritmaterial (Permeabilitätszahl μ_r) bestehenden Kerns besitzen die Querschnittsfläche A und die effektive Weglänge l_A. Der Mittelschenkel besitzt die Querschnittsfläche $2A$ und die effektive Weglänge l_M. Aus dem Mittelschenkel wird ein Teil des Ferritmaterials entfernt, so dass ein Luftspalt der Länge d entsteht.

Auf dem Kern befinden sich drei in Reihe geschaltete Wicklungen mit den Windungszahlen N_1, N_2 und N_3. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die magnetische Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ homogen über den Kernquerschnitt verteilt ist. Der Streufluss beim Luftspalt wird vernachlässigt, so dass für den Luftspalt der gleiche Querschnitt wie für den Mittelschenkel angenommen werden kann.

1. Erstellen Sie ein vollständiges magnetisches Ersatzschaltbild.
2. Berechnen Sie die Flüsse Φ_L und Φ_R durch den linken und den rechten Schenkel sowie Φ_M durch den Mittelschenkel.
3. Berechnen Sie die Induktivität der Anordnung in Abhängigkeit von den gegebenen Parametern.

Das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld

6

ÜBERBLICK

Einführung

» Das dem folgenden Kapitel zugrunde liegende Faraday'sche Induktionsgesetz wird oft als das wichtigste Gesetz auf dem Gebiet der elektromagnetischen Erscheinungen bezeichnet. Ohne den Vorgang der Induktion gäbe es z.B. keine Umwandlung mechanischer in elektrische Energie in Generatoren und keine Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. Der Siegeszug der Elektrotechnik hätte in diesem Maße nicht stattgefunden und unser Alltag würde völlig anders aussehen.

Während wir bisher ausschließlich zeitlich konstante elektrische und magnetische Felder betrachtet haben, werden wir uns jetzt den zeitabhängigen Vorgängen zuwenden. Das Induktionsgesetz besagt, dass ein sich zeitlich änderndes magnetisches Feld ein elektrisches Feld hervorruft. Umgekehrt ruft ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld auch bei nicht vorhandener Leitungsstromdichte ein magnetisches Feld hervor. Die beiden Felder sind im Gegensatz zu den in den vorangegangenen Kapiteln behandelten zeitunabhängigen Fällen nicht mehr entkoppelt. Aus diesem Grund spricht man allgemein von elektromagnetischen Feldern.

Als Beispiele für den Induktionsvorgang werden wir in diesem Kapitel das Prinzip des Wechselspannungsgenerators und den Transformator bzw. Übertrager behandeln. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- das Induktionsgesetz von Faraday zu verstehen und anzuwenden,
- die Probleme bei der Spannungsmessung bei zeitlich veränderlichen Größen zu verstehen,
- die Zusammenschaltung von nicht gekoppelten Induktivitäten zu vereinfachen,
- die Netzwerkgleichungen für gekoppelte Induktivitäten anzuwenden,
- die Gegeninduktivitäten einfacher Anordnungen zu berechnen,
- die im magnetischen Feld gespeicherte Energie zu berechnen,
- die Spannungserzeugung mittels Generator und einfache Schaltungen beim Dreiphasen-Drehstromsystem zu verstehen sowie
- verschiedene Ersatzschaltbilder für Übertrager abzuleiten.

6.1 Das Induktionsgesetz

Eine mit der Geschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}}$ bewegte Ladung Q erfährt in einem Magnetfeld $\vec{\mathbf{B}}$ nach den Aussagen in Kap. 5.3 eine Kraft $\vec{\mathbf{F}} = Q\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Betrachten wir nun die in ▶Abb. 6.1 dargestellte Anordnung, bei der sich ein geradliniger Leiter in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte $\vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{e}}_z B$ mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{e}}_x v_x$ bewegt. Ein innerhalb des Leiters befindliches Elektron der Elementarladung $-e$ erfährt nach Gl. (5.10) die in negative y-Richtung wirkende Lorentz-Kraft

$$\vec{\mathbf{F}}_m = -e\,\vec{\mathbf{e}}_x v_x \times \left(-\vec{\mathbf{e}}_z B\right) = -\vec{\mathbf{e}}_y\, e v_x B\,. \tag{6.1}$$

Wir verwenden an dieser Stelle den Index m als Hinweis darauf, dass diese Kraftkomponente von dem Magnetfeld hervorgerufen wird.

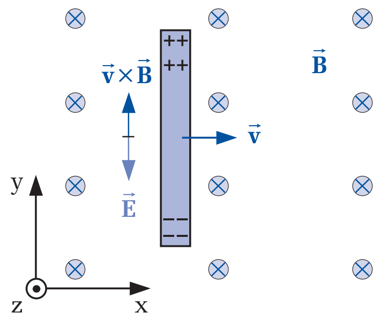


Abbildung 6.1: Im Magnetfeld bewegter Leiter

Die freien Elektronen werden sich in Richtung auf das untere Ende des Stabes bewegen, so dass sich die in Abb. 6.1 angedeutete Ladungsverteilung mit einem Elektronenüberschuss am unteren Ende und einem Elektronenmangel am oberen Ende des leitenden Stabes einstellt. Infolge dieser Ladungstrennung entsteht ein zusätzliches, in die Abbildung eingetragenes elektrisches Feld $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{e}}_y E$, das von den positiven zu den negativen Ladungsträgern gerichtet ist. Die von diesem Feld hervorgerufene Coulomb'sche Kraft

$$\vec{\mathbf{F}}_e \overset{(1.3)}{=} Q\vec{\mathbf{E}} = -e\,\left(-\vec{\mathbf{e}}_y E\right) = \vec{\mathbf{e}}_y\, eE \tag{6.2}$$

versucht, die Elektronen in die positive y-Richtung zu bewegen. Im stationären Zustand wird sich innerhalb des Leiters eine Ladungsverteilung einstellen, bei der sich die Kräfte (6.1) und (6.2) im Gleichgewicht befinden, so dass die resultierende Gesamtkraft auf die Ladungsträger verschwindet. Aus dieser Bedingung kann die elektrische Feldstärke bestimmt werden

$$\vec{\mathbf{F}}_m + \vec{\mathbf{F}}_e = \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{bzw.} \qquad E = v_x B\,. \tag{6.3}$$

Diese besitzt überall im Stab den gleichen Wert. Ein Beobachter, der sich mit dem Stab bewegt, wird feststellen, dass sich die beiden Felder $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{e}}_y E = -\vec{\mathbf{e}}_y v_x B$ und $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = +\vec{\mathbf{e}}_y v_x B$ innerhalb des Leiters kompensieren, so dass er im Leiterinneren kein elektrisches Feld beobachten kann.

Stellen wir uns nun vor, dass sich der Leiter auf zwei leitenden Schienen bewegt, die entsprechend ▶Abb. 6.2 an ihrem Ende mit einem ohmschen Widerstand R abgeschlossen sind. Solange die gegenüber Abb. 6.1 hinzugefügten Leiterteile ortsfest sind, kann in ihnen wegen $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$ keine Feldstärkekomponente $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ auftreten. Bezeichnet l die Länge des Stabes, dann wird infolge der von den positiven zu den negativen Ladungen zeigenden elektrischen Feldstärke eine Spannung U_{12} zwischen der oberen Schiene 1 und der unteren Schiene 2 entstehen, die durch Integration der elektrischen Feldstärke entlang der Koordinate y von der oberen Schiene bei $y = l$ bis zur unteren Schiene bei $y = 0$ berechnet werden kann

$$U_{12} \overset{(1.30)}{=} \int_l^0 \left(-\vec{\mathbf{e}}_y E\right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_y \, dy = -E \int_l^0 dy = l E \overset{(6.3)}{=} l v_x B \,. \tag{6.4}$$

Außerhalb des bewegten Leiters, also in den Schienen und im Widerstand, kann diese Spannung nicht durch die entgegengesetzt gerichtete Komponente $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ kompensiert werden.

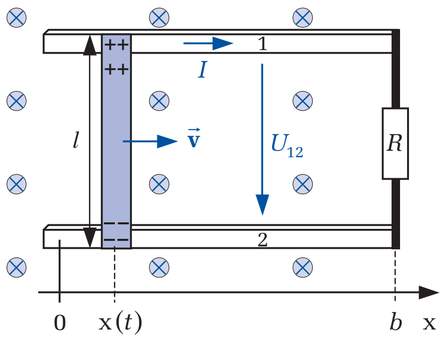


Abbildung 6.2: Teilweise bewegte Leiterschleife

Nehmen wir zur Vereinfachung die Widerstände des bewegten Stabes und der Schienen als vernachlässigbar klein gegenüber dem Widerstand R an, dann fällt die gesamte Spannung U_{12} an dem Widerstand R ab. Nach dem Ohm'schen Gesetz fließt also ein Strom $I = U_{12}/R$ in der eingezeichneten Richtung durch den geschlossenen Stromkreis, bestehend aus Schienen, bewegtem Stab und Widerstand. Die sich über die Außenanschlüsse ausgleichenden Ladungen können nicht mehr zur elektrischen Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$ in dem sich bewegenden Leiter beitragen. Das Kräftegleichgewicht ist nun nicht mehr gewährleistet, so dass die weiterhin vorhandene Feldstärke $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ in dem Stab eine erneute Trennung von Ladungen verursacht. Die abfließenden Ladungen werden somit nachgeliefert und das Kräftegleichgewicht bzw. die Feldfreiheit in dem bewegten Leiter bleibt weiterhin gewährleistet[1].

Aus den bisherigen Gleichungen ist zu erkennen, dass die Geschwindigkeit v_x als Proportionalitätsfaktor in die Lorentz-Kraft (6.1) und damit in die Spannung U_{12} nach Gl. (6.4) eingeht. Die von der Leiterschleife umschlossene Fläche nimmt bei der x-gerichteten Bewegung des Stabes kontinuierlich ab, diese Abnahme ist ebenfalls proportional zur Geschwindigkeit v_x. Wir werden daher versuchen, die Geschwindigkeit aus den Gleichungen zu eliminieren und einen direkten Zusammenhang zwischen der Spannung U_{12} und der zeitlichen Änderung der Schleifenfläche bzw. der zeitlichen Änderung des die Schleifenfläche $A(t)$ durchsetzenden magnetischen Flusses $\Phi(t) = BA(t)$ herzustellen.

Zur mathematischen Beschreibung legen wir das Koordinatensystem so fest, dass sich der Stab zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $\mathrm{x}(0) = 0$ befindet (Abb. 6.2). Die Breite der Leiterschleife zum Zeitpunkt $t = 0$ wird mit b bezeichnet. Mit der von der Zeit abhängigen Position des Stabes $\mathrm{x}(t)$ kann die ebenfalls von der Zeit abhängige Schleifenfläche $A(t)$ in der Form

$$A(t) = lb - l\mathrm{x}(t) \tag{6.5}$$

geschrieben werden. Ihre zeitliche Änderung lässt sich durch die Geschwindigkeit $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ ausdrücken

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = -l\frac{\mathrm{dx}(t)}{\mathrm{d}t} = -l\,v_x\,. \tag{6.6}$$

Die Zusammenfassung der beiden Gleichungen (6.4) und (6.6) liefert den gesuchten Zusammenhang zwischen der in der Schleife induzierten Spannung U_{12} und der zeitlichen Änderung der von der Stromschleife umfassten Fläche

$$U_{12} \overset{(6.4)}{=} l\,v_x B \overset{(6.6)}{=} -B\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6.7}$$

Die nach Voraussetzung zeitlich konstante Flussdichte B kann als konstanter Faktor unter die Zeitableitung gezogen werden, so dass man durch Erweiterung mit dem Skalarprodukt $(-\vec{\mathbf{e}}_z)\bullet(-\vec{\mathbf{e}}_z) = 1$ die vektorielle Darstellung

$$U_{12} = -B\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[BA(t)\big] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[(-\vec{\mathbf{e}}_z)B\bullet(-\vec{\mathbf{e}}_z)A(t)\big] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\vec{\mathbf{B}}\bullet\vec{\mathbf{A}}(t)\big] \tag{6.8}$$

erhält. Die in dieser Gleichung eingeführte vektorielle Fläche $\vec{\mathbf{A}}(t) = -\vec{\mathbf{e}}_z A(t)$ hat die gleiche Richtung wie die Flussdichte. Das in der rechten eckigen Klammer stehende Skalarprodukt entspricht nach Gl. (5.30) dem Fluss durch die von der Leiterschleife

1 Der in der geschlossenen Leiterschleife fließende Strom I verursacht seinerseits ebenfalls eine Flussdichte, die bei der Betrachtung berücksichtigt werden muss. Wir werden diesen Beitrag jedoch vorübergehend vernachlässigen und ausschließlich den Fluss infolge des *externen* Magnetfeldes $\vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{e}}_z B$ betrachten. Auf den anderen Fall kommen wir in Kapitel 6.2 zurück.

aufgespannte Fläche. Das Flächenintegral in Gl. (5.30) geht nämlich für den hier vorliegenden Sonderfall einer von den Koordinaten x und y unabhängigen Flussdichte in eine einfache Multiplikation von Flussdichte und Fläche über. Resultierend kann die induzierte Spannung als die negative zeitliche Ableitung des die Leiterschleife durchsetzenden magnetischen Flusses dargestellt werden

$$U_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \,. \tag{6.9}$$

Da die Richtung der Spannung U_{12} am Verbraucher R mit der Richtung des Stromes I in der Abb. 6.2 übereinstimmt, gilt die Aussage, dass die Zählrichtung des Stromes und die des magnetischen Flusses durch die von der Schleife aufgespannte Fläche im Sinne einer Rechtsschraube einander zugeordnet sind.

Lässt man den Wert des Widerstandes R nach unendlich gehen, dann leistet der verschwindende Strom I keinen Beitrag zu dem Fluss durch die Schleife und man kann an den offenen Klemmen eine **induzierte Spannung** $U_{12} = U$ in der in Abb. 6.2 eingezeichneten Richtung messen, deren Wert nach Gl. (6.9) gegeben ist. Resultierend kann die betrachtete Anordnung durch das in ▶Abb. 6.3 dargestellte Ersatzschaltbild beschrieben werden.

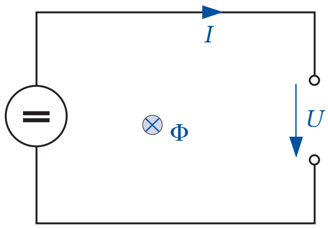


Abbildung 6.3: Ersatzschaltbild

Für einen endlichen Widerstand R zwischen den beiden Klemmen fließt ein Strom $I > 0$ in der in Abb. 6.3 angedeuteten Richtung. Der sich bewegende Stab besitzt zwar für einen mitbewegten Beobachter kein elektrisches Feld in seinem Inneren, bezüglich der Anschlussklemmen an seinen beiden Enden wirkt er aber gegenüber der ortsfesten Leiteranordnung wie eine Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U.

Bei der Bewegungsrichtung des Stabes in Abb. 6.2 nimmt der Fluss durch die zeitlich kleiner werdende Fläche ab, d.h. es gilt $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t < 0$ bzw. $-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = U > 0$. Der Strom in Abb. 6.3 hat bei der angegebenen Zählrichtung einen positiven Wert und erzeugt seinerseits eine Flussdichte, die die Leiterschleife in $-\vec{\mathbf{e}}_z$-Richtung durchsetzt. Eine Abnahme des magnetischen Flusses durch die Schleife infolge der Bewegung ruft also einen Strom in der Leiterschleife hervor, der so gerichtet ist, dass das von ihm erzeugte Magnetfeld dieser Flussänderung entgegenwirkt.

Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge betrachten wir die zeitabhängigen Funktionsverläufe in ▶Abb. 6.4. Wir nehmen an, dass sich der Stab nur in dem Zeitintervall $t_0 \le t \le t_1$ mit der konstanten Geschwindigkeit v_x bewegt. Den die Schleifenfläche infolge des externen Magnetfeldes $\vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{e}}_z B$ in negative z-Richtung durchsetzenden Fluss wollen wir als Φ_{ext} bezeichnen. Er besitzt in den Zeitbereichen $t < t_0$ und $t > t_1$ wegen $v_x = 0$ einen konstanten Wert und nimmt in dem Zeitintervall $t_0 \le t \le t_1$ wegen der nach Gl. (6.6) linear abnehmenden Fläche ebenfalls linear ab.

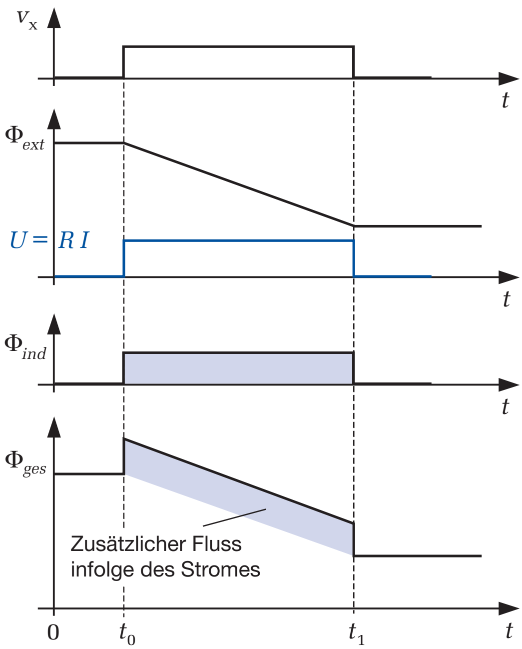


Abbildung 6.4: Zusammenstellung der zeitabhängigen Größen

Die in der Schleife nach Gl. (6.9) induzierte Spannung besitzt die gleiche Zeitabhängigkeit wie die Geschwindigkeit. Unter der Voraussetzung eines hinreichend großen Widerstandes R kann die Selbstinduktivität der Leiterschleife vernachlässigt werden, so dass der induzierte Strom[2] nach dem Ohm'schen Gesetz ebenfalls diese Zeitabhängigkeit aufweist.

Der von dem Strom hervorgerufene Fluss Φ_{ind} ist ebenfalls in negative z-Richtung gerichtet[3] und überlagert sich dem Fluss Φ_{ext}. An dem zeitlichen Verlauf des Gesamtflusses $\Phi_{ges} = \Phi_{ext} + \Phi_{ind}$ ist zu erkennen, dass die zeitliche Abnahme noch immer mit

2 Nach dem Faraday'schen Gesetz (6.15) wird kein Strom, sondern eine Spannung induziert. Wenn hier dennoch von einem *induzierten Strom* gesprochen wird, dann ist damit der von der induzierten Spannung in einer geschlossenen Leiterschleife hervorgerufene Strom gemeint.

3 Der Fluss Φ_{ind} ist zum leichteren Verständnis in dem Zeitbereich $t_0 \le t \le t_1$ als konstante Größe dargestellt. Wegen der abnehmenden Schleifenfläche wird er aber ebenfalls mit der Zeit geringer werden.

der gleichen Steigung erfolgt, dass aber während der Zeit, in der die Abnahme stattfindet, ein konstanter Anteil überlagert ist. Zusammengefasst gilt:

Merke

Der in einer Leiterschleife induzierte Strom wirkt der ihn verursachenden Flussänderung entgegen.

Bemerkung: Spannung bzw. Strom wird nur in Zeiten eines sich ändernden Flusses induziert, d.h. nicht der Fluss, sondern dessen zeitliche Änderung soll verhindert werden.

Eine ähnliche Aussage lässt sich auch für die Kraft auf den bewegten Stab machen. Der induzierte Strom fließt innerhalb des Stabes in y-Richtung. Nach Gl. (5.5) erfährt der Stab eine Kraft

$$\vec{\mathbf{F}} = I\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}}\,l \times \left(-\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{z}}\right) B = -\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}}\,I\,l\,B\,, \tag{6.10}$$

die in die negative x-Richtung zeigt, also **entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung** orientiert ist und daher versucht, die Bewegung zu verhindern. Bekannt sind diese Zusammenhänge unter dem Begriff der Lenz'schen Regel (nach H. F. E. Lenz, 1804 – 1865):

Merke

Der induzierte Strom ist so gerichtet, dass er die Ursache seines Entstehens zu verhindern sucht.

Die zu leistende mechanische Arbeit bei der Bewegung des Stabes in x-Richtung entgegen der Kraft (6.10) wird zunächst im Stab in elektrische Energie und schließlich am Widerstand in Wärme umgewandelt.

Die Beziehung (6.9) gilt bisher nur unter der Voraussetzung, dass die zeitliche Änderung des Flusses durch eine Bewegung zustande kommt, während die Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ zeitlich konstant ist. In diesem Fall spricht man von der **Bewegungsinduktion**. Ein typisches Anwendungsbeispiel sind die Generatoren zur Spannungserzeugung, bei denen sich Leiterschleifen in einem Magnetfeld bewegen (vgl. Kap. 6.6).

Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in Gl. (6.9) kann aber auch bei zeitlich unveränderlicher Fläche entstehen, wenn sich die die Fläche durchsetzende Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ selbst zeitlich ändert. Diesen Fall wollen wir jetzt etwas näher untersuchen. Betrachten wir als Zwischenschritt zunächst die Anordnung in ▶Abb. 6.5. Die Flussdichte sei weiterhin zeitlich konstant und ortsunabhängig. Den Widerstand verschieben wir in den Bereich der ortsfesten Schiene, die Leiterschleife enthält jetzt zwei sich mit gleicher Geschwindigkeit in x-Richtung bewegende Stäbe.

Die bisherige Betrachtung für den sich bewegenden Stab kann jetzt für beide Stäbe übernommen werden. Die in dem zugehörigen Ersatzschaltbild eingetragenen induzierten Spannungen sind betragsmäßig gleich groß $U_1 = U_2$. Wegen der zeitlich konstanten Schleifenfläche A ist nämlich die Flussänderung durch die Fläche Null und die resultierende Spannung U am Widerstand verschwindet $U = U_1 - U_2 = 0$, so dass sich die beiden auf der linken Seite des Bildes angedeuteten Ströme gegenseitig kompensieren und die Leiterschleife insgesamt stromlos bleibt.

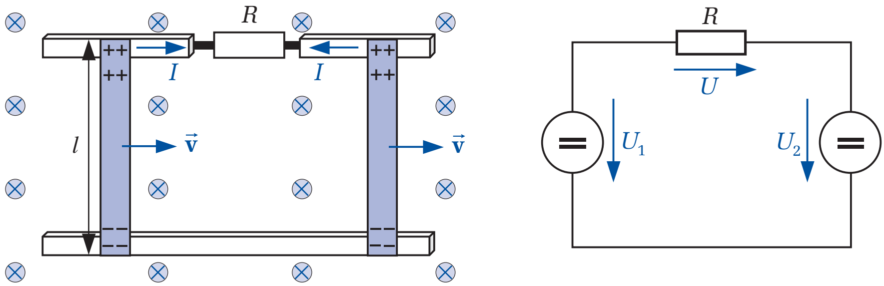


Abbildung 6.5: Im homogenen Magnetfeld bewegte Leiterschleife und zugehöriges Ersatzschaltbild

Die Problemstellung aus Abb. 6.5 wird jetzt auf den Fall eines inhomogenen, d.h. ortsabhängigen Magnetfeldes erweitert (▶Abb. 6.6). Als Sonderfall betrachten wir eine von der Koordinate x abhängige Flussdichte

$$\vec{\mathbf{B}}(\mathrm{x}) = -\vec{\mathbf{e}}_z B(\mathrm{x}) = -\vec{\mathbf{e}}_z B_0 \frac{\mathrm{x}}{a}, \tag{6.11}$$

deren lineare Zunahme mit der Koordinate x in Abb. 6.6 angedeutet ist. Die beliebige Abmessung a ist lediglich aus Dimensionsgründen eingeführt und spielt bei der Betrachtung keine Rolle. Die beiden Stäbe bewegen sich wieder mit der gleichen Geschwindigkeit und befinden sich zu einem beliebigen Zeitpunkt an den Stellen x_1 bzw. x_2. Unter der Voraussetzung eines hinreichend großen Widerstandes $R \to \infty$, d.h. der Beitrag des Schleifenstromes I zur Flussdichte darf wieder vernachlässigt werden, erhält man für die am Widerstand R abfallende Spannung U mit Gl. (6.7) den Ausdruck

$$U = U_1 - U_2 \overset{(6.7)}{=} l\,v_\mathrm{x} B(\mathrm{x}_1) - l\,v_\mathrm{x} B(\mathrm{x}_2) = -l\,v_\mathrm{x}\left[B(\mathrm{x}_2) - B(\mathrm{x}_1)\right]. \tag{6.12}$$

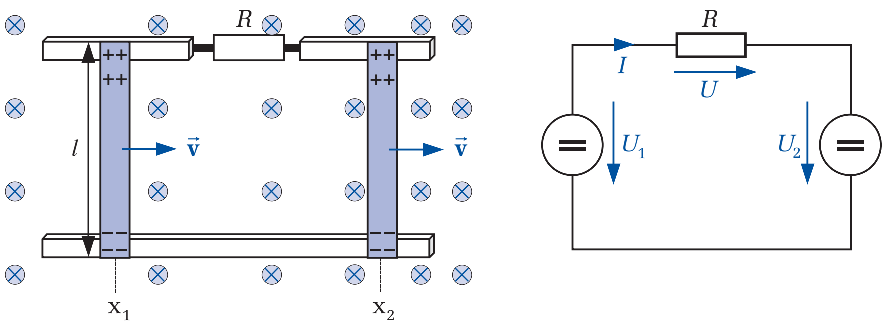


Abbildung 6.6: Im inhomogenen Magnetfeld bewegte Leiterschleife und zugehöriges Ersatzschaltbild

Die Flussdichte an der Stelle x_2 lässt sich aber mit der Vorgabe (6.11) durch die Flussdichte an der Stelle x_1 und ihre Änderung in Richtung der Koordinate x ausdrücken

$$B(x_2) = B(x_1) + \frac{dB}{dx} \cdot (x_2 - x_1)\,, \tag{6.13}$$

so dass man für die an dem Widerstand R entstehende Spannung das Ergebnis

$$U \overset{(6.12,6.13)}{=} -v_x \frac{dB}{dx} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)\, l}_{A} = -A \frac{dB}{dx}\frac{dx}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{6.14}$$

erhält. Da in diesem Beispiel die Fläche zeitlich konstant ist, darf A unter die Zeitableitung gezogen werden und man erhält auch hier wieder das Ergebnis (6.9).

Betrachten wir noch einmal die Zuordnung von Stromrichtung und Flussänderung. Der in $-\vec{\mathbf{e}}_z$-Richtung positiv gezählte Fluss durch die Schleife wird entsprechend der Vorgabe (6.11) größer bei der Bewegung der Stäbe in x-Richtung. Wegen $d\Phi/dt > 0$ gilt aber $U = -d\Phi/dt < 0$. Die in Abb. 6.6 eingetragene Spannung U ist negativ, d.h. auch der Wert des Stromes I ist negativ. Ein *positiver* Strom fließt also entgegen der in der Abbildung eingezeichneten Richtung und ruft eine zusätzliche Flussdichte durch die Schleifenfläche hervor, die z-gerichtet ist und somit entgegengesetzt zu dem betragsmäßig ansteigenden $-$z-gerichteten Fluss infolge des externen Magnetfeldes.

Auch in diesem Beispiel können wir die in der Leiterschleife induzierte Spannung nach Gl. (6.14), die für $R \to \infty$ an den offenen Klemmen als Leerlaufspannung gemessen werden kann, interpretieren als eine Folge des die Leiterschleife durchsetzenden, sich zeitlich ändernden magnetischen Flusses. Für die induzierte Spannung ist es unerheblich, ob die Änderung des Flusses durch die Bewegung der Schleife in einem ortsabhängigen Magnetfeld zustande kommt oder ob die in Ruhe befindliche Schleife von einem sich zeitlich ändernden magnetischen Fluss durchsetzt wird.

Im Fall der ruhenden Leiterschleife spricht man von **Ruheinduktion**. Eine wichtige Anwendung werden wir bei den Transformatoren und Übertragern in Kap. 6.7 kennen lernen.

In den bisherigen Beispielen hat sich der die Schleifenfläche durchsetzende Fluss zeitlich *linear* geändert. In diesen Fällen wird nach Gl. (6.9) eine zeitlich konstante Spannung induziert. Bewegt man dagegen die Stäbe in den bisherigen Beispielen mit einer variablen Geschwindigkeit $v_x(t)$, dann ist auch die induzierte Spannung eine Funktion der Zeit. Zur Kennzeichnung zeitabhängiger Spannungen $u(t)$ und Ströme $i(t)$ werden im Folgenden Kleinbuchstaben verwendet. Zusammenfassend gilt der durch Messungen von Faraday bestätigte allgemeine Zusammenhang

$$u(t) = R\,i(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \overset{(5.30)}{=} -\frac{d}{dt}\iint_A \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}\,. \tag{6.15}$$

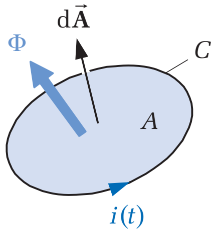


Abbildung 6.7: Zum Induktionsgesetz von Faraday

Dieser als **Faraday'sches Induktionsgesetz** bezeichnete **Erfahrungssatz** besagt, dass in einem dünnen Leiter der Kontur C ein Strom $i(t)$ zum Fließen kommt, wenn sich der mit der Leiterschleife C verkettete magnetische Fluss Φ zeitlich ändert ▶Abb. 6.7. Bezeichnet R den gesamten entlang der Leiterschleife verteilten Widerstand, dann entspricht die entlang der Leiterkontur C entstehende Umlaufspannung der negativen zeitlichen Änderung des die Leiterschleife rechtshändig zur Stromrichtung durchsetzenden Flusses.

Im Gegensatz zu der Kirchhoff'schen Maschenregel (3.4) verschwindet die Umlaufspannung entlang der Schleife bei zeitabhängigen Vorgängen nicht mehr. Wird die Leiterschleife unterbrochen, dann kann diese Spannung an den beiden offenen Klemmen gemessen werden. Die Besonderheiten bei der Spannungsmessung im zeitabhängigen Fall werden in Beispiel 6.2 behandelt.

Die auf einem Abschnitt der Leiterschleife entstehende Spannung kann auch als Linienintegral der elektrischen Feldstärke entlang dieses Leiterabschnittes geschrieben werden. Zur Berechnung der Umlaufspannung ist dann das Ringintegral der elektrischen Feldstärke über die geschlossene Schleife zu berechnen. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass sich das Umlaufintegral auf die Leiterkontur bezieht und sich im Falle einer bewegten Leiterschleife entsprechend mitbewegt. Als besonderen Hinweis darauf, dass die elektrische Feldstärke in dem bewegten Bezugssystem der Leiterschleife und nicht wie die magnetische Flussdichte in dem System des ruhenden Beobachters einzusetzen ist, verwenden wir die Bezeichnung $\vec{\mathbf{E}}'$. Das Induktionsgesetz nimmt dann die Form

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}}' \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_A \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \tag{6.16}$$

an. In ruhenden Systemen entfällt die Unterscheidung zwischen $\vec{\mathbf{E}}'$ und $\vec{\mathbf{E}}$ und es kann $\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{E}}$ gesetzt werden. Die Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ muss über eine Fläche A integriert werden, die in beliebiger Form über die Leiterschleife aufgespannt werden darf, deren Berandung aber durch die Kontur C vorgegeben ist.

Diese Gleichung ist von viel größerer Allgemeingültigkeit, als die bisherigen Ableitungen vermuten lassen. Sie ist nämlich nicht an das Vorhandensein eines Leiters gebunden und gilt z.B. auch im Vakuum. Ein zeitlich sich änderndes Magnetfeld ruft nach Gl. (6.16) immer auch ein elektrisches Feld hervor. Ein Konvektionsstrom $i(t)$ kann jedoch nur dann fließen, wenn auch ein Leiter vorhanden ist.

Beispiel 6.1: Auswertung des Linienintegrals

Um den Zusammenhang zwischen den beiden Bezugssystemen noch einmal zu verdeutlichen, wollen wir das Ringintegral auf der linken Seite der Gl. (6.16) für das Beispiel der teilweise bewegten Leiterschleife in Abb. 6.2 auswerten.

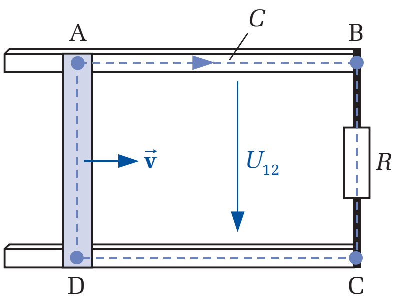


Abbildung 6.8: Auswertung des Linienintegrals

Lösung:

Zu diesem Zweck unterteilen wir den Integrationsweg gemäß ▶Abb. 6.8 in vier Teilabschnitte

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}}'\cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_A^B \vec{\mathbf{E}}'\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_B^C \vec{\mathbf{E}}'\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_C^D \vec{\mathbf{E}}'\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_D^A \vec{\mathbf{E}}'\cdot d\vec{\mathbf{s}} = \underbrace{\int_A^B \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}}_{0} + \underbrace{\int_B^C \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}}_{U_{12}=U} + \underbrace{\int_C^D \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}}_{0} + \int_D^A \vec{\mathbf{E}}'\cdot d\vec{\mathbf{s}}. \tag{6.17}$$

In den ortsfesten Leiterabschnitten (Schienen und Widerstand) gilt $\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{E}}$. Eine Unterscheidung zwischen bewegtem und nicht bewegtem Bezugssystem gibt es hier nicht. Die als widerstandslos angenommenen Schienen liefern keinen Beitrag zur Spannung und die am Widerstand R abfallende Spannung U_{12} wurde bereits in Gl. (6.4) angegeben. Besondere Aufmerksamkeit verdient aber der Integrationsweg zwischen den Punkten D und A. Hier gilt nämlich die Beziehung

$$\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{6.18}$$

zwischen den Feldgrößen in den beiden Bezugssystemen. Wir haben bereits im Zusammenhang mit der Abb. 6.1 festgestellt, dass sich die Ladungsträger in dem bewegten Stab so verteilen, dass sie keine Kraft mehr erfahren. Diese Aussage ist aber gleichbedeutend mit der bereits ebenfalls festgestellten Tatsache, dass das mitbewegte Ladungsteilchen oder ein mit dem Stab bewegter Beobachter das Innere des Stabes als feldfrei erkennt. Wegen $\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{0}}$ liefert der Integrationsweg zwischen den Punkten D und A keinen Beitrag und aus dem Ringintegral (6.17) erhalten wir als Ergebnis wieder die Spannung U bzw. bei beliebig zeitabhängiger Geschwindigkeit die dann ebenfalls zeitabhängige Spannung $u(t)$ entsprechend Gl. (6.15).

Das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke verschwindet in dem Beispiel im Gegensatz zu der Beziehung (1.22) nicht mehr. Bei der Definition der elektrischen Spannung U in Gl. (1.30) als das Wegintegral der elektrischen Feldstärke haben wir aber die Tatsache verwendet, dass die zwischen zwei Punkten existierende Spannung unabhängig von der Wahl des Integrationsweges ist. Diese Bedingung ist im Zusammenhang mit der Gl. (1.22) zwar immer erfüllt, bei den Gleichungen (6.15) und (6.16) gilt diese Voraussetzung aber nicht mehr. Die Angabe einer zwischen zwei Punkten vorliegenden Spannung ist bei den zeitlich veränderlichen magnetischen Feldern nicht mehr eindeutig, sie ist nur noch sinnvoll bei gleichzeitiger Angabe des zugehörigen Integrationsweges. Zur Veranschaulichung dieser Problematik betrachten wir ein konkretes Beispiel.

Beispiel 6.2: Spannungsmessung bei zeitlich veränderlichen Größen

Eine sehr lange Spule wird von einem zeitabhängigen Strom $i_1(t)$ durchflossen, der einen im Folgenden als bekannt vorausgesetzten magnetischen Fluss $\Phi(t)$ durch den Spulenquerschnitt erzeugt. Das Feld außerhalb der Spule kann unter der Voraussetzung einer sehr langen Spule vernachlässigt werden. Eine quadratische Schleife mit vier ohmschen Widerständen R umfasst die Spule. Die Widerstandswerte R sind hinreichend groß gewählt, so dass der Strom $i_2(t)$ sehr klein ist und sein Beitrag zum Magnetfeld ebenfalls vernachlässigt werden kann. Zwischen den Punkten A und B soll die Spannung mit einem idealen Voltmeter (Innenwiderstand $R_V \to \infty$) gemessen werden.

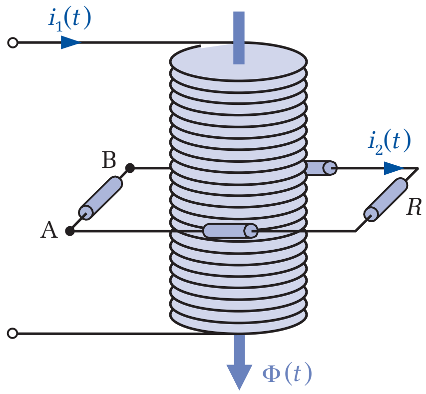


Abbildung 6.9: Betrachtete Anordnung

Lösung:

Zum Nachweis der Abhängigkeit der Spannungsmessung vom Integrationsweg bzw. von dem Verlauf der Messschleife betrachten wir die in ▶Abb. 6.10 dargestellte Ebene der Stromschleife mit den an den beiden Ecken A und B angeschlossenen Voltmetern VM_1 und VM_2. Für die gezeigte Position der Messgeräte sollen die beiden Spannungsverläufe $u_1(t)$ und $u_2(t)$ berechnet werden.

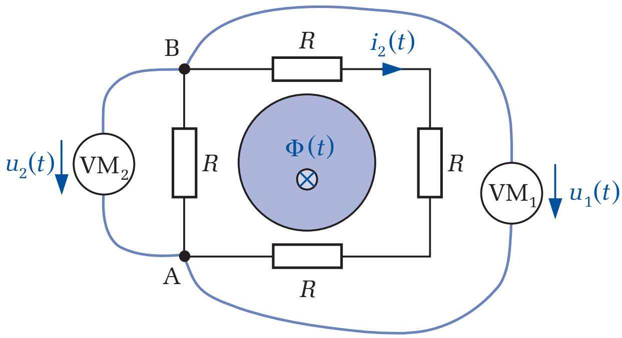


Abbildung 6.10: Messanordnung

Die Anwendung des Induktionsgesetzes (6.15) auf die quadratische Leiterschleife mit dem Strom $i_2(t)$ und dem Gesamtwiderstand $4R$ liefert den Ausdruck

$$4R\, i_2(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)\,. \tag{6.19}$$

Der Strom $i_2(t)$ ist in der geforderten Weise rechtshändig zu dem die umschlossene Schleife durchsetzenden magnetischen Fluss $\Phi(t)$ orientiert.

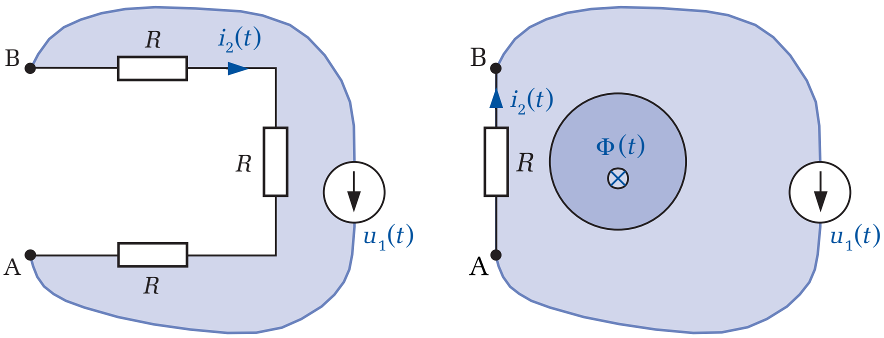


Abbildung 6.11: Zur Berechnung der Spannung $u_1(t)$

Zur Berechnung der von dem Voltmeter VM$_1$ angezeigten Spannung $u_1(t)$ kann das Faraday'sche Gesetz (6.16) mit $\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{E}}$ auf die beiden unterschiedlichen Leiterschleifen der ▶Abb. 6.11 angewendet werden. Dabei ist zu beachten, dass in den Anschlussleitungen zum Messinstrument kein Strom fließt, d.h. die elektrische Feldstärke verschwindet wegen $\vec{\mathbf{J}} = \kappa\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ in diesen Leiterstücken. Für die Schleife im linken Teilbild gilt

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = 3R\; i_2(t) - u_1(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = 0 \quad\rightarrow\quad u_1(t) = 3R\; i_2(t)\,. \tag{6.20}$$

Wegen des feldfreien Raumes außerhalb der Zylinderspule tritt kein magnetischer Fluss durch die markierte Fläche, so dass die Spannung $u_1(t)$ den angegebenen Wert annimmt. Betrachtet man dagegen die Schleife im rechten Teilbild, dann wird der Fluss durch die Zylinderspule eingeschlossen. Man erhält jedoch erwartungsgemäß das gleiche Ergebnis

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = R\, i_2(t) + u_1(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) \overset{(6.19)}{=} 4R\, i_2(t) \quad \rightarrow \quad u_1(t) = 3R\, i_2(t)\,. \tag{6.21}$$

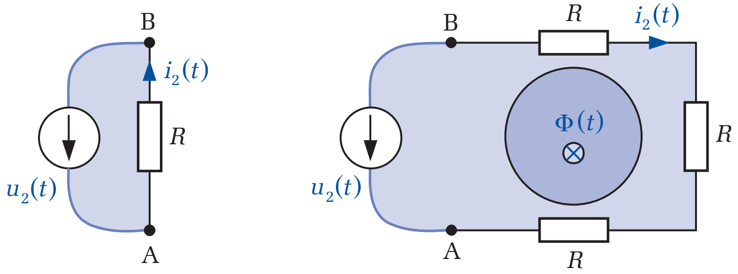


Abbildung 6.12: Zur Berechnung der Spannung $u_2(t)$

Für die Spannung am Voltmeter VM_2 erhält man mit den analogen Überlegungen aus den beiden Teilbildern der ▶Abb. 6.12 die Ergebnisse

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = R\, i_2(t) + u_2(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = 0 \quad \rightarrow \quad u_2(t) = -R\, i_2(t) \tag{6.22}$$

bzw.

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = 3R\, i_2(t) - u_2(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) \overset{(6.19)}{=} 4R\, i_2(t) \quad \rightarrow \quad u_2(t) = -R\, i_2(t)\,. \tag{6.23}$$

Die von den beiden Messgeräten angezeigten Spannungen unterscheiden sich also und zwar genau um die zeitliche Änderung des von den beiden Messschleifen umschlossenen magnetischen Flusses

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = u_1(t) - u_2(t) \overset{(6.20,6.22)}{=} 4R\, i_2(t) \overset{(6.19)}{=} -\frac{d}{dt}\Phi(t)\,. \tag{6.24}$$

Fassen wir noch einmal zusammen: Sofern zeitlich veränderliche Magnetfelder von der Schleife umfasst werden, ist das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke verschieden von Null. Die Gl. (1.22) verliert ihre Gültigkeit und damit auch die Kirchhoff'sche Maschenregel (3.4). Daher zeigen die beiden Messinstrumente unterschiedliche Spannungen, obwohl sie an den gleichen Punkten A und B angeschlossen sind. Die Spannung U_{AB} ist also, wie eingangs erwähnt, nur noch eindeutig bei gleichzeitiger Angabe des Integrationsweges bzw. des Verlaufs der Messschleifen im betrachteten Beispiel.

6.2 Die Selbstinduktion

Wir erweitern jetzt die Anordnung in Abb. 6.7, indem wir die ruhende Leiterschleife an eine zeitlich veränderliche Spannungsquelle $u_0(t)$ anschließen. Der von der Spannungsquelle in der Leiterschleife hervorgerufene zeitlich veränderliche Strom $i(t)$ verursacht einen zeitlich veränderlichen Fluss $\Phi(t)$ durch die Schleifenfläche (▶Abb. 6.13). Während wir in dem vorangegangenen Kapitel den Fluss durch die Schleife infolge eines externen Magnetfeldes betrachtet haben, teilweise unter Berücksichtigung des Flusses infolge des induzierten Stromes, untersuchen wir jetzt den Fall, dass der Fluss ausschließlich von dem Strom in der betrachteten Leiterschleife selbst verursacht wird. Die Überlagerung der beiden Fälle behandeln wir in Kap. 6.4.

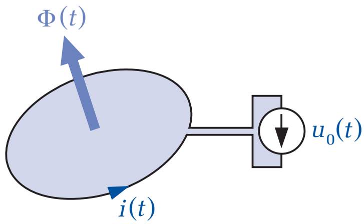


Abbildung 6.13: Zum Induktionsgesetz von Faraday

Nach dem Induktionsgesetz (6.16) muss das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke gleich sein zu der negativen zeitlichen Änderung des die Schleife durchsetzenden Flusses. Bezeichnet R den ohmschen Widerstand der Leiterschleife, dann gilt mit Gl. (6.16) der Maschenumlauf

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = R\,i(t) - u_0(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6.25}$$

Der von dem Strom verursachte magnetische Fluss hängt von der Geometrie der Leiterschleife und gegebenenfalls von den Materialeigenschaften (Permeabilitäten) ab. In der Gleichung (5.56) haben wir das Verhältnis aus dem die Schleife durchsetzenden magnetischen Fluss Φ zu dem ihn verursachenden Strom I als Induktivität L bezeichnet. Mit diesem Zusammenhang führt die Gl. (6.25) auf die Beziehung

$$u_0 \overset{(6.25)}{=} R\,i + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \overset{(5.56)}{=} R\,i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L\,i)\,. \tag{6.26}$$

Unter den beiden Voraussetzungen:

a Die Geometrie der Anordnung ändert sich nicht mit der Zeit und

b die Permeabilität vorhandener Materialien kann als konstant, d.h. unabhängig von dem jeweiligen Wert des zeitlich veränderlichen Stromes angesehen werden (dies gilt bei Verwendung von ferromagnetischen Materialien nur im linearen Teil der B-H-Kurve (vgl. Abb. 5.21)), ist die Induktivität zeitlich konstant und die zeitliche Ableitung beschränkt sich allein auf den Strom $i(t)$. Die Gl. (6.26) nimmt dann die vereinfachte Form

$$u_0 = R\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u_R + u_L \tag{6.27}$$

an, in der das Produkt $Ri = u_R$ den Spannungsabfall an dem ohmschen Widerstand der Leiterschleife repräsentiert. Die Induktivität der Leiterschleife verursacht ebenfalls einen mit u_L bezeichneten Spannungsabfall, der proportional zur Induktivität und zur zeitlichen Änderung des Stromes ist. Das zu dieser Gleichung gehörende Ersatzschaltbild ist in ▶Abb. 6.14 dargestellt.

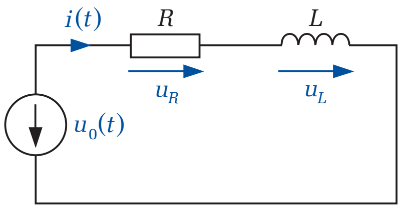


Abbildung 6.14: Ersatzschaltbild für die Anordnung der Abb. 6.13

Merke

An der Induktivität ist die Spannung proportional zur zeitlichen Änderung des Stromes

$$\boxed{u_L = L\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}}\,. \tag{6.28}$$

Die Zählpfeile für Strom und Spannung entsprechen dem Verbraucherzählpfeilsystem.

6.3 Einfache Induktivitätsnetzwerke

Betrachten wir nun die Zusammenschaltung mehrerer voneinander unabhängiger, d.h. magnetisch nicht gekoppelter Spulen. Die gegenseitige Beeinflussung (Kopplung) von Spulen wird in Kap. 6.4 untersucht. Die Aufgabe besteht wieder darin, eine Anordnung mit mehreren Induktivitäten L_k mit $k = 1,2,\ldots$ durch eine einzige Induktivität L_{ges} zu ersetzen, die bezogen auf die beiden Anschlussklemmen das gleiche Verhalten aufweist.

Bei der **Reihenschaltung** werden alle Induktivitäten von dem gleichen Strom durchflossen. Aus dem Spannungsumlauf erhält man die Gleichung

$$u_{ges} = \sum_{k=1}^{n} u_k \overset{(6.28)}{=} \sum_{k=1}^{n} L_k \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L_{ges}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \to \quad \boxed{L_{ges} = \sum_{k=1}^{n} L_k}\,. \tag{6.29}$$

Die gesamte an den Eingangsklemmen wirksame Induktivität ist durch die Summe der einzelnen Induktivitäten gegeben.

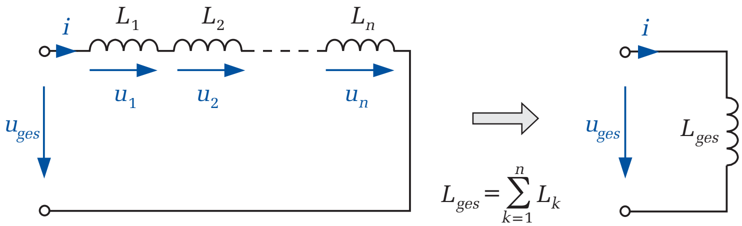


Abbildung 6.15: Reihenschaltung von Induktivitäten

Bei der **Parallelschaltung** teilt sich der Gesamtstrom $i_{ges}(t)$ auf die einzelnen Induktivitäten auf. Da außerdem an allen Spulen die gleiche Spannung liegt, gilt die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{ges} \overset{(3.7)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n} i_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} \overset{(6.28)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k} u = \frac{1}{L_{ges}} u \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{L_{ges}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}}\,. \tag{6.30}$$

Für den Sonderfall zweier parallel geschalteter Induktivitäten L_1 und L_2 folgt daraus

$$L_{ges} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\,. \tag{6.31}$$

Bei der Parallelschaltung ist die Gesamtinduktivität stets kleiner als die kleinste vorkommende Einzelinduktivität.

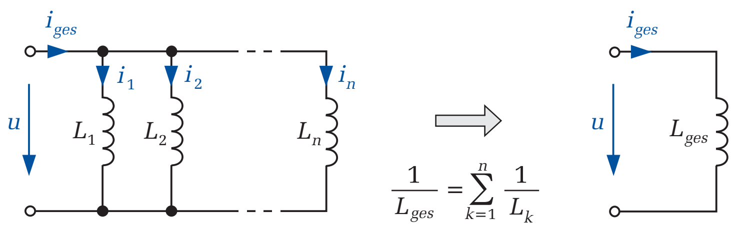


Abbildung 6.16: Parallelschaltung von Induktivitäten

Merke

Bei der Reihenschaltung nicht gekoppelter Spulen addieren sich die Induktivitäten der einzelnen Spulen, bei der Parallelschaltung ist der Kehrwert der Gesamtinduktivität gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelinduktivitäten.

6.4 Die Gegeninduktion

In Kap. 1.20 haben wir bereits eine Situation beschrieben, bei der infolge mehrerer leitender Elektroden kapazitive Netzwerke entstehen. Wir haben dann nicht mehr von einem Kondensator, sondern von Teilkapazitäten gesprochen. Eine analoge Situation entsteht, wenn sich mehrere Spulen (Stromkreise) gegenseitig beeinflussen, indem der von einer Spule erzeugte magnetische Fluss eine andere Spule durchsetzt und entsprechend dem Faraday'schen Gesetz dort eine Spannung induziert. Diesen Vorgang bezeichnet man als **Gegeninduktion**. Als Folge davon können die einzelnen Stromkreise nicht mehr unabhängig voneinander betrachtet werden. Sie sind magnetisch miteinander **gekoppelt**. Um diese Situation einigermaßen übersichtlich zu gestalten, betrachten wir die in ▶Abb. 6.17 dargestellte Anordnung mit lediglich zwei Stromkreisen.

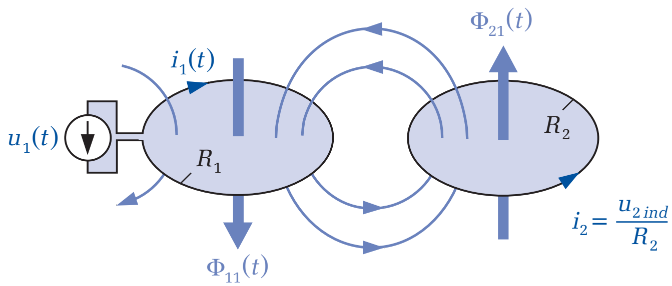


Abbildung 6.17: Gekoppelte Stromkreise

Die Leiterschleife 1 ist an eine zeitlich veränderliche Spannung $u_1(t)$ angeschlossen, die einen Strom $i_1(t)$ in der angegebenen Richtung verursacht. Das von diesem Strom hervorgerufene Magnetfeld erzeugt insgesamt einen magnetischen Fluss Φ_{11} durch die Leiterschleife 1, wobei die Zählrichtungen von Strom $i_1(t)$ und Fluss Φ_{11} rechtshändig miteinander verknüpft sind.

Ein Teil des Flusses Φ_{11}, in Abb. 6.17 durch zwei Feldlinien angedeutet, wird auch die Leiterschleife 2 durchsetzen. Diesen Fluss bezeichnen wir mit Φ_{21}, wobei der erste Index die Schleife kennzeichnet, die von dem Fluss durchsetzt wird, der zweite Index dagegen den Strom, der den Fluss erzeugt.

Besitzt die Leiterschleife 1 den Widerstand R_1, dann folgt aus dem Induktionsgesetz der bereits in Gl. (6.26) angegebene Zusammenhang für die Schleife 1 (Der Fluss infolge des Stromes i_2 in der zweiten Leiterschleife wird zunächst noch vernachlässigt.)

$$u_1 \overset{(6.26)}{=} R_1 i_1 + \frac{\mathrm{d}\Phi_{11}}{\mathrm{d}t} \overset{(5.56)}{=} R_1 i_1 + L_{11} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} . \tag{6.32}$$

In dieser Gleichung bezeichnet L_{11} die **Selbstinduktivität** der Leiterschleife 1 (diese entspricht der bisher als Induktivität bezeichneten Eigenschaft einer einfachen, nicht gekoppelten Spule). Infolge des sich zeitlich ändernden Flusses Φ_{21} wird in der Leiterschleife 2 eine Spannung $u_{2ind}(t)$ entsprechend Gl. (6.15) induziert, die ebenfalls proportional zur zeitlichen Änderung des diese Schleife durchsetzenden Flusses und damit proportional zur Stromänderung in der ersten Schleife ist

$$u_{2ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = -\,L_{21} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} . \tag{6.33}$$

Die Richtung, in die der Fluss durch die Schleife 2 positiv gezählt wird, ist zunächst willkürlich. Wir entscheiden uns für die auf der rechten Seite der Abb. 6.17 dargestellte Orientierung. Mit der Festlegung einer Zählrichtung für Φ_{21} ist aber gleichzeitig auch die Zählrichtung für die induzierte Spannung bzw. den induzierten Strom aufgrund der Zuordnung in Gl. (6.15) bzw. Abb. 6.7 eindeutig festgelegt. Die rechtshändige Verknüpfung führt auf die im Bild dargestellte Richtung für den induzierten Strom $i_2(t)$. Wird die Leiterschleife 2 unterbrochen, dann verschwindet der Strom $i_2(t)$ und die induzierte Spannung (6.33) kann an den offenen Klemmen gemessen werden. Sie hat die gleiche Bezugsrichtung wie der in der Abbildung eingetragene Strom.

Den in der Gl. (6.33) eingeführten Proportionalitätsfaktor L_{21} bezeichnet man als **Gegeninduktivität** zwischen der Schleife 1 und der Schleife 2. Während die Selbstinduktivität immer positiv ist, kann je nach Festlegung von Zählrichtungen und Geometrie der Schleifen zueinander die Gegeninduktivität auch negative Werte annehmen (vgl. Beispiel 6.3).

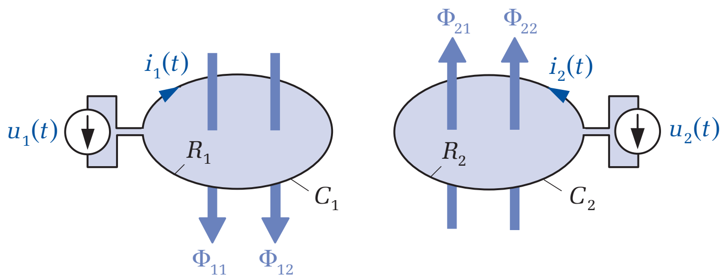


Abbildung 6.18: Gekoppelte Stromkreise mit gleich gerichteten Flüssen

Wenn in der Leiterschleife 2 ein Strom $i_2(t)$ fließt, unabhängig davon, ob er durch die Flussänderung infolge des zeitlich veränderlichen Stromes $i_1(t)$ induziert oder ob er von einer Quellenspannung $u_2(t)$ verursacht wird, dann wird dieser Strom $i_2(t)$ ebenfalls einen magnetischen Fluss Φ_{22} erzeugen, der die Schleife 2 durchsetzt und mit dem Strom rechtshändig verknüpft ist. Derjenige Teil des Flusses Φ_{22}, der auch mit der Schleife 1 verkettet ist, wird jetzt als Φ_{12} bezeichnet. Insgesamt erhalten wir wieder die gleichen Beziehungen (6.32) und (6.33), jedoch mit vertauschten Indizes 1 und 2. Da die induzierte Spannung in einer Leiterschleife nach dem Induktionsgesetz proportional ist zur zeitlichen Änderung des gesamten die Schleife durchsetzenden Flusses, müssen die beiden beschriebenen Fälle überlagert werden. Die Gl. (6.32) ist also unvollständig, da sie den Einfluss eines eventuell vorhandenen Stromes $i_2(t)$ auf die Schleife 1 bisher noch nicht berücksichtigt. Nachdem wir uns die wechselseitige Beeinflussung veranschaulicht haben, betrachten wir direkt den in ▶Abb. 6.18 dargestellten allgemeinen Fall mit zwei Leiterschleifen, die beide an jeweils eine Spannungsquelle angeschlossen sind.

Nach Anwendung des Induktionsgesetzes (6.16) auf die beiden Schleifen finden wir die Beziehungen

$$\oint_{C_1} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -u_1 + R_1\, i_1 = -\frac{d\Phi_{1ges}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\Phi_{11} + \Phi_{12}\right) \tag{6.34}$$

und

$$\oint_{C_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -u_2 + R_2\, i_2 = -\frac{d\Phi_{2ges}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\Phi_{21} + \Phi_{22}\right), \tag{6.35}$$

die sich mithilfe der in Gl. (6.33) eingeführten Gegeninduktivitäten als Gleichungssystem darstellen lassen

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + \frac{d}{dt}\left(\Phi_{11} + \Phi_{12}\right) = R_1 i_1 + L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= R_2 i_2 + \frac{d}{dt}\left(\Phi_{21} + \Phi_{22}\right) = R_2 i_2 + L_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}\,. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Die Beziehung für die Schleife 1 unterscheidet sich von der Gl. (6.32) nur dadurch, dass jetzt nicht nur Φ_{11}, sondern der gesamte die Schleife durchsetzende Fluss berücksichtigt wird.

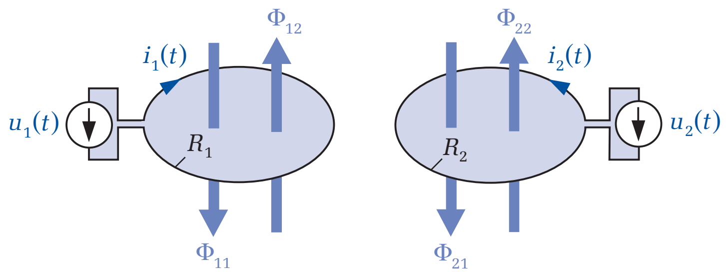


Abbildung 6.19: Gekoppelte Stromkreise mit entgegengesetzt gerichteten Flüssen

An dieser Stelle soll noch eine Bemerkung zur Wahl der Flussrichtung gemacht werden. Bei festgelegter Zählrichtung für den Strom in einer Schleife ist der zugehörige Fluss durch die betreffende Schleife festgelegt. Der Fluss Φ_{11} ist rechtshändig mit i_1 und der Fluss Φ_{22} rechtshändig mit i_2 verknüpft. Der Fluss durch die jeweils andere Schleife kann aber hinsichtlich seiner Orientierung frei gewählt werden. Betrachten wir z.B. die ▶Abb. 6.19, in der die beiden Flüsse Φ_{12} und Φ_{21} verglichen mit der Abb. 6.18 willkürlich anders gezählt werden, dann gilt für die Gesamtflüsse durch die Schleifen $\Phi_{1ges} = \Phi_{11} - \Phi_{12}$ und $\Phi_{2ges} = -\Phi_{21} + \Phi_{22}$.

Das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + \frac{d}{dt}\left(\Phi_{11} - \Phi_{12}\right) = R_1 i_1 + L_{11}\frac{di_1}{dt} - L_{12}\frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= R_2 i_2 + \frac{d}{dt}\left(-\Phi_{21} + \Phi_{22}\right) = R_2 i_2 - L_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt} \end{aligned} \tag{6.37}$$

ist aber identisch zur Gl. (6.36). Bei der anderen Flussorientierung unterscheiden sich einerseits die infolge der Kopplung induzierten Spannungen in den beiden Gleichungssystemen im Vorzeichen, andererseits aber unterscheiden sich die in beiden Situationen aus dem Verhältnis von Fluss zu verursachendem Strom berechneten Werte für die Gegeninduktivitäten L_{12} und L_{21} ebenfalls im Vorzeichen.

Merke

Unterstützen sich die durch die positiven Ströme hervorgerufenen Flüsse durch eine Leiterschleife, dann addieren sich die induzierten Spannungen von Selbstinduktivität und Gegeninduktivität in der zugehörigen Gleichung. Sind die Flüsse entgegengerichtet, dann geht der Beitrag infolge der Gegeninduktivität mit umgekehrtem Vorzeichen in die Gleichung ein.

Die in den Gleichungssystemen enthaltenen Induktivitätswerte können bei einer bekannten Leiteranordnung aus der Geometrie bestimmt werden. Sind zusätzlich die Schleifenwiderstände R_1 und R_2 bekannt, dann lassen sich aus den beiden Gleichungen für vorgegebene zeitabhängige Quellenspannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ die zugehörigen zeitabhängigen Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$ berechnen.

6.4.1 Die Gegeninduktivität zweier Doppelleitungen

Als Beispiel wollen wir die Gegeninduktivitäten für zwei parallel verlaufende, unendlich lange Doppelleitungen berechnen. Die in ▶Abb. 6.20 im Querschnitt dargestellte Anordnung kann als eben, d.h. unabhängig von der Koordinate senkrecht zur Zeichenebene betrachtet werden.

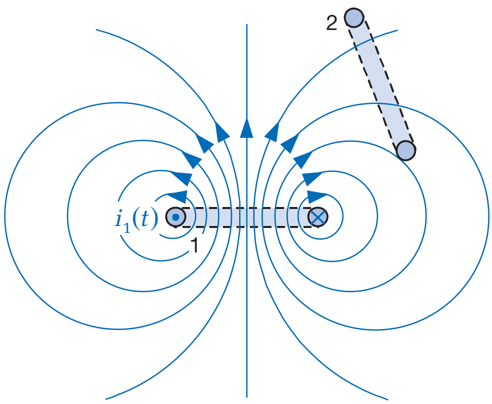


Abbildung 6.20: Feldverteilung einer stromdurchflossenen Doppelleitung

Zur Bestimmung der Gegeninduktivität L_{21} benötigen wir den Fluss Φ_{21} durch die Schleife 2 infolge des Stromes in der Schleife 1. Für die angenommene Stromrichtung $i_1(t)$ erhalten wir die in der Abbildung qualitativ dargestellte Feldverteilung. Da die Auswertung des Integrals (5.30) für diesen Feldverlauf etwas umständlich ist, wird die Berechnung in zwei Teilschritten ausgeführt. Im ersten Schritt betrachten wir nur den Fluss Φ_{21_r} durch die Schleife 2 infolge des Stromes im *rechten* Leiter der Schleife 1 (▶Abb. 6.21).

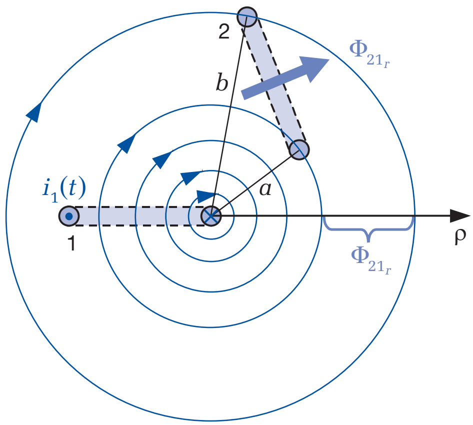


Abbildung 6.21: Beitrag des rechten Leiters zum Fluss

Das Feld dieses Linienleiters besteht aus konzentrischen Kreisen mit dem Leiter im Mittelpunkt und mit der Ortsabhängigkeit nach Gl. (5.25). Legen wir den Leiter in den Ursprung eines zylindrischen Koordinatensystems und bestimmen wir die positive Zählrichtung für den Fluss entsprechend Abb. 6.21, dann wird die Berechnung sehr einfach. Man erkennt, dass der Fluss durch die Schleife 2 durch das gesamte Feld, das sich zwischen den in der Abbildung eingetragenen beiden äußeren kreisförmigen Feldlinien befindet, gegeben ist. Bezeichnet man die Abstände zwischen dem stromführenden Leiter im Ursprung und den beiden Leitern der Schleife 2 mit a und b, dann kann die Integration der Flussdichte auch entlang der eingetragenen ρ-Achse in den Grenzen $a \leq \rho \leq b$ durchgeführt werden. Die Integration in z-Richtung wird wieder wegen der unendlich langen Anordnung für einen Abschnitt der Länge l durchgeführt. Berücksichtigt man den gegenüber der Herleitung von Gl. (5.25) jetzt in die entgegengesetzte Richtung fließenden Strom, d.h. i_1 ist mit negativem Vorzeichen in die Gleichung einzusetzen, dann gilt

$$\Phi_{21_r} \overset{(5.30)}{=} \iint_{A_2} \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \overset{(5.25)}{=} \mu_0 \int_{z=0}^{l} \int_{\rho=a}^{b} \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{-i_1}{2\pi\rho}}_{\vec{\mathbf{H}}} \cdot \underbrace{\left(-\vec{\mathbf{e}}_\varphi\right) \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}z}_{\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}} = \frac{\mu_0\, i_1}{2\pi} l \int_{\rho=a}^{b} \frac{1}{\rho} \mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0\, i_1}{2\pi} l \ln \frac{b}{a} \,. \qquad (6.38)$$

Den Beitrag Φ_{21_l} des *linken* Leiters der Schleife 1 zum Fluss durch die Schleife 2 erhalten wir mit der gleichen Vorgehensweise. Mit den jetzt in ▶Abb. 6.22 definierten

Abständen c und d kann das Ergebnis (6.38) unmittelbar übernommen werden, wobei noch ein Vorzeichenwechsel infolge der anderen Stromrichtung zu berücksichtigen ist

$$\Phi_{21_l} = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi} l \ln\frac{d}{c} . \tag{6.39}$$

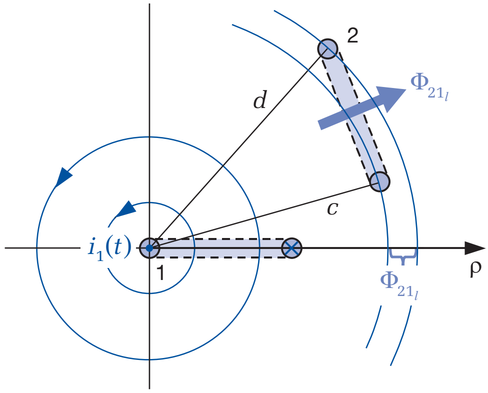


Abbildung 6.22: Beitrag des linken Leiters zum Fluss

Der Gesamtfluss Φ_{21} entspricht der Summe der beiden Teilergebnisse (6.38) und (6.39)

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} i_1 \left(\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{d}{c} \right) = \frac{\mu_0 l}{2\pi} i_1 \ln\frac{bc}{ad} . \tag{6.40}$$

Die gesuchte Gegeninduktivität ist dann nach Gl. (6.33) durch die Beziehung

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\frac{bc}{ad} \tag{6.41}$$

gegeben. Es sei noch einmal daran erinnert, dass das Ergebnis (6.41) von der Zählrichtung für den Fluss Φ_{21} abhängt. Bei entgegengesetzt gewählter Orientierung von Φ_{21} erhalten wir die Gegeninduktivität L_{21} mit einem zusätzlichen Minuszeichen.

Im nächsten Schritt berechnen wir die Gegeninduktivität L_{12}. Dazu nehmen wir einen Strom $i_2(t)$ in der Schleife 2, beispielsweise mit der in ▶Abb. 6.23 angegebenen Richtung an. Da sich die Flüsse Φ_{21} und Φ_{22} bei der gewählten Festlegung unterstützen, wird der Fluss Φ_{12} jetzt so gezählt, dass er ebenfalls den Fluss Φ_{11} unterstützt, so dass wir resultierend das Gleichungssystem (6.36) verwenden können.

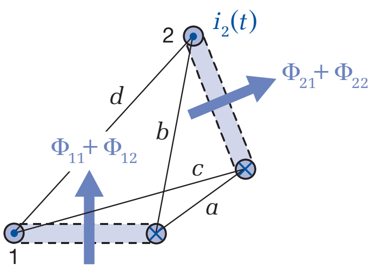


Abbildung 6.23: Orientierung der Teilflüsse

Der gesuchte Fluss Φ_{12} kann durch entsprechende Vertauschung der Abmessungen und unter Beachtung der Stromrichtungen entweder aus Gl. (6.40) übernommen oder aber durch Wiederholung der beiden Teilschritte entsprechend der Berechnung von Φ_{21} nochmals hergeleitet werden. Wir übernehmen das Ergebnis

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} i_2 \left(\ln\frac{c}{a} - \ln\frac{d}{b} \right) = \frac{\mu_0 l}{2\pi} i_2 \ln\frac{bc}{ad} \,. \tag{6.42}$$

Die zugehörige Gegeninduktivität

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\frac{bc}{ad} = L_{21} \tag{6.43}$$

besitzt den gleichen Wert wie die Gegeninduktivität in Gl. (6.41). Diese hier am Beispiel der Doppelleitungen gefundene Symmetrie-Eigenschaft lässt sich auch für allgemeine Leiteranordnungen zeigen (vgl. Kap. 6.5)

$$\boxed{L_{ik} = L_{ki}} \,. \tag{6.44}$$

Damit gilt die Aussage:

Merke

In einem System mehrerer Leiter gilt für die zwischen dem i-ten und k-ten Leiter auftretende Gegeninduktivität die Symmetrie-Eigenschaft $L_{ik} = L_{ki}$.

Da es in der Literatur üblich ist, die Gegeninduktivitäten mit M zu bezeichnen, können wir das zu verwendende Gleichungssystem (6.36) unter Berücksichtigung der Symmetrie-Eigenschaft $L_{12} = L_{21} = M$ folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= R_1 i_1(t) + L_{11}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = R_1 i_1(t) + L_{11}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2(t) &= R_2 i_2(t) + L_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = R_2 i_2(t) + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \,. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Mit den bereits in Kap. 5.13.2 berechneten Selbstinduktivitäten L_{11} bzw. L_{22} sind die Zusammenhänge zwischen den Strömen und Spannungen der beiden gekoppelten Leiterschleifen eindeutig bestimmt.

Beispiel 6.3: Berechnung der Gegeninduktivität

Die beiden Leiter einer Doppelleitung besitzen den Mittelpunktsabstand h und liegen in der Ebene $y = 0$ an den Stellen $x = \pm h/2$. Die Leiter einer zweiten Doppelleitung liegen in der Ebene $y = h$ an den Stellen $x = x_0 \pm h/2$. Zu berechnen ist die Gegeninduktivität pro Längeneinheit M/l als Funktion der Mittelpunktsposition $0 \le x_0 \le 4h$.

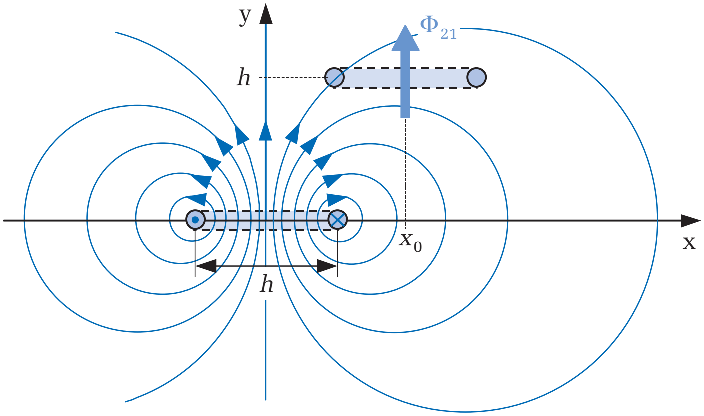


Abbildung 6.24: Zwei unendlich lange Doppelleitungen

Lösung:

Mit den Abstandsbezeichnungen in Abb. 6.23 erhalten wir aus Gl. (6.41) unmittelbar das Ergebnis

$$\frac{M}{l} = \frac{\Phi_{21}}{l\,i_1} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{bc}{ad} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(x_0-h)^2+h^2}\sqrt{(x_0+h)^2+h^2}}{\sqrt{x_0{}^2+h^2}\sqrt{x_0{}^2+h^2}} \quad \rightarrow$$

$$\frac{M/l}{\mu\mathrm{H/m}} = \frac{1}{10}\ln\frac{\left(\eta^2+2\right)^2-4\eta^2}{\left(\eta^2+1\right)^2} \quad \text{mit der Abkürzung} \quad \eta = \frac{x_0}{h}\,. \tag{6.46}$$

Den größten Wert weist die Gegeninduktivität auf, wenn die beiden Doppelleitungen exakt übereinanderliegen. Wird die obere Doppelleitung nach rechts verschoben, dann nimmt der Fluss Φ_{21} und damit auch M ab. Befindet sich diese Doppelleitung im Bereich $x_0 > 1{,}25h$, dann kehrt der Fluss sein Vorzeichen um und die in Gl. (6.45) einzusetzende Gegeninduktivität M wird negativ.

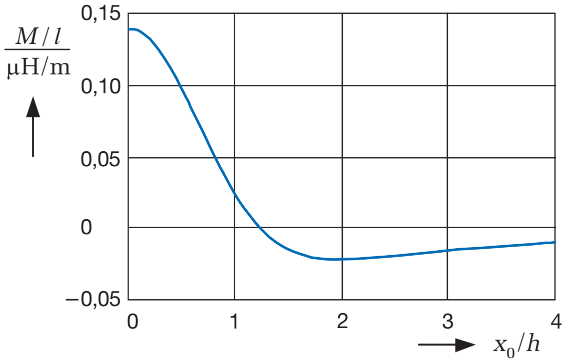


Abbildung 6.25: Gegeninduktivität pro Längeneinheit der beiden Doppelleitungen in Abb. 6.24

Zwischen diesen beiden Bereichen existiert eine Nullstelle für M. Eine solche Nullstelle tritt immer dann auf, wenn die beiden Einzelleiter (von der oberen Doppelleitung) auf der gleichen Feldlinie (hervorgerufen von der unteren Doppelleitung) liegen, so dass der Fluss Φ_{21} durch die Leiterschleife verschwindet. In diesem Fall tritt keine gegenseitige Beeinflussung zwischen den beiden Doppelleitungen auf, sie sind entkoppelt und können wie zwei voneinander unabhängige Induktivitäten behandelt werden.

6.4.2 Die Koppelfaktoren

Das Gleichungssystem (6.45) ist unabhängig von der Geometrie der Anordnung. Anders verlaufende Leiterschleifen beeinflussen lediglich die Werte der Induktivitäten. Der Wert der Gegeninduktivität M hängt nur davon ab, welcher Anteil des von einer Schleife insgesamt erzeugten magnetischen Flusses die andere Schleife durchsetzt. Diese Kopplung zwischen den beiden Schleifen kennzeichnet man durch so genannte **Koppelfaktoren**, die das Verhältnis von dem durch beide Schleifen hindurchtretenden Fluss zu dem gesamten von einer Schleife erzeugten Fluss angeben. Mit den Bezeichnungen des vorangegangenen Kapitels gilt

$$k_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{M}{L_{11}} \quad \text{und} \quad k_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = \frac{M}{L_{22}} . \tag{6.47}$$

Diese Koppelfaktoren können je nach Form der beiden Leiterschleifen oder je nach Anzahl der Windungen N_1 und N_2 sehr unterschiedliche Werte annehmen[4]. Gilt für

4 Aus diesem Grund werden die beiden Koppelfaktoren oft so definiert, dass nicht die Gesamtflüsse durch die Schleifenflächen, sondern die durch die jeweiligen Windungszahlen dividierten Flüsse ins Verhältnis gesetzt werden. Die beiden Werte $|k_{12}|$ und $|k_{21}|$ sind dann immer ≤ 1. Diese Methode versagt aber, wenn die Leitergeometrie die Identifikation abzählbarer Windungen nicht erlaubt; sie ist selbst dann problematisch, wenn die einzelnen Windungen wie bei den Luftspulen in Abb. 5.39 von unterschiedlichen Flüssen durchsetzt werden. Auf den Koppelfaktor k in Gl. (6.48) haben diese unterschiedlichen Definitionen keine Auswirkung, diese Beziehung ist in beiden Fällen gleich.

die Schleifen $N_1 = N_2 = 1$, wie im Beispiel mit den beiden Doppelleitungen, dann kann der mit beiden Windungen verkettete Fluss nur kleiner oder maximal gleich sein zu dem von einer Windung insgesamt erzeugten Fluss, d.h. die Koppelfaktoren können dann betragsmäßig maximal den Wert 1 annehmen. Für die Praxis reicht zur Beschreibung der Kopplung zwischen den beiden Schleifen ein einziger Zahlenwert aus. Man bildet daher aus den beiden gegebenenfalls sehr unterschiedlichen Koppelfaktoren (6.47) das geometrische Mittel. Dieses ist unabhängig von den Windungszahlen betragsmäßig immer ≤ 1

$$k = \pm\sqrt{k_{12}k_{21}} = \frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} \quad \text{mit} \quad |k| \leq 1\,, \tag{6.48}$$

so dass das Gleichungssystem (6.45) auch in der Form

$$\begin{aligned} u_1(t) &= R_1 i_1(t) + L_{11}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + k\sqrt{L_{11}L_{22}}\,\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2(t) &= R_2 i_2(t) + k\sqrt{L_{11}L_{22}}\,\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{6.49}$$

geschrieben werden kann.

6.5 Der Energieinhalt des Feldes

In diesem Kapitel wollen wir, ähnlich wie bereits beim Kondensator, die Frage untersuchen, wie viel Energie, wir sprechen hier von **magnetischer Energie** W_m, in einer stromdurchflossenen Spule gespeichert ist. Dazu wird die in ▶Abb. 6.26 dargestellte Ringkernspule der Induktivität L zum Zeitpunkt $t = 0$ an eine Gleichspannungsquelle U angeschlossen.

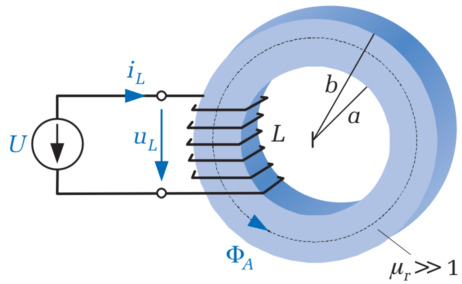


Abbildung 6.26: Zur Berechnung der in einer Spule gespeicherten magnetischen Energie

Die Spannung an der Spule ist zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ gleich der Quellenspannung $u_L = U$. Vernachlässigt man die Verlustmechanismen in der Spule wie z.B. den ohmschen Widerstand der Wicklung, dann wird sich in der anfangs stromlosen Spule nach Gl. (6.28) ein linear ansteigender Strom ausbilden und die gesamte der Spule zugeführte Energie trägt zur Erhöhung der Flussdichte im Ringkern bei. Die in einem elementaren Zeitabschnitt von der Quelle an die Spule abgegebene Energie kann mit Gl. (2.48) berechnet werden. Berücksichtigt man den Zusammenhang (6.28) zwischen Spulenstrom und Spulenspannung, dann erhält man den folgenden Energiezuwachs in der Spule

$$\mathrm{d}W_m \overset{(2.45)}{=} u_L\, i_L\, \mathrm{d}t \overset{(6.28)}{=} L\, i_L \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = L\; i_L\, \mathrm{d}i_L\,. \tag{6.50}$$

Die gesamte in der Spule gespeicherte magnetische Energie W_m kann durch Integration der Beziehung (6.50) von dem Anfangswert $i_L = 0$ bis zu dem Endwert $i_L = I$ berechnet werden

$$W_m = L\int_0^I i_L\, \mathrm{d}i_L \quad \rightarrow \quad \boxed{W_m = \frac{1}{2}L\, I^2 = \frac{1}{2}\Phi\, I}\,. \tag{6.51}$$

Bei der mathematischen Herleitung wurde zu keinem Zeitpunkt die spezielle Geometrie der Spule berücksichtigt, d.h. die abgeleitete Beziehung ist unabhängig von der Bauform der Spule. Es muss allerdings darauf hingewiesen werden, dass bei der Integration der Gl. (6.50) die Induktivität L als konstant, d.h. unabhängig vom Strom i_L angesehen wurde. Diese Voraussetzung ist jedoch nur erfüllt, wenn die bei der Berechnung der Induktivität auftretende Permeabilität konstant ist.

Merke

Die in einer Induktivität gespeicherte magnetische Energie ist proportional zum Produkt aus der Induktivität L und dem Quadrat des Stromes I.

Die Gl. (6.51) beschreibt die Energie in einer einzelnen stromdurchflossenen Spule. Wir wollen jetzt die Energie in einem System gekoppelter Induktivitäten berechnen. Zur Vereinfachung beschränken wir uns zunächst auf eine Anordnung mit nur zwei Leiterschleifen, wobei wir die gekoppelten Stromkreise nach Abb. 6.18 mit sich gleichsinnig überlagernden Flüssen und mit dem zugehörigen Gleichungssystem (6.36) zugrunde legen wollen. Zu berechnen ist die Gesamtenergie für den Fall, dass die beiden Ströme die Werte I_1 und I_2 aufweisen. Auch hier müssen wir die dem Leitersystem zugeführte Energie berechnen, wenn die Ströme von den Anfangswerten $i_1 = i_2 = 0$ auf die Endwerte $i_1 = I_1$ und $i_2 = I_2$ gesteigert werden. Die Widerstände werden zu Null gesetzt, damit die im Magnetfeld gespeicherte Energie der zugeführten Energie entspricht. Die Gl. (2.48) muss jetzt auf die beiden Leiterschleifen angewendet werden

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_m \overset{(2.45)}{=} u_1\, i_1\, \mathrm{d}t + u_2\, i_2\, \mathrm{d}t &\overset{(6.36)}{=} L_{11}\, i_1\, \mathrm{d}i_1 + L_{12}\, i_1\, \mathrm{d}i_2 + L_{21}\, i_2\, \mathrm{d}i_1 + L_{22}\, i_2\, \mathrm{d}i_2 \\ &= L_{11}\, i_1\, \mathrm{d}i_1 + M\, i_1\, \mathrm{d}i_2 + M\, i_2\, \mathrm{d}i_1 + L_{22}\, i_2\, \mathrm{d}i_2\,.\end{aligned} \tag{6.52}$$

Da die gespeicherte Energie nicht von dem zeitlichen Verlauf des Stromanstieges abhängt, sondern nur von den Endwerten, können wir die Berechnung dadurch einfach gestalten, dass wir die beiden Ströme nacheinander von Null auf ihren jeweiligen Endwert steigern. Beginnen wir also bei dem Zustand $i_1 = I_1$ und $i_2 = 0$, für den die Energie $L_{11}I_1^2/2$ aus Gl. (6.51) bekannt ist. Steigern wir jetzt den Strom i_2 bei konstant gehaltenem Strom I_1, dann folgt wegen $\mathrm{d}i_1 = 0$ aus der oberen Zeile der Gl. (6.52) die Beziehung

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \int_0^{I_2} L_{12} I_1 \, \mathrm{d}i_2 + \int_0^{I_2} L_{22} \, i_2 \, \mathrm{d}i_2 \,, \tag{6.53}$$

deren Integration das Ergebnis

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \tag{6.54}$$

liefert. Beginnt man die Berechnung bei dem Anfangszustand $i_2 = I_2$ und $i_1 = 0$, und steigert man anschließend den Strom i_1 auf seinen Endwert I_1, dann folgt das Ergebnis

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \,. \tag{6.55}$$

Da die Energie in den beiden Beziehungen (6.54) und (6.55) gleich sein muss, folgt auch hier wieder die Symmetrie-Eigenschaft $L_{ik} = L_{ki}$, wobei in diesem Fall keine Einschränkung hinsichtlich der Geometrie der Leiterschleifen gemacht wurde. Mit der bereits eingeführten Bezeichnung M für die Gegeninduktivität im Zwei-Leiter-System gilt die Beziehung[5]

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2} \,. \tag{6.56}$$

Als Ergänzung sei noch die Berechnung der Energie im Mehrleitersystem angegeben. Das gesuchte Ergebnis erhält man mithilfe der gleichen Vorgehensweise, nämlich die Ströme nacheinander vom Anfangswert auf den jeweiligen Endwert zu steigern und die dazu benötigten Energien zu berechnen. Wir wählen hier einen kürzeren und etwas anschaulicheren Weg zur Herleitung der Beziehung. Die Energie im Zwei-Leiter-System kann man auch als die halbe Summe der Ergebnisse (6.54) und (6.55) schreiben

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} L_{ik} I_i I_k \,. \tag{6.57}$$

5 Das Vorzeichen bei der Gegeninduktivität ändert sich, wenn wir von der Abb. 6.19 mit dem zugehörigen Gleichungssystem (6.37) ausgehen. Dieser Vorzeichenwechsel gilt dann auch bei den Gegeninduktivitäten in Gl. (6.58).

Diese Beziehung ist völlig symmetrisch aufgebaut hinsichtlich der beiden Indizes i und k und lässt sich unmittelbar auf ein System mit n Leitern übertragen

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{ik} I_i I_k \quad . \tag{6.58}$$

6.5.1 Die Energieberechnung aus den Feldgrößen

Mit den Gleichungen (6.51) und (6.58) haben wir eine Möglichkeit gefunden, die Energie aus den integralen Größen L und I zu berechnen. In Analogie zum Kap. 1.21 wollen wir auch hier die Gleichungen ableiten, mit deren Hilfe die Energie aus den Feldgrößen $\vec{\mathbf{B}}$ und $\vec{\mathbf{H}}$ berechnet werden kann. Nun haben wir aber bei der Hysteresekurve in Abb. 5.21 festgestellt, dass die beiden Feldgrößen in ferromagnetischen Materialien nicht mehr linear voneinander abhängen. Wegen der praktischen Bedeutung dieser Materialien bei der Herstellung induktiver Komponenten wollen wir im Gegensatz zur Elektrostatik diese nichtlinearen Zusammenhänge berücksichtigen.

Zur Ableitung der Beziehungen betrachten wir wieder die Ringkernspule aus Abb. 6.26, bei der wir zur Vereinfachung annehmen, dass die Abmessung $b - a$ sehr klein ist, so dass wir mit einer mittleren Länge $l_m = \pi(a + b)$ im Kern rechnen können. Besteht die Spule aus N Windungen und bezeichnet Φ_A wieder den magnetischen Fluss im Kern, dann lässt sich aus dem Induktionsgesetz zunächst die folgende Beziehung aufstellen:

$$U \overset{(6.26)}{=} R\,i + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \overset{(5.58)}{=} R\,i + N\frac{\mathrm{d}\Phi_A}{\mathrm{d}t} \,. \tag{6.59}$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit $i\mathrm{d}t$ steht auf der linken Seite die von der Quelle während $\mathrm{d}t$ gelieferte elektrische Energie $\mathrm{d}W_e$, der erste Ausdruck auf der rechten Seite beschreibt die in dem ohmschen Widerstand des Kupferdrahtes in Wärme umgesetzte Energie und der zweite Ausdruck entspricht der im Magnetfeld gespeicherten Energie $\mathrm{d}W_m$

$$\underbrace{U\,i\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}W_e} = R\,i^2\mathrm{d}t + \underbrace{N\,i\,\mathrm{d}\Phi_A}_{\mathrm{d}W_m} \,. \tag{6.60}$$

Mit der magnetischen Feldstärke im Kern nach Gl. (5.60) und dem magnetischen Fluss nach Gl. (5.30) als Produkt von Flussdichte und Kernquerschnitt A gilt

$$\mathrm{d}W_m = N\,i\,\mathrm{d}\Phi_A = H\,l_m\,\mathrm{d}\left(BA\right) = l_m A\,H\,\mathrm{d}B \,. \tag{6.61}$$

Wird die Flussdichte von dem Anfangswert $B = 0$ auf den Endwert B erhöht, dann ist die insgesamt in dem Kernvolumen $V = l_m A$ gespeicherte magnetische Energie durch das Integral

$$W_m = V\int_0^B H\,\mathrm{d}B \tag{6.62}$$

gegeben. Das Verhältnis aus Energie und Volumen wird **Energiedichte** genannt und hat die Dimension VAs/m^3

$$w_m = \int_0^B H\,\mathrm{d}B \; . \tag{6.63}$$

Betrachtet man den allgemeinen Fall eines nicht homogenen Feldes, dann ist die Energiedichte ortsabhängig. Die in einem elementaren Volumenelement dV gespeicherte Energie dW_m entspricht in diesem Fall dem Produkt aus der an der betrachteten Stelle vorliegenden Energiedichte mit dem Volumenelement. Die gesamte in einem Volumen V gespeicherte Energie findet man durch Integration der elementaren Beiträge über das Volumen

$$W_m = \iiint_V w_m \mathrm{d}V = \iiint_V \left(\int_0^B H\,\mathrm{d}B \right) \mathrm{d}V \; . \tag{6.64}$$

Stehen die beiden Feldgrößen in einem linearen Zusammenhang, dann kann das Integral (6.63) auf einfache Weise berechnet werden

$$w_m = \int_0^B H\,\mathrm{d}B = \frac{1}{\mu} \int_0^B B\,\mathrm{d}B = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} HB \, . \tag{6.65}$$

Bei gleich gerichteten Vektoren $\vec{\mathbf{H}}$ und $\vec{\mathbf{B}}$ kann das Produkt der beiden Feldgrößen auch wieder als Skalarprodukt der vektoriellen Feldgrößen dargestellt werden[6]

$$w_m = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \quad \text{und} \quad W_m = \iiint_V w_m \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \iiint_V HB\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\mathbf{B}}\,\mathrm{d}V \; . \tag{6.66}$$

Man beachte, dass die für jeweils lineare Zusammenhänge zwischen den Feldgrößen geltenden Beziehungen (6.66) im Magnetfeld und (1.101) bzw. (1.102) im elektrischen Feld völlig analog aufgebaut sind.

In Kap. 5.13 haben wir die Induktivität einfacher Anordnungen aus dem Verhältnis von magnetischem Fluss zu verursachendem Strom berechnet. Die Gleichungen (6.51) und (6.58) bieten als alternative Möglichkeit die Berechnung der Induktivität aus der magnetischen Energie, die ihrerseits aus den Feldgrößen gemäß Gl. (6.64) bzw. (6.66) berechnet werden kann. Wir wollen diese Rechnung an einem einfachen Beispiel demonstrieren.

6 Es existieren Materialien, bei denen die beiden Feldgrößen nicht gleich gerichtet sind. Auf eine eingehende Betrachtung dieser Situation muss an dieser Stelle jedoch verzichtet werden.

Beispiel 6.4: Bestimmung der inneren Induktivität eines Runddrahtes

Als Beispiel soll die innere Induktivität (5.67) aus der im Draht gespeicherten Energie berechnet werden.

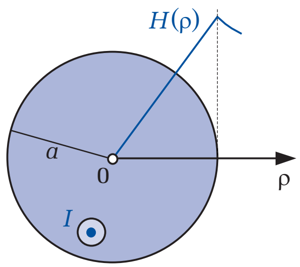


Abbildung 6.27: Zur Berechnung der inneren Induktivität

Lösung:

Mit der von der Koordinate ρ abhängigen magnetischen Feldstärke innerhalb des Drahtes nach Gl. (5.25) führt die Beziehung (6.66) auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} W_m &\overset{(6.66)}{=} \frac{1}{2}\iiint\limits_V HB\,\mathrm{d}V \overset{(5.25)}{=} \frac{1}{2}\mu_0 \int\limits_{z=0}^{l}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\rho=0}^{a}\left(\frac{I\rho}{2\pi a^2}\right)^2 \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}\int\limits_0^l \mathrm{d}z = \frac{\mu_0\, l}{16\pi} I^2 \overset{(6.51)}{=} \frac{1}{2}L_i I^2 \end{aligned} \tag{6.67}$$

für die im Draht gespeicherte magnetische Energie. Der Vergleich mit der Beziehung (6.51) bestätigt das bereits in Gl. (5.67) angegebene Ergebnis.

6.5.2 Die Hystereseverluste

Stehen die magnetische Feldstärke $\vec{\mathbf{H}}$ und die Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ in einem linearen Zusammenhang, dann kann die gesamte zuvor im Magnetfeld gespeicherte Energie wiedergewonnen werden. Im Falle der Hysteresekurve allerdings verursachen die Umklappvorgänge der Domänen mechanische Verluste. Bei jedem Umlauf um die Hystereseschleife geht ein Teil der Energie als Wärme im Material verloren.

Zur Bestimmung dieser Verluste können wir von der Energiedichte (6.63) ausgehen. Wir wollen diese Gleichung nicht mathematisch berechnen, sondern mithilfe der Hysteresekurve veranschaulichen. Ersetzen wir in der Abb. 6.26 die Gleichspannungsquelle durch eine Spannungsquelle mit einem zeitlich sinusförmigen Verlauf, dann wird der Spulenstrom in jeder Periode genau einmal den positiven und den negativen Spitzenwert durchlaufen und die Hystereseschleife wird genau einmal umrundet. Aus

Symmetriegründen genügt es, die positive Halbwelle des Stromes zu betrachten. Wird der Strom von dem Anfangswert Null auf den Maximalwert erhöht, dann durchläuft auch die magnetische Feldstärke den Bereich zwischen Null und Maximalwert, auf der Hysteresekurve in ▶Abb. 6.28 wird der Bereich zwischen den Punkten 1 und 2 durchlaufen. Die Energiedichte (6.63) wird durch Integration aller Beiträge $H\mathrm{d}B$ berechnet und ist damit identisch mit der Fläche zwischen der Hysteresekurve und der B-Achse, d.h. der Ordinate. Die von der Quelle an die Spule abgegebene Energie entspricht dem Produkt aus Energiedichte (markierte Fläche in Abb. 6.28a) und Kernvolumen V. Nimmt der Strom jetzt wieder von seinem Maximalwert auf Null ab, dann wird auf der Hysteresekurve der Bereich zwischen den Punkten 2 und 3 durchlaufen. Das Integral (6.63) entspricht jetzt der Fläche in Abb. 6.28b. Sein Wert ist negativ und gibt als Produkt mit dem Kernvolumen V die Energie an, die von der Spule an die Quelle zurückgeliefert wird. Die Differenz der beiden Flächen entspricht also genau derjenigen Energie, die pro Volumen in Wärme umgewandelt wird.

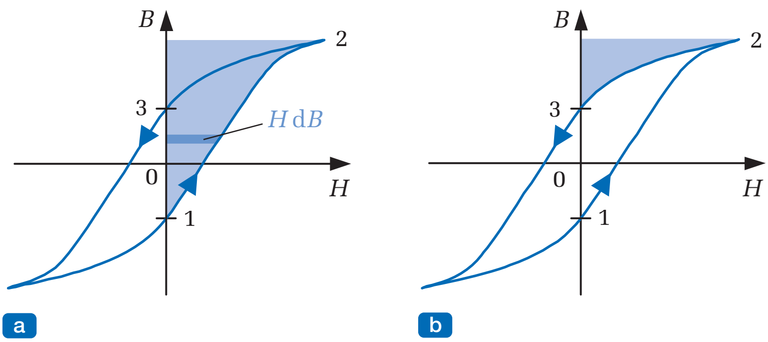


Abbildung 6.28: Zur Veranschaulichung der Hystereseverluste

Da die gleiche Überlegung für die negative Halbwelle des Stromes angestellt werden kann, gilt die folgende Aussage:

Merke

Der Energieverlust beim Umlaufen der Hystereseschleife entspricht dem Produkt aus der von der Schleife umfassten Fläche und dem Kernvolumen. Diese Verluste heißen **Hystereseverluste**.

Für den allgemeinen Fall einer ortsabhängigen Feldverteilung im Kern gilt die bisherige Überlegung nur für ein Volumenelement und die Gesamtenergie muss nach Gl. (6.64) durch Integration der ortsabhängigen Energiedichte über das Volumen bestimmt werden.

6.6 Anwendung der Bewegungsinduktion

Eine wichtige Anwendung der Bewegungsinduktion ist die Umwandlung zwischen elektrischer und mechanischer Energie. Beim Generator wird die zugeführte mechanische Energie in elektrische Energie umgewandelt. In den folgenden Abschnitten wird der prinzipielle Aufbau eines Wechselstromgenerators behandelt.

Im Gegensatz dazu wandelt der Motor die zugeführte elektrische Energie in mechanische Energie um, wobei die Kraftwirkung von Magnetfeldern ausgenutzt wird. Der Aufbau ist prinzipiell der gleiche wie bei den Generatoren, so dass auf eine weitere Betrachtung von Motoren an dieser Stelle verzichtet wird.

6.6.1 Das Generatorprinzip

Das Prinzip eines Wechselstromgenerators ist in ▶Abb. 6.29 dargestellt. In einem homogenen x-gerichteten Magnetfeld der Flussdichte $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{e}}_x B_x$ wird eine rechteckige Leiterschleife der Abmessungen a und b mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um ihre Symmetrieachse gedreht. Die Rotationsachse stimme mit der z-Achse des kartesischen Koordinatensystems überein. Die offenen Enden der Leiterschleife werden über zwei Schleifkontakte mit den Anschlussklemmen verbunden, an denen die induzierte Spannung gemessen werden kann.

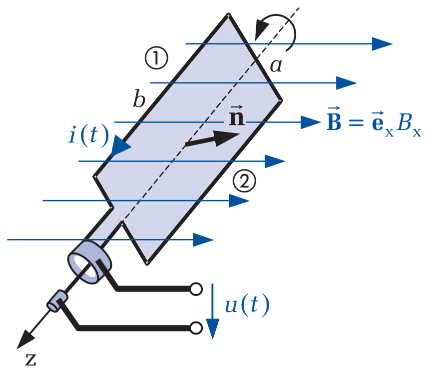


Abbildung 6.29: Drehbewegung einer Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld

Infolge der Drehbewegung ändert sich der Winkel zwischen der senkrecht auf der Leiterschleife stehenden Flächennormalen $\vec{\mathbf{n}}$ und der x-gerichteten Flussdichte. Der mit der Leiterschleife verkettete Fluss wird in Richtung der willkürlich gewählten Flächennormalen positiv gezählt, so dass der Strom (bei Abschluss der beiden Klemmen mit einem Widerstand) die in Abb. 6.29 eingetragene Bezugsrichtung erhält. Damit nimmt auch die induzierte Spannung die an den Klemmen eingezeichnete Richtung an. Der Fluss durch die Leiterschleife nach Gl. (5.30) kann mithilfe der Darstellungen in ▶Abb. 6.30 berechnet werden.

Wir wählen den Anfangszeitpunkt $t = 0$ so, dass die Flächennormale $\vec{\mathbf{n}}$ in Richtung der Flussdichte zeigt, die Fläche also mit dem maximalen Fluss verkettet ist (Abb. 6.30a)

$$\Phi(t=0) = \hat{\Phi} \overset{(5.30)}{=} B_x A = B_x ab \,. \tag{6.68}$$

Den Maximalwert bezeichnet man als **Amplitude**, **Scheitelwert** oder **Spitzenwert**. Er wird durch ein über die Variable gesetztes Dach gekennzeichnet. Den zu einem beliebigen Zeitpunkt vorliegenden Fluss $\Phi(t)$ bezeichnet man dagegen als **Zeitwert** oder **Momentanwert**.

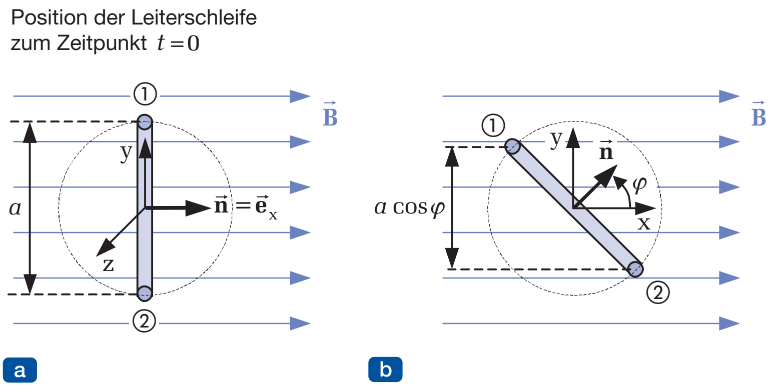


Abbildung 6.30: Festlegung der Bezeichnungen für die Flussberechnung

Die Schleife drehe sich wie in Abb. 6.30b dargestellt in Richtung wachsender Winkel φ. Bei der angenommenen konstanten Drehgeschwindigkeit steigt der Winkel linear mit der Zeit an. Wir können also den Zusammenhang

$$\varphi(t) = \omega t \tag{6.69}$$

mit dem Proportionalitätsfaktor ω aufstellen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ nimmt der Winkel den Wert Null an (vgl. Abb. 6.30a). Bezeichnet man die Dauer für eine vollständige Umdrehung, bei der φ den Wert 2π annimmt, mit T, dann gilt

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \,. \tag{6.70}$$

T wird als **Schwingungsdauer** oder **Periodendauer**, ω als **Winkelgeschwindigkeit** oder **Kreisfrequenz** bezeichnet. Den Kehrwert von T bezeichnet man als **Frequenz** f

$$\boxed{f = \frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad \omega = 2\pi f} \,. \tag{6.71}$$

Die Frequenz hat die Dimension 1/s. Wegen der besonderen Bedeutung wird eine eigene Bezeichnung (Hertz = Perioden pro Sekunde) für die Dimension der Frequenz eingeführt 1 Hz = 1/s (nach Heinrich Hertz, 1857 – 1894).

Den mit der Schleife verketteten zeitabhängigen Fluss erhält man mithilfe der Gl. (5.30), in der für die Flächennormale $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{e}}_\rho = \vec{\mathbf{e}}_x \cos\varphi + \vec{\mathbf{e}}_y \sin\varphi$ gesetzt werden muss

$$\Phi(t) \overset{(5.30)}{=} \iint_A \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_x B_x}_{\vec{\mathbf{B}}} \cdot \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_x \cos\varphi + \vec{\mathbf{e}}_y \sin\varphi\right) \mathrm{d}A}_{\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}} = B_x\, A \cos\varphi \overset{(6.68)}{=} \hat{\Phi}\cos\varphi \overset{(6.69)}{=} \hat{\Phi}\cos\omega t\,. \tag{6.72}$$

Nach dem Induktionsgesetz (6.15) wird in der Schleife eine Spannung

$$u(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) \overset{(6.72)}{=} \omega\hat{\Phi}\sin\omega t = \hat{u}\,\sin\omega t \tag{6.73}$$

induziert, die einen sinusförmigen Verlauf besitzt und innerhalb einer Periode zweimal ihr Vorzeichen wechselt. Sie wird daher als **Wechselspannung** bezeichnet. Die beiden zeitabhängigen Funktionen sind in ▶Abb. 6.31 für eine volle Periodendauer (eine volle Umdrehung) als Funktion des Winkels $\varphi(t) = \omega t$ dargestellt.

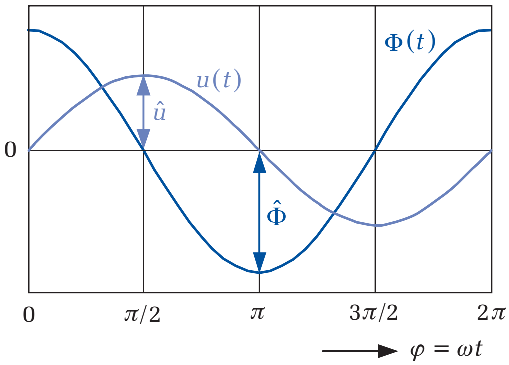


Abbildung 6.31: Zeitlicher Verlauf von verkettetem Fluss und induzierter Spannung

Die Nulldurchgänge der einen Funktion treten zeitgleich mit den Extremwerten der anderen Funktion auf. Dort wo der Fluss am schnellsten abnimmt, d.h. bei seinem Nulldurchgang bei $\omega t = \pi/2$, ist die von der Flussänderung induzierte Spannung am größten. Man spricht davon, dass die beiden Funktionen unterschiedliche **Phasenlagen** haben bzw. gegeneinander **phasenverschoben** sind. Bei dem hier vorliegenden Beispiel beträgt die Phasenverschiebung $\pi/2$. Bezogen auf die Spannung eilt der Fluss um $\pi/2$ voraus. Dies erkennt man daran, dass zuerst der Fluss bei $t = 0$ sein Maximum durchläuft. Die Spannung erreicht ihr Maximum erst zu dem späteren Zeitpunkt $t = \pi/2\omega$. Mathematisch lässt sich die Phasenverschiebung auch in der folgenden Weise darstellen

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u}\sin(\omega t) \\ \Phi(t) = \hat{\Phi}\cos\omega t &= \hat{\Phi}\sin(\omega t + \pi/2) \qquad \text{(d.h. um } \pi/2 \text{ voreilend)}\,. \end{aligned} \tag{6.74}$$

Wird an die Anschlussklemmen des Generators in Abb. 6.29 ein ohmscher Verbraucher angeschlossen, dann fließt ein Wechselstrom durch den Widerstand, der den gleichen sinusförmigen Verlauf und die gleiche Frequenz wie die Spannung aufweist.

Die Amplitude der induzierten Spannung (6.73) hängt von der Winkelgeschwindigkeit ω, von der Flussdichte B und von der Schleifenfläche A ab. Eine einfache Möglichkeit, die induzierte Spannung zu erhöhen, besteht darin, eine Spule mit mehreren, z.B. N Windungen zu verwenden. Werden alle N Windungen vom gleichen Fluss durchsetzt, dann ist die induzierte Spannung proportional zu N.

Allgemein bezeichnet man den sich drehenden Teil (die Leiterschleife in Abb. 6.29) als **Rotor** bzw. **Läufer** und den feststehenden Teil (zur Erzeugung der Flussdichte B in Abb. 6.29) als **Stator**. Allerdings gibt es auch Anordnungen, bei denen die Leiterschleife als Stator und der Magnet zur Induktionserzeugung als Rotor ausgeführt ist (vgl. ▶Abb. 6.33).

6.6.2 Das Drehstromsystem

Zur effizienten Übertragung elektrischer Energie werden in den Versorgungsnetzen sehr hohe Spannungen benötigt (vgl. Kap. 3.7.3). Wegen der einfachen Transformation (vgl. Kap. 6.7) werden fast ausschließlich Wechselspannungen benutzt und zwar in Form von Mehrphasensystemen. In einem solchen System werden mehrere Spannungen mit gleicher Frequenz, aber unterschiedlichen Phasenlagen verwendet. Von einem **symmetrischen Mehrphasensystem** spricht man, wenn alle Spannungen gleiche Amplitude haben und gleiche Phasenverschiebungen gegeneinander aufweisen. Wegen seiner besonderen Bedeutung werden wir im Folgenden ausschließlich das **Drei-Phasen-System** betrachten.

Zur Erzeugung von drei um jeweils 120° bzw. $2\pi/3$ gegeneinander phasenverschobenen Spannungen werden ebenfalls drei um jeweils 120° räumlich versetzt angeordnete Leiterschleifen (Spulen) relativ zu einem zeitlich konstanten homogenen Magnetfeld mit der Winkelgeschwindigkeit ω gedreht (▶Abb. 6.32).

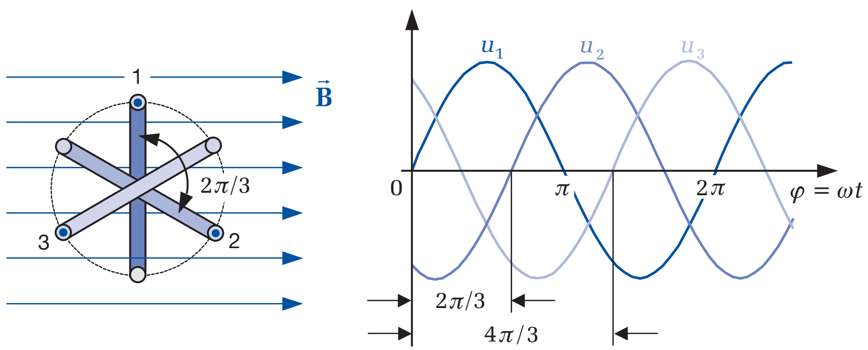


Abbildung 6.32: Prinzip des Drehstromgenerators und zeitliche Folge der Wechselspannungen

Für die in den drei Wicklungen induzierten Spannungen gelten nach Gl. (6.73) die Beziehungen

$$u_1(t) = \hat{u}\sin\omega t, \quad u_2(t) = \hat{u}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad u_3(t) = \hat{u}\sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right). \qquad (6.75)$$

Der zeitabhängige Verlauf ist in Abb. 6.32 dargestellt. Werden die drei Wicklungen mit ohmschen Widerständen belastet, dann gelten die Phasenbeziehungen auch für die Ströme.

Die relative Drehbewegung zwischen den drei Wicklungen und dem homogenen Magnetfeld wird in der Praxis oft dadurch realisiert, dass sich innerhalb der ortsfesten Wicklungen ein Magnet, entweder ein Dauermagnet oder ein durch Gleichstrom erregtes Polrad, dreht (Abb. 6.33).

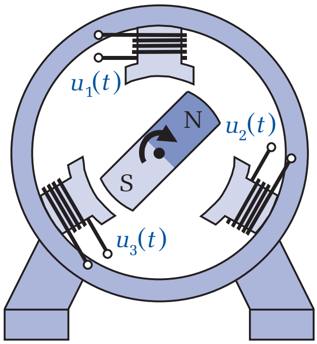


Abbildung 6.33: Erzeugung der drei um 120° phasenverschobenen Wechselspannungen

Lässt man auf der Verbraucherseite die drei im Generator erzeugten phasenverschobenen Ströme durch drei ortsfeste um 120° räumlich versetzte Wicklungen fließen, dann entsteht durch die Überlagerung der drei von den Einzelspulen erzeugten Magnetfelder auf der Verbraucherseite ein mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit räumlich umlaufendes **Drehfeld**. Das Drei-Phasen-System wird daher als **Drehstromsystem**, der **Drei-Phasen-Strom** als **Drehstrom** bezeichnet.

So wie der umlaufende Magnet auf der Generatorseite ein zeitlich konstantes Magnetfeld besitzt, so ist auch die Amplitude des Drehfeldes bei Strömen gleicher Amplitude auf der Verbraucherseite zeitlich konstant. Zu den besonderen Vorteilen des Drehstromsystems gegenüber dem Ein-Phasen-System gehören also einerseits die einfache Realisierung von Antrieben, andererseits aber auch die Möglichkeit einer zeitlich konstanten Leistungsabgabe an den Verbraucher und damit verbunden eine zeitlich konstante Belastung des Generators.[7]

Bevor wir uns die Schaltungsmöglichkeiten für die Energieübertragung an den Verbraucher näher ansehen, sollen noch einige üblicherweise verwendete Begriffe eingeführt werden. Die drei spannungserzeugenden Spulen werden als **Strang** oder **Phase** bezeichnet, die an ihnen anliegende Spannung als **Strangspannung** oder **Phasenspannung**. Entsprechend werden die Bezeichnungen **Strangstrom** bzw. **Phasenstrom** für die Ströme in den einzelnen Spulen verwendet.

7 Der mathematische Nachweis für diese Zusammenhänge wird in Teil 2, Kap. 8 erbracht.

Im Prinzip können die drei Spannungen separat, d.h. mit drei Doppelleitungen zu den Verbrauchern übertragen werden. Durch geeignete Zusammenschaltung der drei Generatorwicklungen lässt sich die Anzahl der benötigten Leitungen jedoch reduzieren. Die einzelnen Verbraucher werden dann auf ähnliche Weise zusammengeschaltet. Bei der **Sternschaltung** in ▶Abb. 6.34 sind die drei Spulen an jeweils einem Anschluss, dem **Sternpunkt**, zusammengeschaltet. Die von den Außenpunkten der Stränge zu den Verbrauchern geführten Leiter L1, L2 und L3 heißen **Außenleiter**, der gemeinsame Rückleiter N heißt **Sternpunktleiter** oder **Neutralleiter**. Die in den Außenleitern fließenden **Leiterströme** i_1, i_2 und i_3 sind bei der Sternschaltung identisch zu den Strangströmen. Die gesamte in Abb. 6.34 dargestellte Anordnung bildet ein **Drehstrom-Vier-Leiter-System**.

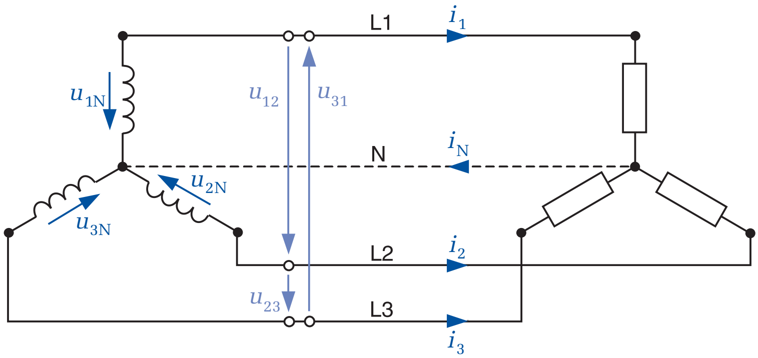


Abbildung 6.34: Sternschaltung beim Drei-Phasen-System

Üblicherweise werden die Generatorspulen im Schaltbild um 120° versetzt dargestellt, so dass ihre Zusammenschaltung unmittelbar erkennbar wird. Die positive Zählrichtung der Leiterströme zeigt vom Generator zum Verbraucher und gemäß dem Generatorzählpfeilsystem zeigen die Strangspannungen dann von den Außenleitern zum Sternpunkt.

Werden die drei Stränge gleichmäßig belastet, d.h. die drei Verbraucherwiderstände in Abb. 6.34 sind gleich groß, dann gilt

$$i_1 + i_2 + i_3 = \hat{i}\left[\sin(\omega t) + \sin(\omega t - 2\pi/3) + \sin(\omega t - 4\pi/3)\right] = 0 = i_N \,. \tag{6.76}$$

Die Summe der Leiterströme ist in diesem Fall Null, d.h. der Neutralleiter führt keinen Strom. Er wird also nur bei unsymmetrischer Belastung der drei Ausgänge benötigt. Verglichen mit der Übertragung der gleichen Gesamtleistung im Ein-Phasen-System oder auch der Übertragung der drei Teilleistungen mit drei separaten Doppelleitungen fällt der gesamte Rückleiter weg. Damit lässt sich nicht nur die Hälfte des Leitungskupfers einsparen, sondern die Leitungsverluste halbieren sich ebenfalls.

Die in der Abbildung eingetragenen **Außenleiterspannungen** (oder kurz **Leiterspannungen**) u_{12}, u_{23} und u_{31} entsprechen jeweils der Differenz zweier in der Phase um $2\pi/3$ verschobener Strangspannungen. Eine einfache Rechnung mithilfe von Additionstheoremen zeigt, dass die Amplituden dieser Spannungen um den Faktor $\sqrt{3}$ größer sind als die Strangspannungen[8]. Als Beispiel betrachten wir die Spannung u_{12}. Die Differenz der beiden Sinusfunktionen

$$\begin{aligned} u_{12} = u_{1N} - u_{2N} &= \hat{u}\left[\sin(\omega t) - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= \hat{u}\left[\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)\right] \end{aligned} \tag{6.77}$$

kann mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\sin(\beta)$ unmittelbar zusammengefasst werden

$$u_{12} = 2\hat{u}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\,\hat{u}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\,\hat{u}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right). \tag{6.78}$$

Merke

Bei der Sternschaltung eines symmetrischen Drei-Phasen-Systems sind die Leiterspannungen um den Faktor $\sqrt{3}$ größer als die Strangspannungen, Leiterströme und Strangströme haben gleiche Amplituden.

Bei vorhandenem Neutralleiter können die Verbraucher sowohl mit den Strangspannungen (zwischen Außenleiter und Sternpunktleiter) als auch mit den um $\sqrt{3}$ größeren Außenleiterspannungen gespeist werden.

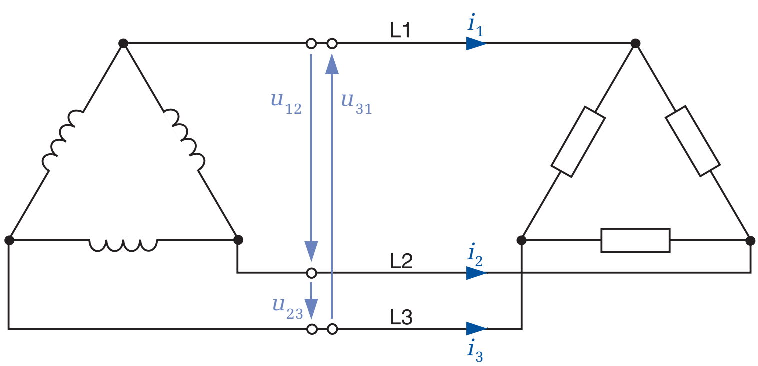


Abbildung 6.35: Dreieckschaltung beim Drei-Phasen-System

8 Bei einer Strangspannung von 230 V ergibt sich die Außenleiterspannung zu $\sqrt{3} \cdot 230\ \text{V} \approx 400\ \text{V}$.

Bei der in ▶Abb. 6.35 gezeigten **Ringschaltung** bzw. **Dreieckschaltung** werden die drei Stränge hintereinandergeschaltet. Da die Summe der drei phasenverschobenen Spannungen (6.75) zu jedem Zeitpunkt verschwindet, kann sich in der von den Strängen gebildeten dreieckigen Masche kein Maschenstrom ausbilden. Bei dieser Zusammenschaltung erhält man ein **Drehstrom-Drei-Leiter-System** mit drei Außenleitern.

Bei der Dreieckschaltung sind Strangspannung und Leiterspannung identisch. Die Verbraucher werden also mit den Strangspannungen gespeist. Die Leiterströme i_1, i_2 und i_3 unterscheiden sich jedoch von den Strangströmen. Bei symmetrischer Belastung erhält man mit der Kirchhoff'schen Knotenregel (3.7) jeden Leiterstrom aus der Differenz zweier um 120° phasenverschobener Strangströme gleicher Amplitude. In Analogie zur Gl. (6.78) stellt man fest, dass jetzt die Leiterströme um den Faktor $\sqrt{3}$ größer sind als die Strangströme.

Merke

Bei der Dreieckschaltung eines symmetrischen Drei-Phasen-Systems sind die Leiterströme bei symmetrischer Belastung um den Faktor $\sqrt{3}$ größer als die Strangströme, Leiterspannungen und Strangspannungen haben gleiche Amplituden.

In den Abbildungen 6.34 und 6.35 sind die spannungserzeugenden Spulen und die Verbraucher jeweils in der gleichen Weise zusammengeschaltet. Kombinationen von Stern- und Dreieckschaltungen sind aber ebenso möglich.

6.7 Anwendung der Ruheinduktion

Eine der wichtigsten Anwendungen der Ruheinduktion findet man bei den **Transformatoren** bzw. den **Übertragern**. Die Aufgabe der Transformatoren in der Starkstromtechnik und in der Leistungselektronik besteht darin, Spannungen zu transformieren und Leistung zwischen galvanisch getrennten Netzwerken zu übertragen. Bei den Anwendungen in nachrichtentechnischen Geräten spricht man üblicherweise von Übertragern. Sie werden eingesetzt zur Widerstandsanpassung, zur Potentialtrennung zwischen Eingangs- und Ausgangsklemmen oder auch zur Realisierung von Schaltungen mit vorgegebenen Eigenschaften. Auch wenn die Zielsetzung und die praktische Ausführung von Transformatoren und Übertragern unterschiedlich sind, so beruhen beide Bauelemente doch auf dem gleichen Prinzip und können gemeinsam betrachtet werden.

Ein Übertrager besteht aus mindestens zwei **Wicklungen** mit gegebenenfalls unterschiedlichen **Windungs**zahlen, die auf einen gemeinsamen Kern aus hochpermeablem Material gewickelt werden und daher magnetisch eng gekoppelt sind. Der Kern hat die Aufgabe, den magnetischen Fluss zu führen, so dass außerhalb des Kerns nur ein sehr geringes, in vielen Fällen zu vernachlässigendes **Streufeld** existiert. Durchsetzt der von einer Wicklung erzeugte magnetische Fluss vollständig die andere Wicklung, dann spricht man von einem *streufreien Übertrager*.

In der Praxis versucht man, die in den Wicklungen und in den Kernmaterialien entstehenden Verluste möglichst gering zu halten. Unter dieser Voraussetzung ist eine Beschreibung der Übertrager ohne Berücksichtigung von Verlusten in vielen Fällen ausreichend. Der im Folgenden verwendete Begriff *verlustloser Übertrager* bedeutet also, dass alle innerhalb des Bauelementes auftretenden Verluste hinreichend klein sind, so dass sie bei der Berechnung ebenfalls vernachlässigt werden können. In den Fällen, in denen die Verlustmechanismen jedoch berücksichtigt werden sollen, kann das reale Verhalten des Bauelementes vielfach durch einfache Erweiterung des Ersatzschaltbildes mit ohmschen Widerständen hinreichend gut nachgebildet werden (vgl. ▶Abb. 6.56).

6.7.1 Der verlustlose Übertrager

Zur Vereinfachung beschränken wir uns bei der folgenden Betrachtung auf einen verlustlosen Übertrager mit lediglich zwei Wicklungen. Auf der Eingangsseite befindet sich die **Primärwicklung** mit N_1 Windungen, auf der Ausgangsseite die **Sekundärwicklung** mit N_2 Windungen.

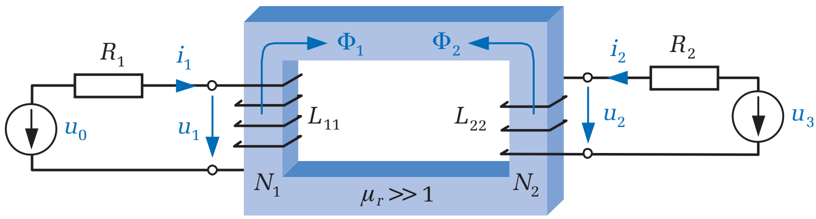


Abbildung 6.36: Übertrager mit Primär- und Sekundärwicklung

Die Primärwicklung wird über einen ohmschen Widerstand R_1 an die Spannungsquelle $u_0(t)$ angeschlossen, die Sekundärwicklung über einen ohmschen Widerstand R_2 an eine Spannungsquelle $u_3(t)$. Die Entscheidung, welche der Wicklungen als Primär- und welche als Sekundärwicklung anzusehen ist, ist willkürlich. In dem praktisch sehr oft vorkommenden Fall, bei dem die Energie aus nur einer Quelle entnommen wird, bezeichnet man die mit der Quelle verbundene Wicklung als Primärwicklung und die mit dem Verbraucher zusammengeschaltete Wicklung als Sekundärwicklung. Die Energieübertragung erfolgt dann von der Primärseite zur Sekundärseite.

Ausgehend von dem Generatorzählpfeilsystem an der Spannungsquelle $u_0(t)$ ist die Zählrichtung für den Strom $i_1(t)$ entsprechend der in der ▶Abb. 6.36 eingetragenen Pfeilrichtung zu wählen. Aufgrund der Zuordnung von Stromrichtung und Flussrichtung im Sinne einer Rechtsschraube kann die Richtung des von dem Strom $i_1(t)$ in dem Kern hervorgerufenen Flusses $\Phi_1(t)$ direkt angegeben werden. In Kap. 5.13 haben wir diesen Fluss durch die Querschnittsfläche mit einem Index A gekennzeichnet. Da hier wegen der im Folgenden verwendeten Doppelindizes bei den verketteten Flüssen keine Verwechslung möglich ist, verzichten wir auf diesen Index. Analog erhält man die Richtung des Stromes $i_2(t)$ auf der Sekundärseite mit dem zugehörigen Fluss $\Phi_2(t)$. Zur besseren Übersicht wird in den folgenden Formeln die für alle Spannungen, Ströme und Flüsse geltende Zeitabhängigkeit nicht mehr hingeschrieben.

Für dieses magnetisch gekoppelte Netzwerk können die für den Eingangs- bzw. Ausgangskreis geltenden Maschengleichungen unter Einbeziehung der in Abb. 6.36 definierten Spannungen u_1 und u_2 unmittelbar aufgestellt werden

$$\begin{aligned} u_0 &= R_1\, i_1 + u_1 \\ u_3 &= R_2\, i_2 + u_2 \,. \end{aligned} \tag{6.79}$$

Im nächsten Schritt müssen die Spannungen u_1 und u_2 durch die Ströme ausgedrückt werden, so dass das resultierende, aus zwei Gleichungen bestehende Gleichungssystem nach den verbleibenden Unbekannten i_1 und i_2 aufgelöst werden kann.

Nun stehen wir wieder vor der Frage, in welche Richtung wir den von einer Stromschleife hervorgerufenen Fluss durch die andere Schleife zählen wollen. Liegt hier die Situation nach Abb. 6.18 mit den zugehörigen Gleichungen (6.36) oder aber die Situation nach Abb. 6.19 mit den zugehörigen Gleichungen (6.37) vor?

Betrachten wir zunächst einmal den in den beiden genannten Gleichungssystemen auftretenden Fluss Φ_{11}. Dieser entspricht dem mit der Leiterschleife 1 verketteten Flussanteil (▶Abb. 6.37), der ausschließlich von dem Strom i_1 hervorgerufen wird. Er ist immer rechtshändig mit dem verursachenden Strom verknüpft, hat also die gleiche Richtung wie Φ_1. Da alle N_1 Windungen von dem Fluss Φ_1 durchsetzt werden, gilt $\Phi_{11} = N_1\Phi_1 = L_{11}i_1$. Analog gilt für die Sekundärseite $\Phi_{22} = N_2\Phi_2 = L_{22}i_2$. Die Entscheidung für das zu verwendende Gleichungssystem (6.36) bzw. (6.37) hängt jetzt von der Wahl der Bezugsrichtungen für die Flüsse Φ_{21} und Φ_{12} ab.

Es mag bei der Betrachtung der Abbildungen 6.36 und 6.37 der Eindruck entstehen, dass der die Schleife 2 durchsetzende Fluss Φ_{21}, der ja von dem Strom i_1 hervorgerufen wird, auch nur in Richtung von Φ_1 und damit entgegengesetzt zu Φ_2 gezählt werden kann. Die Abb. 6.36 lässt diese Wahl zwar vernünftig erscheinen und wir werden es anschließend auch in dieser Weise vereinbaren, es muss aber trotzdem darauf hingewiesen werden, dass es keinen zwingenden Grund gibt, die Wahl der Bezugsrichtungen für die Flüsse Φ_{21} und Φ_{12} so oder anders festzulegen. Es bleibt an dieser Stelle Willkür, auch wenn aufgrund von Plausibilitätsüberlegungen die eine oder die andere Möglichkeit als sinnvoller erscheint. Bei komplizierteren Kerngeometrien und Wickelanordnungen ist diese Zuordnung im Gegensatz zu dem hier betrachteten Beispiel ohnehin nicht mehr so leicht zu erkennen.

Wir *wählen* jetzt die Zählrichtung für Φ_{21} *entgegengesetzt* zur Zählrichtung von Φ_{22} und dann konsequenterweise auch die Zählrichtung von Φ_{12} *entgegengesetzt* zu Φ_{11}. Mit dieser Wahl sind jetzt aber alle weiteren Schritte eindeutig festgelegt:

- Zur Berechnung der Gegeninduktivität M müssen die festliegenden Zählrichtungen von Φ_{21} und i_1 oder im umgekehrten Fall von Φ_{12} und i_2 berücksichtigt werden.

- Da die Schleifen von den entgegen gerichteten Flüssen Φ_{11} und Φ_{12} bzw. Φ_{22} und Φ_{21} durchsetzt werden (die Festlegung entspricht der Situation in Abb. 6.19), müssen die Vorzeichen für die induzierten Spannungen infolge der Gegeninduktivität wie im Gleichungssystem (6.37) gewählt werden.

Die Abb. 6.37 zeigt noch einmal die gewählten Bezugsrichtungen für die einzelnen Teilflüsse.

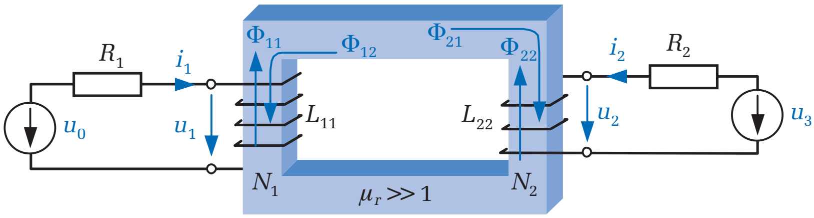


Abbildung 6.37: Zur Wahl der Zählrichtungen

Für das Gleichungssystem (6.79) erhalten wir damit die erweiterte Form

$$\begin{aligned} u_0 &= R_1 i_1 + u_1 = R_1 i_1 + L_{11}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_3 &= R_2 i_2 + u_2 = R_2 i_2 - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\,. \end{aligned} \tag{6.80}$$

Nachdem die Gleichungen für die allgemeine Anordnung der Abb. 6.36 angegeben sind, werden wir uns bei den folgenden Betrachtungen auf den vereinfachten Fall beschränken, bei dem auf der Ausgangsseite lediglich ein Verbraucher (Lastwiderstand R_2 in Abb. ▶6.38), aber keine Spannungsquelle mehr vorhanden ist ($u_3 = 0$). Es ist zu beachten, dass mit den eingeführten Bezeichnungen aus der Gl. (6.79) bzw. aus dem Maschenumlauf auf der Sekundärseite in Abb. 6.38 der Zusammenhang $u_2 = -R_2 i_2$ gilt.

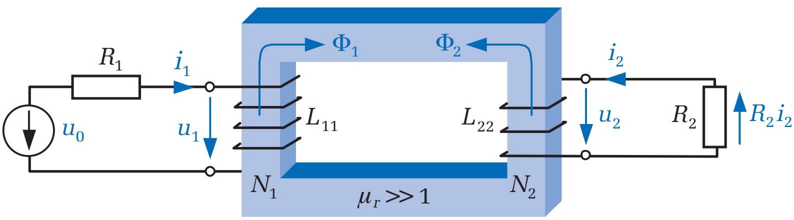


Abbildung 6.38: Übertrager mit Primär- und Sekundärwicklung

Mit der beibehaltenen Zählrichtung für den Strom i_2 gelten für die Anordnung in Abb. 6.38 die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_0 &= R_1 i_1 + L_{11}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= R_2 i_2 - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\,. \end{aligned} \tag{6.81}$$

Beispiel 6.5: Induktivitäten eines Übertragers

Für die Anordnung in ▶Abb. 6.39 sollen die Induktivitätswerte L_{11}, L_{22} und M bestimmt werden.

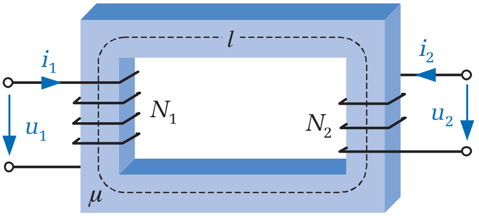


Abbildung 6.39: Übertrager mit Primär- und Sekundärwicklung

Lösung:

Im ersten Schritt werden die beiden Flüsse im Kern Φ_1 und Φ_2 bestimmt. Mit der mittleren Weglänge der magnetischen Feldlinien in den Schenkeln l und dem Kernquerschnitt A erhalten wir den magnetischen Widerstand aus Gl. (5.51). Die Durchflutung infolge der Primärwicklung (bei der Zählrichtung von Φ_1 werden die Ströme in die Zeichenebene hinein benötigt) beträgt $N_1 i_1$. Mit Gl. (5.54) folgt schließlich der Fluss

$$\Phi_1 = \frac{\Theta_1}{R_m} = N_1 i_1 \frac{\mu A}{l} \tag{6.82}$$

und daraus die Selbstinduktivität

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_1}{i_1} = N_1^{\,2} \frac{\mu A}{l} . \tag{6.83}$$

Auf der Sekundärseite erhalten wir das entsprechende Ergebnis (hier werden infolge der Zählrichtung von Φ_2 die Ströme aus der Zeichenebene heraus benötigt)

$$L_{22} = \frac{\Phi_{22}}{i_2} = \frac{N_2 \Phi_2}{i_2} = N_2^{\,2} \frac{\mu A}{l} . \tag{6.84}$$

Für die Berechnung der Gegeninduktivität gibt es die beiden in der folgenden Gleichung angegebenen Möglichkeiten, die aber zum gleichen Ergebnis führen

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_1}{i_1} = N_1 N_2 \frac{\mu A}{l} \quad \text{bzw.} \quad M = \frac{\Phi_{12}}{i_2} = \frac{N_1 \Phi_2}{i_2} = N_1 N_2 \frac{\mu A}{l} . \tag{6.85}$$

Da wir die Koppelflüsse so gezählt haben, dass sie einen positiven Wert annehmen, nämlich Φ_{21} in die gleiche Richtung wie Φ_1 und Φ_{12} in die gleiche Richtung wie Φ_2, nimmt auch die Gegeninduktivität M einen positiven Wert an.

Die Analyse magnetisch gekoppelter Netzwerke wird wesentlich erleichtert, wenn die reale Anordnung mithilfe der zugehörigen Gleichungen in ein **Ersatzschaltbild** (ESB) übertragen wird, das zwar das gleiche elektrische Verhalten wie die Originalschaltung aufweist, in dem aber die Kopplungen zwischen den verschiedenen Wicklungen auf einfache Weise enthalten und daher leichter zu erkennen sind. Zu diesem Zweck modifizieren wir zunächst die Gleichungen (6.81), indem wir zur oberen Gleichung $0 = M\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t - M\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$ und zur unteren Gleichung $0 = M\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t - M\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t$ addieren. Das Gleichungssystem nimmt dann die neue Form

$$\begin{aligned} u_0 &= R_1 i_1 + (L_{11} - M)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}(i_2 - i_1)}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= R_2 i_2 - M\frac{\mathrm{d}(i_1 - i_2)}{\mathrm{d}t} + (L_{22} - M)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{6.86}$$

an, die aber unmittelbar in das äquivalente Ersatzschaltbild der ▶Abb. 6.40b übertragen werden kann. Das Gleichungssystem beschreibt zwei Maschen mit den Strömen i_1 bzw. i_2 und einem gemeinsamen Zweig mit der Gegeninduktivität M, in dem die Differenz der beiden Ströme fließt. Bildet man zur Kontrolle die beiden Maschenumläufe in dem Netzwerk 6.40b, dann ergeben sich wieder die Gleichungen (6.86).

Wird die infolge der Gegeninduktivität M induzierte Spannung in die Masche eingefügt, dann bleibt die Kirchhoff'sche Maschenregel weiterhin anwendbar.

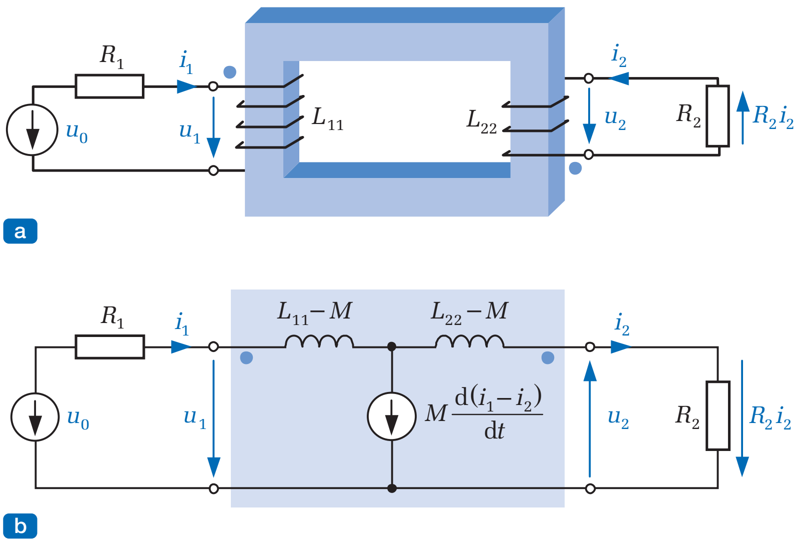


Abbildung 6.40: a) Ausgangsanordnung und b) Ersatzschaltbild mit induzierter Spannung

Die formelmäßige Beschreibung dieser Spannung als das Produkt aus der Gegeninduktivität M und der zeitlichen Ableitung des in dem Zweig fließenden Stromes erlaubt es, in das Ersatzschaltbild direkt den Wert M einzutragen (▶Abb. 6.41). Diese Vorgehensweise ist vergleichbar dem Einfügen der Spannung u_L in Abb. 6.14. Das Verhalten des Übertragers in Abb. 6.40a kann also durch das so genannte **T-Ersatzschaltbild** entsprechend den Abbildungen 6.40b bzw. 6.41 beschrieben werden. In beiden Fällen gelten die Gleichungen (6.81). Man beachte jedoch die jeweilige Orientierung des Ausgangsstromes i_2 in den beiden Bildern im Vergleich zur Ausgangsanordnung in Abb. 6.40a. (Die Bedeutung der hier bereits eingetragenen Punkte an den Anschlüssen des Übertragers wird im nächsten Abschnitt erläutert.)

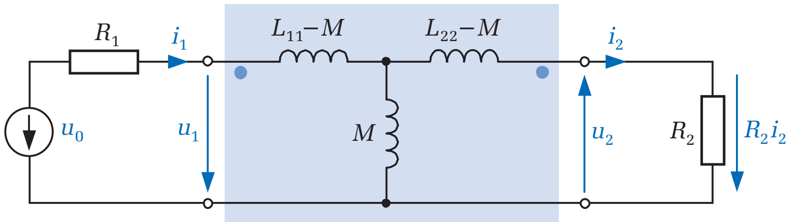


Abbildung 6.41: Ersatzschaltbild für die Anordnung in Abb. 6.40a

Hinweis

Das Ersatzschaltbild zeigt zwar das gleiche elektrische Verhalten bezüglich seiner Anschlussklemmen wie die reale Ausgangsanordnung, d.h. die beschreibenden Gleichungen sind identisch, dadurch wird aber nicht automatisch gewährleistet, dass die einzelnen Komponenten $L_{11} - M$, $L_{22} - M$ und M auch einzeln realisierbar sind. Ein Nachbau dieser Induktivitäten ist z.B. dann nicht möglich, wenn sich rein rechnerisch negative Zahlenwerte für einzelne Komponenten ergeben.

6.7.2 Die Punktkonvention

Zur Ableitung des Ersatzschaltbildes im vorangegangenen Kapitel wurde von einer dreidimensionalen Darstellung des Übertragers ausgegangen, in der der Wickelsinn der beiden Wicklungen erkennbar war. Diese etwas mühsame Vorgehensweise wird in der Praxis dadurch vereinfacht, dass die einzelnen Wicklungen mit Punkten markiert werden, die die Kopplungen zwischen den Wicklungen eindeutig definieren. Bevor wir die Festlegung der Punkte diskutieren, soll zum leichteren Einstieg zunächst noch ein Beispiel betrachtet werden.

Beispiel 6.6: Zeitlicher Verlauf der Ströme und Spannungen am Übertrager

An den Eingang des Übertragers in ▶Abb. 6.42 wird die Spannung $u_0 = u_1 = \hat{u}\cos(\omega t)$ angelegt. Wir wollen die Frage beantworten, wie die zeitlichen Verläufe der Ausgangsspannung und der beiden Ströme in Abhängigkeit des Windungszahlenverhältnisses N_1/N_2 aussehen.

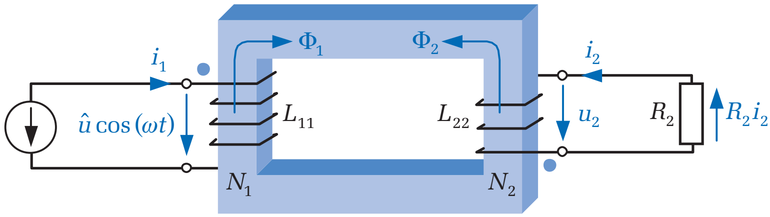


Abbildung 6.42: Betrachtete Anordnung

Lösung:

Ausgangspunkt sind die Gleichungen (6.81) mit $R_1 = 0$. Die Lösung dieses Gleichungssystems lässt sich auf einfache Weise mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung bestimmen. Da diese Methode erst in Teil 2, Kap. 8 behandelt wird, soll hier die Lösung direkt angegeben werden. Drückt man noch die Verhältnisse der Induktivitäten entsprechend den Ergebnissen aus Beispiel 6.5 durch das Verhältnis N_1/N_2 aus, dann gilt für die zeitabhängigen Strom- und Spannungsverläufe

$$
\begin{aligned}
i_1 &= \frac{1}{\omega L_{11}}\hat{u}\sin(\omega t) + \frac{M^2}{L_{11}{}^2 R_2}\hat{u}\cos(\omega t) = \frac{1}{\omega L_{11}}\hat{u}\sin(\omega t) + \frac{N_2}{N_1} i_2 \\
i_2 &= \frac{M}{L_{11} R_2}\hat{u}\cos(\omega t) = \frac{N_2}{N_1 R_2} u_1 \\
u_2 &= -R_2 i_2(t) = -\frac{M}{L_{11}}\hat{u}\cos(\omega t) = -\frac{N_2}{N_1} u_1 \, .
\end{aligned}
\tag{6.87}
$$

Die Richtigkeit kann durch Einsetzen in die beiden Gleichungen (6.81) überprüft werden. Diese Zeitverläufe sind in ▶Abb. 6.43 für die Zahlenverhältnisse $N_1 = 2N_2$ und $\omega L_{11} = 10 R_2$ dargestellt.

Während der Strom i_2 und damit auch die Spannung an R_2 die gleiche Phasenlage wie die Quellenspannung aufweisen, befindet sich die Spannung $u_2 = -R_2 i_2$ genau in Gegenphase. Betragsmäßig ist das Verhältnis der Spannungen auf der Ausgangsseite zur Spannung auf der Eingangsseite gleich zum Verhältnis der entsprechenden Windungszahlen.

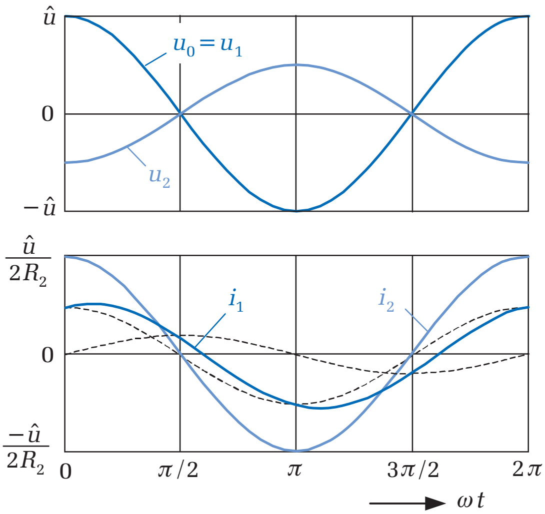


Abbildung 6.43: Verlauf der Spannungen und der mit R_2 multiplizierten Ströme

Der Strom auf der Primärseite setzt sich gemäß Gl. (6.87) aus zwei Anteilen zusammen, die im unteren Teil der Abb. 6.43 gestrichelt dargestellt sind. Der erste Anteil ist unabhängig von dem Ausgangswiderstand R_2 und weist gegenüber der Quellenspannung eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ bzw. 90° auf. Dieser Strom fließt auch bei sekundärseitigem Leerlauf $R_2 \to \infty$ und kann aus der Gl. (6.28) berechnet werden, da sich der Übertrager in diesem Fall wie eine Spule mit der Induktivität der Primärwicklung verhält. Der zweite Anteil des Primärstromes ist proportional zum Ausgangsstrom und hängt damit von der Ausgangsbeschaltung ab. Das Verhältnis des Ausgangsstromes zu diesem Teil des Primärstromes ist gleich dem umgekehrten Verhältnis der entsprechenden Windungszahlen.

Kehren wir nun zurück zur Festlegung der Punkte an den Übertrageranschlüssen. Üblicherweise werden die Punkte so gewählt, dass an allen Primär- und Sekundärseiten die Potentialdifferenzen zwischen dem jeweiligen Anschluss mit Punkt und dem zugehörigen Anschluss ohne Punkt gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sind. Wir können die Vorgehensweise ausgehend von den Ergebnissen im letzten Beispiel schrittweise betrachten:

1. Festlegung der Punkte beim Übergang von einer realen Anordnung zum ESB

- Auf der Primärseite ist die Wahl zunächst noch willkürlich. Üblicherweise wird derjenige Anschluss mit einem Punkt markiert, in den der Strom i_1 hineinfließt. Der zugehörige Zählpfeil für die Spannung u_1 zeigt von dem Punkt weg, d.h. der Übertrager wird als Verbraucher für die von der Quelle gelieferte Leistung angesehen.
- Die Spannung auf der Ausgangsseite, die zur gleichen Zeit wie u_1 positiv ist, muss dann ebenfalls vom Punkt wegzeigen. Das trifft in Abb. 6.42 auf die Spannung $R_2 i_2$ am Ausgangswiderstand zu. Damit ist der untere Anschluss auf der Ausgangsseite

mit einem Punkt zu versehen. Derjenige Anschluss auf der Ausgangsseite, aus dem der Sekundärstrom herausfließt, hat ein höheres Potential gegenüber dem anderen Anschluss auf der Ausgangsseite.

- Damit stellt sich allgemein die Frage, wie sich die Polarität der Ausgangsspannung an der dreidimensionalen Darstellung des Übertragers erkennen lässt. An dieser Stelle werden die Flüsse Φ_1 und Φ_2 benötigt. Der Strom i_1 ruft den in Abb. 6.42 eingetragenen, rechtshändig mit i_1 verketteten Fluss Φ_1 hervor. Nach der Lenz'schen Regel muss der induzierte Strom i_2 einen Fluss Φ_2 hervorrufen, der entgegengesetzt zu Φ_1 gerichtet ist. Wegen der rechtshändigen Verknüpfung von i_2 und Φ_2 ist die Richtung von i_2 und damit auch von der ausgangsseitigen Spannung bekannt.

2. Konsequenzen für die Aufstellung des Gleichungssystems

Werden die Koppelflüsse durch die jeweils andere Schleife so gezählt, wie sie auch tatsächlich gerichtet sind, dann ergeben sich positive Werte für die Gegeninduktivitäten (vgl. Beispiel 6.5). Damit bleibt lediglich noch die Frage zu beantworten, welches der beiden Gleichungssysteme (6.36) bzw. (6.37) anzuwenden ist. Bei dem Beispiel 6.6 fließt der Primärstrom zum Punkt hin, der Sekundärstrom vom Punkt weg und wegen der entgegen gerichteten Teilflüsse durch jede Schleife musste das Gleichungssystem (6.37) verwendet werden. Dieser Sachverhalt lässt sich verallgemeinern:

Merke

Fließen an den mit den Punkten markierten Anschlussklemmen beide Ströme zu den Punkten hin (zum Übertrager hin) oder von den Punkten weg (vom Übertrager weg), dann sind die infolge der Gegeninduktivitäten M induzierten Spannungen mit gleichem Vorzeichen wie die an den Hauptinduktivitäten L_{ii} mit $i = 1{,}2$ abfallenden Spannungen in das Gleichungssystem einzusetzen.

Im anderen Fall, bei dem der eine Strom zum Punkt hin fließt, der andere Strom aber vom Punkt weg, sind die Ausdrücke mit M bzw. L_{ii} mit unterschiedlichen Vorzeichen einzusetzen.

Die reale Ausgangsanordnung in Abb. 6.40a kann jetzt mithilfe der Punktkonvention wie in ▶Abb. 6.44 schematisiert dargestellt werden. Für den Fall, dass mehrere Wicklungen vorhanden sind, werden die bestehenden Kopplungen zwischen jeweils zwei Wicklungen üblicherweise durch einen Doppelpfeil gekennzeichnet.

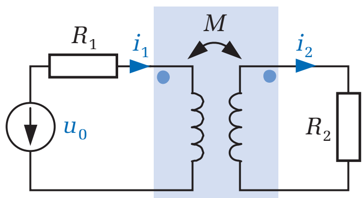


Abbildung 6.44: Kopplungsersatzschaltbild

In diesem Teilbild sind alle Informationen enthalten. Die Spannungen besitzen an den mit Punkten markierten Anschlüssen jeweils gleiche Polarität. Auch im Falle mehrerer Wicklungen sind die bestehenden Kopplungen durch entsprechende Kopplungspfeile markiert. Mit den eingetragenen Stromrichtungen ist das Gleichungssystem (6.37) bzw. (6.81) zu verwenden.

Beispiel 6.7: Reihenschaltung zweier induktiv gekoppelter Spulen

Als Beispiel soll die Reihenschaltung zweier induktiv gekoppelter Spulen mit den Windungen N_1 bzw. N_2 gemäß ▶Abb. 6.45 betrachtet werden. Diese Anordnung besteht im Grunde genommen aus einem geschlossenen Kern mit nur einer Wicklung der Gesamtwindungszahl $N_{ges} = N_1 + N_2$, von der lediglich N_2 Windungen auf die rechte Kernseite verschoben sind.

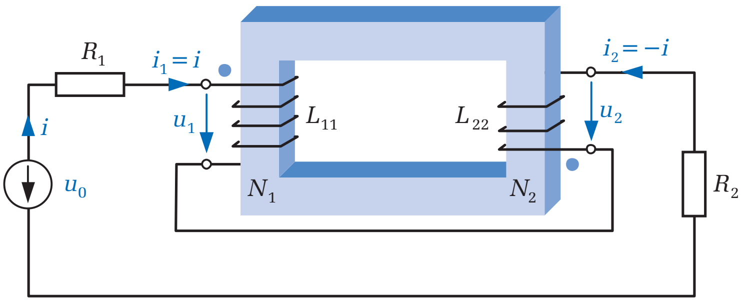


Abbildung 6.45: Reihenschaltung gekoppelter Spulen

Lösung:

Nachdem die beiden Teilwicklungen den gleichen Wickelsinn aufweisen wie die Anordnung in Abb. 6.40 und da die gleichen Bezeichnungen für die Ströme und Spannungen an den Übertrageranschlüssen verwendet wurden, gelten wiederum die Beziehungen (6.81)

$$\begin{aligned} u_1 &= L_{11}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\,. \end{aligned} \tag{6.88}$$

Das gesamte Netzwerk besteht nur aus einer einzigen Masche mit einem Strom i, so dass für die beiden Ströme am Übertrager die Gleichungen $i_1 = i$ und $i_2 = -i$ gelten. Das entsprechende Kopplungs-Ersatzschaltbild ist in ▶Abb. 6.46a dargestellt.

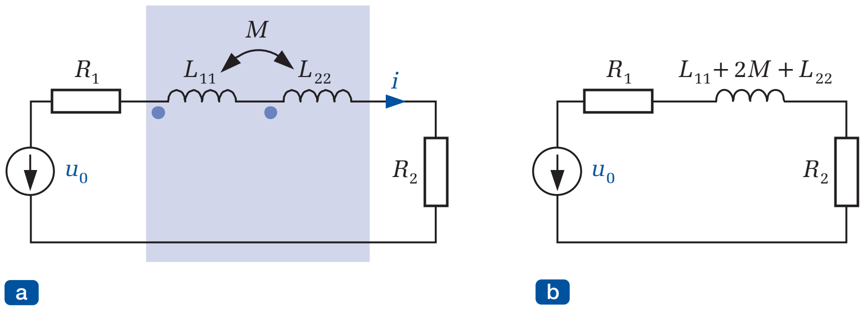


Abbildung 6.46: Ersatzschaltbilder

Aus dem Maschenumlauf erhalten wir folgende Beziehung

$$\begin{aligned} u_0 &= R_1\,i + u_1 - u_2 + R_2\,i = R_1\,i + L_{11}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_{22}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + R_2\,i \\ &= R_1\,i + L_{11}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_2\,i = R_1\,i + (L_{11} + 2M + L_{22})\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_2\,i\,. \end{aligned} \tag{6.89}$$

Aus dieser Gleichung ist zu erkennen, dass sich der Übertrager in Abb. 6.45 wie eine Induktivität mit dem Gesamtwert $L_{ges} = L_{11} + 2M + L_{22}$ verhält, so dass das resultierende Ersatzschaltbild die einfache Form in Abb. 6.46b annimmt. Dieses Ergebnis lässt sich leicht überprüfen. Betrachten wir zunächst den Grenzfall ohne Kopplung, d.h. beide Spulen sind unabhängig voneinander und es gilt $M = 0$. Dann erhält man in Übereinstimmung mit Gl. (6.29) das Ergebnis $L_{ges} = L_{11} + L_{22}$. In dem anderen Grenzfall, d.h. bei perfekter Kopplung ($k = 1$), gilt mit Gl. (6.48)

$$M = \sqrt{L_{11}L_{22}}\;. \tag{6.90}$$

Da beide Spulen auf den gleichen Kern gewickelt sind, gilt der magnetische Leitwert des Kerns für beide Spulen. Mit Gl. (5.75) folgt dann der Zusammenhang

$$L_{11} = N_1^{\,2}A_L\,,\quad L_{22} = N_2^{\,2}A_L\,,\qquad M = \sqrt{L_{11}L_{22}} = N_1N_2A_L \qquad \rightarrow$$

$$L_{ges} = (N_1 + N_2)^2\,A_L = N_{ges}^{\,2}A_L\,. \tag{6.91}$$

Bei perfekter Kopplung ist es also gleichgültig, ob man die Induktivität aus der Gesamtwindungszahl mit Gl. (5.75) direkt berechnet oder ob man zwei Teilwicklungen als Einzelinduktivitäten betrachtet und deren gegenseitige Kopplung berücksichtigt.

Bei nicht perfekter Kopplung ($k^2 \neq 1$) ist die Zusammenfassung der Selbst- und Gegeninduktivitäten mithilfe der binomischen Formel zu einer Gesamtinduktivität nicht mehr möglich. Es darf also nicht mehr mit $N_{ges}^{\,2}$ gerechnet werden, da nicht alle Windungen den gleichen Fluss umschließen.

6.7.3 Der verlustlose streufreie Übertrager

Wir betrachten jetzt ausgehend von der Anordnung in Abb. 6.36 den Sonderfall eines streufreien Übertragers. Unter streufrei ist zu verstehen, dass der gesamte von einer Wicklung erzeugte Fluss auch die andere Wicklung durchsetzt, d.h. der in Gl. (6.48) definierte Koppelfaktor nimmt den Wert $|k| = 1$ an.

Bei dem Übertrager in Abb. 6.36 sind auf der Primärseite N_1 Windungen mit dem Gesamtfluss verkettet. Mit der eingangsseitig anliegenden Spannung u_1 und bei zu vernachlässigendem Schleifenwiderstand $R = 0$ gilt entsprechend Gl. (6.25) die Beziehung

$$u_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{ges} = N_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_1 - \Phi_2) \,. \tag{6.92}$$

Mit der entsprechenden Gleichung auf der Sekundärseite lässt sich der Zusammenhang

$$u_2 = N_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_2 - \Phi_1) \overset{(6.92)}{=} -u_1 \frac{N_2}{N_1} \tag{6.93}$$

zwischen den beiden Spannungen aufstellen. Infolge der magnetisch engen Kopplung wird eine an die Eingangsseite angelegte, zeitlich veränderliche Spannung (**Primärspannung**) in eine Spannung an der Ausgangsseite (**Sekundärspannung**) gemäß dem Verhältnis der Windungszahlen

$$\frac{u_1}{u_2} = \mp\, \ddot{u} \qquad \text{mit} \qquad \ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} \tag{6.94}$$

transformiert. Das mit dem Buchstaben $\ddot{u}$ bezeichnete Verhältnis der beiden Spannungen nennt man **Übersetzungsverhältnis**. Das Minuszeichen gilt entsprechend der bisherigen Ableitung, d.h. für den Wickelsinn und die Festlegung der Spannungen gemäß Abb. 6.36.

Merke

Bei einem verlustlosen streufreien Übertrager stehen die Beträge der Spannungen im gleichen Verhältnis wie die Windungszahlen.

Im allgemeinen Fall, d.h. beim Übertrager mit Streuung weicht das Übersetzungsverhältnis je nach Kopplung von dem Ausdruck (6.94) ab.

6.7.4 Der ideale Übertrager

Der ideale Übertrager stellt nochmals einen Sonderfall des verlustlosen streufreien Übertragers dar. Unter gewissen Voraussetzungen gelangt man zu einer der Gl. (6.94) entsprechenden Beziehung für die Ströme. Mit der Maschengleichung (5.54) erhält man für den magnetischen Kreis der Anordnung 6.36 den Zusammenhang

$$\Theta = N_1 i_1 - N_2 i_2 \overset{(5.54)}{=} R_m \Phi = R_m (\Phi_1 - \Phi_2) \overset{(5.51)}{=} \frac{l}{\mu A}(\Phi_1 - \Phi_2)\,. \tag{6.95}$$

In dieser Gleichung bezeichnet R_m den gesamten magnetischen Widerstand der Anordnung, also die Reihenschaltung (Addition) der magnetischen Widerstände der einzelnen Schenkel. Für einen vernachlässigbar kleinen Wert $R_m \to 0$, d.h. für $\mu_r \to \infty$, verschwindet die rechte Seite der Gleichung (6.95) und damit auch die Durchflutung. Es verbleibt die Beziehung $N_1 i_1 - N_2 i_2 = 0$, aus der sich das Verhältnis der Ströme

$$\frac{i_1}{i_2} = \pm\frac{N_2}{N_1} = \pm\frac{1}{ü} \tag{6.96}$$

ergibt. Das Pluszeichen gilt entsprechend der bisherigen Ableitung.

An dieser Stelle sei noch einmal an das Beispiel 6.6 erinnert. Aus $\mu_r \to \infty$ folgt nämlich mit Gl. (6.83) $L_{11} \to \infty$ und damit entspricht die erste Zeile in Gl. (6.87) der soeben abgeleiteten Beziehung (6.96).

Die Forderung $R_m = 0$ ist in der Praxis nur näherungsweise realisierbar, so dass die Gl. (6.96) auch nur als eine Näherungslösung anzusehen ist, die aber in vielen Fällen ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Fasst man die beiden Gleichungen (6.94) und (6.96) zusammen, dann beschreiben sie offenbar den Fall, dass die gesamte dem Eingang des Übertragers zugeführte Leistung unmittelbar an den Ausgang weitergeleitet wird, d.h. es wird keine Energie gespeichert

$$P_1 \overset{(2.49)}{=} u_1 i_1 = (-ü u_2)\frac{i_2}{ü} = -u_2 i_2 \overset{\text{Abb.6.38}}{=} R_2 i_2^{\,2} \overset{(2.49)}{=} P_2\,. \tag{6.97}$$

An dieser Stelle führen wir den Index p für die Größen auf der Primärseite und den Index s für die Größen auf der Sekundärseite ein. Als Spannung u_s bezeichnen wir die an dem Lastwiderstand abfallende Spannung $u_s = R_2 i_2$ (Verbraucherzählpfeilsystem), die nach Abb. 6.38 dem negativen Wert der Spannung u_2 entspricht. Mit den Korrespondenzen

$$i_1 = i_p, \quad u_1 = u_p, \quad N_1 = N_p, \qquad i_2 = i_s, \quad -u_2 = R_2 i_2 = u_s, \quad N_2 = N_s \tag{6.98}$$

gilt dann folgende Aussage:

Merke

Beim idealen Übertrager stehen die Beträge der Spannungen im gleichen, die Beträge der Ströme dagegen im umgekehrten Verhältnis wie die Windungszahlen. Die gesamte dem idealen Übertrager am Eingang zugeführte Leistung ist zu jedem Zeitpunkt gleich der am Ausgang abgegebenen Leistung

$$\frac{u_p}{u_s} = \frac{i_s}{i_p} = \pm\ddot{u}\,, \quad \ddot{u} = \frac{N_p}{N_s}\,, \quad u_p\, i_p = u_s\, i_s\,. \tag{6.99}$$

Wegen der besonderen Bedeutung des idealen Übertragers wird für dieses Bauelement ein eigenes Symbol eingeführt, in dem die beiden Striche zwischen den gekoppelten Wicklungen als Hinweis auf einen Kern mit zu vernachlässigendem magnetischem Widerstand zu verstehen sind (▶Abb. 6.47). Die zugehörigen Gleichungen sind in (6.99) angegeben. Die beiden Fälle mit den jeweils geltenden Vorzeichen beim Übersetzungsverhältnis sind in der Abbildung dargestellt und zwar sowohl als Kern mit erkennbarem Wickelsinn als auch als vereinfachtes Symbol.

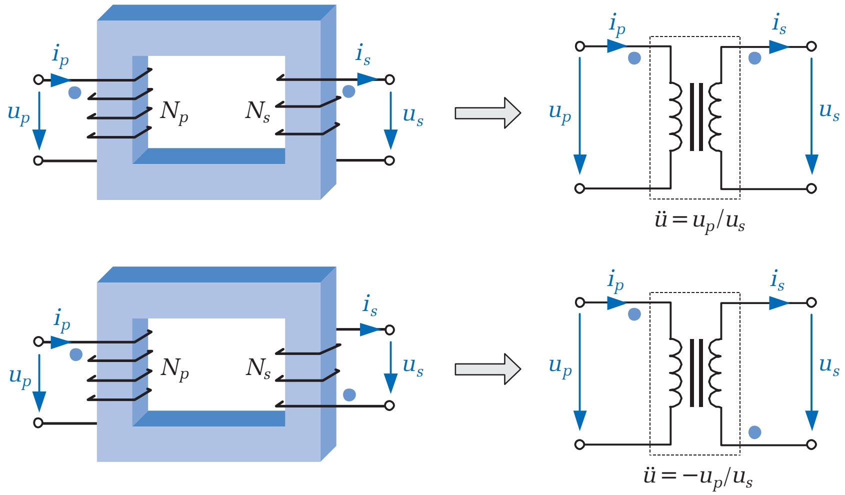


Abbildung 6.47: Schaltsymbol für den idealen Übertrager

Es ist zu beachten, dass der Strom $i_s = i_2$ im oberen Teilbild der Abb. 6.47 die gleiche Flussrichtung im Kern hervorruft wie der Strom i_2 in Abb. 6.38. Daher gilt das positive Vorzeichen bei $\ddot{u}$ in Gl. (6.99) sowohl für das Verhältnis der Ströme $i_s/i_p = i_2/i_1 = +\ddot{u}$ nach Gl. (6.96) als auch für das Verhältnis der Spannungen $u_p/u_s = u_1/(-u_2) = +\ddot{u}$ nach Gl. (6.94).

6.7.5 Die Widerstandstransformation

In Kap. 3.7.2 haben wir gesehen, dass die von einer Gleichspannungsquelle abgegebene Leistung bei Widerstandsanpassung einen maximalen Wert annimmt. Auch bei Wechselspannungen ist in vielen Fällen eine entsprechende Anpassung eines beliebigen Lastwiderstandes an den Innenwiderstand einer Quelle erforderlich. Für diese Aufgabe kann ein Übertrager verwendet werden.

Berechnen wir z.B. den Eingangswiderstand R_E aus dem Verhältnis von Eingangsspannung u_p zu Eingangsstrom i_p für einen idealen Übertrager mit Ausgangswiderstand R_2, dann erhalten wir mit den Beziehungen (6.99) das Ergebnis

$$R_E = \frac{u_p}{i_p} \overset{(6.99)}{=} \ddot{u}\, u_s \frac{\ddot{u}}{i_s} = \ddot{u}^2 R_2 \quad . \tag{6.100}$$

Offenbar wird ein an den Ausgang des Übertragers angeschlossener Widerstand mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses an die Eingangsklemmen transformiert. Ersetzen wir also den als ideal angenommenen Übertrager mit Lastwiderstand R_2 auf der linken Seite der ▶Abb. 6.48 durch die Ersatzanordnung auf der rechten Seite, dann ist die Belastung für die Quelle in beiden Fällen völlig identisch.

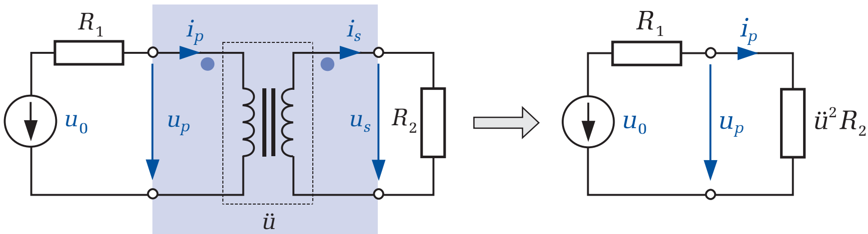


Abbildung 6.48: Zur Widerstandstransformation

Merke

Der Übertrager bietet die Möglichkeit der Anpassung von Lastwiderständen an die Innenwiderstände von Quellen. Der zwischen den Eingangsklemmen des Übertragers gemessene Widerstand entspricht dem mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses multiplizierten Ausgangswiderstand.

6.7.6 Ersatzschaltbilder für den verlustlosen Übertrager

In diesem Abschnitt wollen wir einige Ersatzschaltbilder ableiten, mit denen das elektrische Verhalten eines Übertragers auf einfache Weise dargestellt werden kann. Zunächst sei noch einmal die Ausgangsanordnung des verlustlosen Übertragers nach Abb. 6.40 mit dem T-Ersatzschaltbild nach Abb. 6.41 und den zugehörigen Gleichungen zusammengestellt, wobei jedoch die in der Gl. (6.98) eingeführten Bezeichnungen verwendet werden sollen:

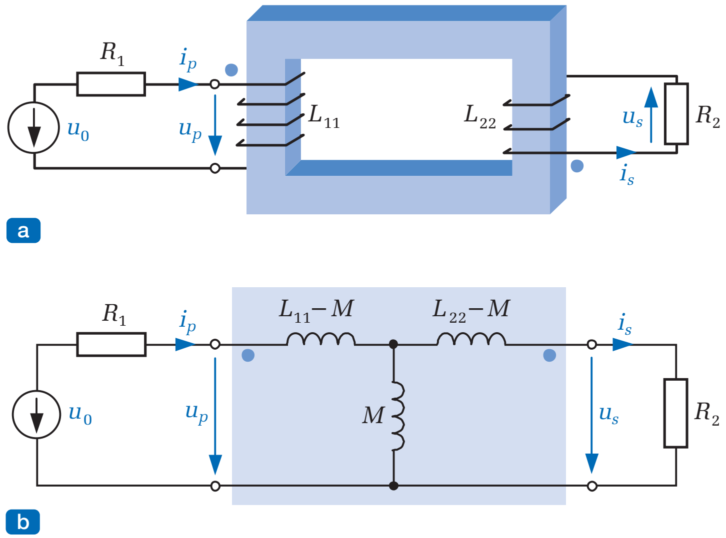


Abbildung 6.49: Ausgangsanordnung und T-Ersatzschaltbild

$$\begin{aligned} u_0 &= R_1\, i_p + L_{11}\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= R_2\, i_s - M\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} u_p &= u_0 - R_1\, i_p = L_{11}\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} \\ u_s &= R_2\, i_s = M\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} - L_{22}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \; . \tag{6.101}$$

Wir haben bereits gezeigt, dass beide Darstellungen der ▶Abb. 6.49, sowohl die reale Anordnung als auch das ESB, durch die Gln. (6.101) beschrieben werden. In dem T-Ersatzschaltbild besteht jedoch eine leitende Verbindung zwischen dem Eingangskreis und dem Ausgangskreis, die bei der Ausgangsanordnung nicht vorhanden ist. Um diese so genannte **galvanische Trennung** zwischen der Spannungsquelle im Eingangskreis und dem Widerstand im Ausgangskreis auch in dem ESB zum Ausdruck zu bringen, muss dieses, so wie in ▶Abb. 6.50 dargestellt, modifiziert, d.h. um einen idealen Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = 1$ erweitert werden.

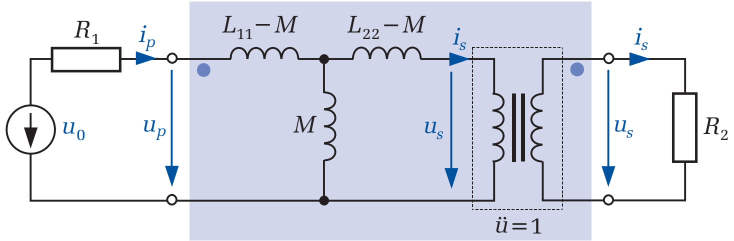


Abbildung 6.50: Ersatzschaltbild mit galvanischer Trennung

Da die Spannungen und Ströme auf der Eingangs- und Ausgangsseite des idealen Übertragers wegen $ü = 1$ identisch sind, hat er keinen Einfluss auf das Verhalten des Netzwerks und die Gleichungen (6.101) behalten weiterhin ihre Gültigkeit.

Wir wollen jetzt die Frage untersuchen, welche Konsequenzen sich für das Ersatznetzwerk des Übertragers in Abb. 6.50 ergeben, wenn wir für $ü$ nicht den Wert 1, sondern das wirkliche Windungszahlenverhältnis N_p/N_s oder auch irgendeinen anderen beliebigen Wert einsetzen. Die Ströme und Spannungen an den Anschlussklemmen des Übertragers sollen sich dabei aber nicht ändern.

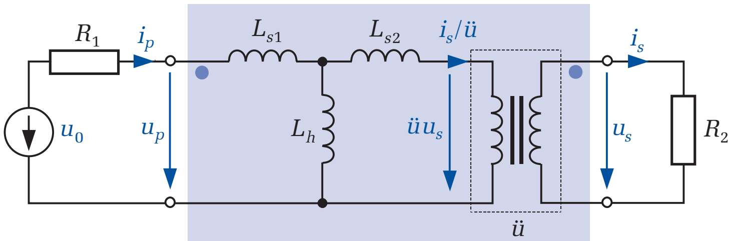


Abbildung 6.51: Ersatzschaltbild mit beliebigem Übersetzungsverhältnis

Zunächst stellen wir fest, dass mit den Beziehungen (6.99) auf der Primärseite des idealen Übertragers in ▶Abb. 6.51 die Spannung $üu_s$ und der Strom $i_s/ü$ vorliegen. Damit dieses Ersatznetzwerk noch immer die ursprüngliche Anordnung aus Abb. 6.49 beschreibt, müssen die Gleichungen (6.101) auch weiterhin ihre Gültigkeit behalten. Wegen der mit $ü$ geänderten Spannungen und Ströme zwischen dem T-Ersatzschaltbild und dem idealen Übertrager müssen sich auch die Werte an den drei induktiven Komponenten ändern. Wir haben diese daher zunächst neu bezeichnet und zwar als L_{s1} (**primärseitige Streuinduktivität**), L_{s2} (**sekundärseitige Streuinduktivität**) und L_h (**Hauptinduktivität**). Die Aufgabe besteht jetzt darin, einen Zusammenhang herzustellen zwischen diesen drei neuen Netzwerkelementen und den bekannten Werten L_{11}, M, L_{22} und $ü$ und zwar so, dass die Gleichungen (6.101) auch weiterhin gelten.

Für das Ersatzschaltbild 6.51 gelten die beiden Maschenumläufe

$$u_0 = R_1 i_p + L_{s1}\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} + L_h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(i_p - \frac{i_s}{ü}\right) \rightarrow u_0 - R_1 i_p = \underbrace{(L_{s1} + L_h)}_{L_{11}}\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} - \underbrace{L_h\frac{1}{ü}}_{M}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} \tag{6.102}$$

und

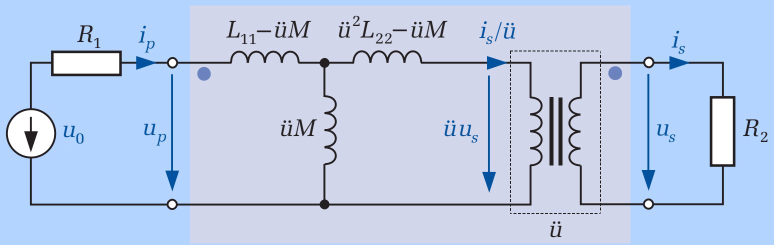
$$0 = üu_s - L_h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(i_p - \frac{i_s}{ü}\right) + L_{s2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{i_s}{ü} \rightarrow u_s = \underbrace{L_h\frac{1}{ü}}_{M}\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} - \underbrace{(L_{s2} + L_h)\frac{1}{ü^2}}_{L_{22}}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6.103}$$

Ein Koeffizientenvergleich zwischen diesen beiden Beziehungen und dem Gleichungssystem (6.101) liefert das Ergebnis

$$L_h = üM\,, \qquad L_{s1} = L_{11} - üM\,, \qquad L_{s2} = ü^2 L_{22} - üM\,. \tag{6.104}$$

Mit den Zusammenhängen nach Gl. (6.104) ist auch das Netzwerk in Abb. 6.51 ein gültiges Ersatzschaltbild zur Beschreibung der Ausgangsanordnung. Stellen wir das verallgemeinerte Ergebnis (ESB mit zugehörigen Gleichungen) in ▶Abb. 6.52 nochmals zusammen:

Allgemeines Ersatzschaltbild



$$u_0 = R_1 i_p + L_{11}\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}$$

$$0 = R_2 i_s - M\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} \qquad ü \text{ ist frei wählbar}$$

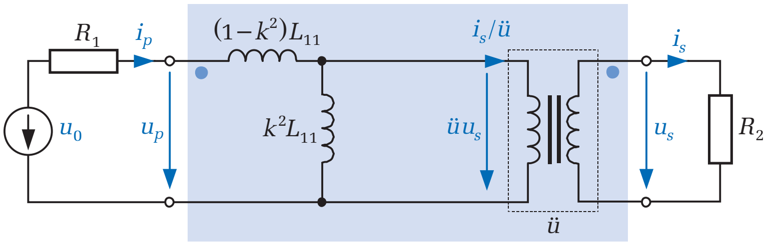
Abbildung 6.52: Allgemeines Ersatzschaltbild für den *verlustlosen Übertrager* und zugehöriges Gleichungssystem

Resultierend haben wir ein allgemein gültiges Ersatzschaltbild gefunden, das mit den beiden angegebenen Gleichungen beschrieben wird. Da das Übersetzungsverhältnis $ü$ in den Gleichungen nicht vorkommt, darf es frei gewählt werden. Die Ursache für diesen Freiheitsgrad liegt in der Tatsache begründet, dass in Abb. 6.51 die vier Parameter L_{s1}, L_{s2}, L_h, $ü$ eingeführt wurden, während in dem Gleichungssystem (6.101) aber nur die drei Komponenten L_{11}, L_{22}, M für die Beschreibung des Übertragers auftreten. Dieser Freiheitsgrad kann dazu genutzt werden, das ESB 6.52 je nach Bedarf derart zu modifizieren, dass die Analyse eines umfangreicheren Netzwerks, in dem Übertrager enthalten sind, möglichst einfach wird.

Zunächst stellen wir zur Kontrolle fest, dass das ESB 6.52 mit der Wahl $ü = 1$ wieder in den Sonderfall des Netzwerks 6.50 übergeht. Man kann das Übersetzungsverhältnis aber auch derart wählen, dass eine der beiden Streuinduktivitäten verschwindet. Mit der Festlegung $ü = M/L_{22}$ lässt sich die sekundärseitige Streuinduktivität L_{s2} zum Verschwinden bringen, so dass sich das ESB auf die in ▶Abb. 6.53 dargestellte Anordnung reduziert. Die beiden verbleibenden induktiven Komponenten können mithilfe der Gl. (6.48) allein durch die Werte L_{11} und k ausgedrückt werden.

Den bei der primärseitigen Streuinduktivität auftretenden Faktor $1 - k^2$ bezeichnet man als **Streugrad** oder **Streuung**

$$\sigma = 1 - k^2 \qquad \text{mit} \qquad 0 \le \sigma \le 1\,. \tag{6.105}$$



$$u_0 = R_1 i_p + L_{11}\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} \qquad ü = \frac{M}{L_{22}} \overset{(6.48)}{=} k\sqrt{\frac{L_{11}}{L_{22}}}$$

$$0 = R_2 i_s - M\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}$$

Abbildung 6.53: Vereinfachtes Ersatzschaltbild für den *verlustlosen Übertrager* und zugehöriges Gleichungssystem

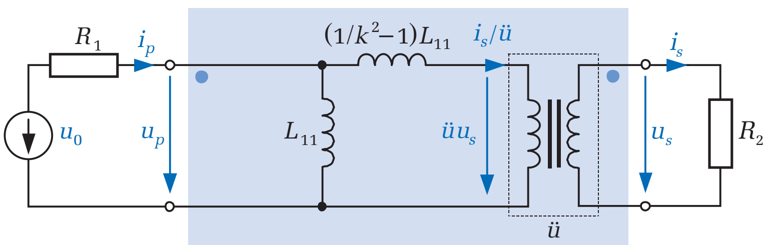
Eine große Streuung bedeutet geringe Kopplung und umgekehrt. Ist $\sigma \approx 0$, d.h. $k^2 \approx 1$, dann spricht man von einem **fest gekoppelten** Übertrager. Wird der Koppelfaktor $|k|$ deutlich kleiner als 1, dann spricht man von einem **lose gekoppelten** Übertrager. Der Grenzfall $\sigma = 1$ bzw. $k = 0$ entspricht den bereits in Kap. 6.3 behandelten nicht gekoppelten Spulen.

In vielen Fällen sind die beiden Wicklungen auf den gleichen Kern gewickelt, so dass mit dem gleichen A_L-Wert die Induktivitäten in dem Verhältnis

$$\frac{L_{11}}{L_{22}} \overset{(5.75)}{=} \frac{N_1{}^2 A_L}{N_2{}^2 A_L} = \frac{N_1{}^2}{N_2{}^2} \quad \overset{\text{Abb.6.53}}{\longrightarrow} \quad ü = k\sqrt{\frac{L_{11}}{L_{22}}} = k\frac{N_1}{N_2} = k\frac{N_p}{N_s} \tag{6.106}$$

stehen und das Übersetzungsverhältnis den in Gl. (6.106) angegebenen Wert annimmt.

Als weitere Möglichkeit kann das Übersetzungsverhältnis in der Form $ü = L_{11}/M$ festgelegt werden. In diesem Fall verschwindet die primärseitige Streuinduktivität L_{s1} und man erhält die Anordnung in ▶Abb. 6.54.



$$u_0 = R_1 i_p + L_{11}\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} \qquad ü = \frac{L_{11}}{M} \overset{(6.48)}{=} \frac{1}{k}\sqrt{\frac{L_{11}}{L_{22}}}$$

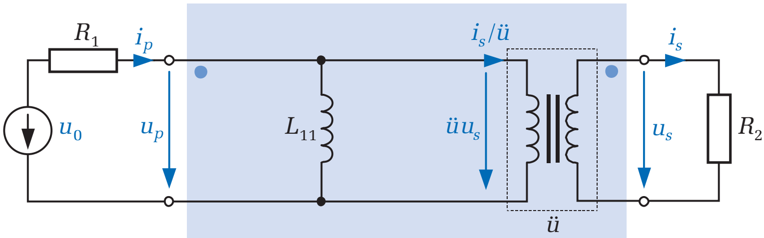
$$0 = R_2 i_s - M\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}$$

Abbildung 6.54: Vereinfachtes Ersatzschaltbild für den *verlustlosen Übertrager* und zugehöriges Gleichungssystem

Unter der Voraussetzung eines gleichen A_L-Wertes für beide Wicklungen gilt jetzt

$$\ddot{u} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{L_{11}}{L_{22}}} = \frac{1}{k}\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{k}\frac{N_p}{N_s}\,. \tag{6.107}$$

Im nächsten Schritt soll das ESB für einen Übertrager angegeben werden, der nicht nur verlustlos, sondern zusätzlich streufrei ist. Streufreiheit bedeutet perfekte Kopplung zwischen den Wicklungen, d.h. $\sigma = 0$ bzw. $|k| = 1$. Ausgangspunkt kann entweder das Ersatzschaltbild 6.53 oder 6.54 sein. In beiden Fällen erhält man die vereinfachte Schaltung in ▶Abb. 6.55.



$$u_0 = R_1 i_p + L_{11}\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}$$

$$0 = R_2 i_s - M\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}$$

$$\ddot{u} = \sqrt{\frac{L_{11}}{L_{22}}} \overset{\text{Sonderfall (6.106,6.107)}}{=} \frac{N_1}{N_2} = \frac{N_p}{N_s}$$

Abbildung 6.55: Ersatzschaltbild für den *verlustlosen streufreien Übertrager* und zugehöriges Gleichungssystem

Im ESB des streufreien Übertragers verschwinden die beiden Streuinduktivitäten L_{s1} und L_{s2}. An diesem Ersatzschaltbild lässt sich sehr anschaulich die Aufteilung des in Beispiel 6.6 berechneten Primärstromes in die beiden Anteile erkennen, einerseits den Teilstrom durch die Selbstinduktivität L_{11} und andererseits den zum idealen Übertrager fließenden Teilstrom $i_s N_s/N_p$. Die noch weiter gehende Vereinfachung dieser Ersatzschaltung 6.55 zu dem in Abb. 6.47 dargestellten und mit den Gleichungen (6.99) beschriebenen idealen Übertrager verlangt zusätzlich das Verschwinden der Induktivität L_{11}. Beim Anlegen einer Spannung u_p darf somit kein Strom durch diesen Querzweig fließen. Mit Gl. (6.28) bedeutet das aber $L_{11} \to \infty$ und damit $R_m \to 0$ bzw. $\mu_r \to \infty$ in Übereinstimmung mit dem Abschnitt 6.7.4.

6.7.7 Der verlustbehaftete Übertrager

In den bisherigen Kapiteln haben wir uns auf den Fall beschränkt, dass der Übertrager keine Verluste aufweist. In der Praxis treten aber verschiedene Verlustmechanismen auf. Diese teilt man auf in Wicklungsverluste, z.B. infolge der ohmschen Widerstände der primären und sekundären Wicklung, und in Kernverluste, z.B. die Hystereseverluste. Die ohmschen Verluste sind unmittelbar mit den Strömen in der Primär- bzw. Sekundärwicklung verknüpft. Im ESB werden diese Verluste durch Widerstände erfasst, die im Primär- bzw. Sekundärkreis des Übertragers angeordnet werden. Für die Kernverluste ist der resultierende Fluss im Kern $\Phi_1 - \Phi_2$ (vgl. Abb. 6.36) verantwortlich. Diesen Verlustmechanismus erfasst man üblicherweise durch einen Widerstand R_h parallel zur Hauptinduktivität. Für den verlustbehafteten Übertrager erhält man damit das gegenüber Abb. 6.52 erweiterte Ersatzschaltbild 6.56.

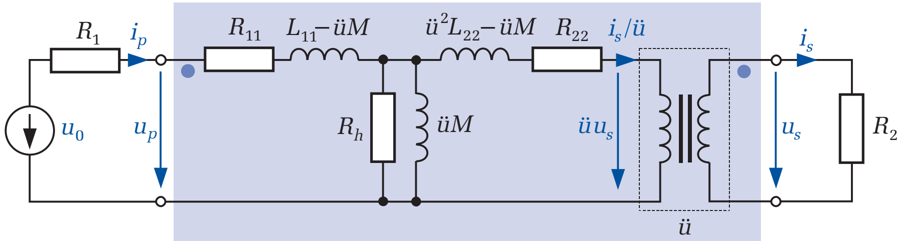


Abbildung 6.56: Ersatzschaltbild für den *verlustbehafteten Übertrager*

In den meisten in der Praxis auftretenden Fällen ist dieses ESB ausreichend zur Beschreibung des Übertragerverhaltens. Es muss allerdings darauf hingewiesen werden, dass die in diesem Modell verwendeten Netzwerkelemente von den unterschiedlichsten Einflussfaktoren abhängen können. Insbesondere die Kernverluste sind stark von den im Allgemeinen nichtlinearen Eigenschaften des Kernmaterials abhängig. Die Verluste werden z.B. von der Temperatur, der Frequenz, der Aussteuerung (maximale Amplitude der Feldstärke), der zeitabhängigen Stromform und auch von der Voraussteuerung (Überlagerung eines Gleichanteils bei der Feldstärke) beeinflusst.

Die Wicklungsverluste hängen ebenfalls stark von der Frequenz ab, da neben den bereits behandelten ohmschen Verlusten zusätzliche Verluste infolge so genannter Wirbelströme in den Drähten entstehen. Diese Ströme sind eine unmittelbare Folge des Induktionsgesetzes, da sich jede einzelne Kupferwindung innerhalb des Wickelpakets in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld befindet, das z.B. von den Nachbardrähten oder auch vom Kern und insbesondere vom Luftspalt hervorgerufen wird. Bei sehr hohen Frequenzen müssen auch noch kapazitive Einflüsse berücksichtigt werden.

6.7.8 Der Spartransformator

Zum Abschluss soll noch eine vereinfachte Bauform vorgestellt werden. In manchen praktischen Anwendungen ist eine Spannungstransformation zwar erwünscht, eine galvanische Trennung zwischen Eingang und Ausgang aber nicht erforderlich. In diesen Fällen lässt sich der Herstellungsaufwand reduzieren, indem die beiden bisher getrennten Wicklungen durch eine einzige Wicklung mit einer **Anzapfung** ersetzt werden.

Das Prinzip ist in ▶Abb. 6.57 dargestellt. In diesem Beispiel wird eine niedrige Eingangsspannung in eine höhere Ausgangsspannung transformiert. Die Kopplung zwischen Primär- und Sekundärseite ist bei dieser Anordnung besser als bei den beiden separaten Wicklungen in Abb. 6.36. Betrachten wir also direkt den idealen Spartransformator ohne Verluste und ohne Streuung, dann gelten die Gleichungen

$$\frac{u_p}{u_s} = \frac{N_p}{N_s} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \qquad \text{und} \qquad \frac{i_p}{i_s} = \frac{N_s}{N_p} = \frac{N_1 + N_2}{N_1} . \tag{6.108}$$

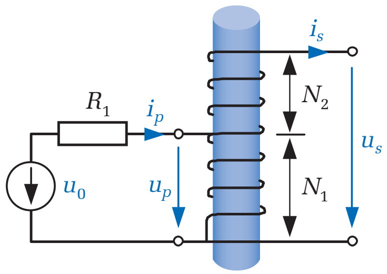


Abbildung 6.57: Spartransformator mit höherer Ausgangsspannung

Man beachte, dass eine höhere Ausgangsspannung gleichzeitig einen niedrigeren Ausgangsstrom zur Folge hat. Auch beim idealen Spartransformator sind Eingangsleistung $u_p i_p$ und Ausgangsleistung $u_s i_s$ zu jedem Zeitpunkt gleich.

Auf entsprechende Weise lässt sich durch eine geeignete Anzapfung eine höhere Eingangsspannung in eine niedrigere Ausgangsspannung transformieren. Die prinzipielle Anordnung ist in ▶Abb. 6.58 dargestellt. Es gelten die zugehörigen Gleichungen

$$\frac{u_p}{u_s} = \frac{N_p}{N_s} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \qquad \text{und} \qquad \frac{i_p}{i_s} = \frac{N_s}{N_p} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} . \tag{6.109}$$

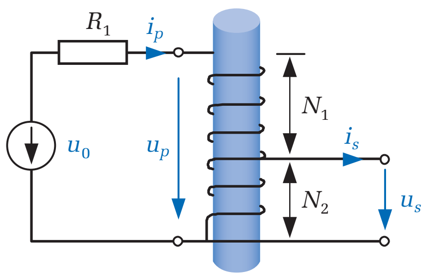


Abbildung 6.58: Spartransformator mit niedrigerer Ausgangsspannung

ZUSAMMENFASSUNG

- Eine **zeitliche Änderung** des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife induziert in der Schleife eine **elektrische Spannung**. Dieser Zusammenhang ist bekannt als das **Faraday'sche Induktionsgesetz**. Die Ursache für die Flussänderung spielt dabei keine Rolle, die Schleife kann ihre Form ändern oder sich in einem ortsabhängigen Feld bewegen, wir sprechen dann von **Bewegungsinduktion**, oder die magnetische Flussdichte kann sich selbst zeitlich ändern, in diesem Fall sprechen wir von Ruheinduktion.
- Bei geschlossener Schleife ruft die induzierte Spannung einen Strom hervor, der so gerichtet ist, dass er die Ursache seines Entstehens zu verhindern sucht.
- Bei der Messung zeitabhängiger Größen ist darauf zu achten, dass in der vom Messgerät und seinen Zuleitungen gebildeten Schleife ebenfalls eine Spannung induziert und das Messergebnis beeinflusst werden kann.
- Wegen der Proportionalität zwischen Strom und zeitlicher Flussänderung kann die induzierte Spannung durch das Einfügen einer Induktivität in das Ersatzschaltbild erfasst werden. Die gegenseitige Beeinflussung mehrerer, von zeitlich veränderlichen Strömen durchflossener Leiterschleifen wird durch das Einfügen von Gegeninduktivitäten in den Ersatzschaltbildern erfasst.
- Wichtige Anwendungen der **Bewegungsinduktion** sind die Umwandlung mechanischer Energie in elektrische Energie in **Generatoren** sowie der umgekehrte Vorgang, nämlich die Umwandlung elektrischer Energie in mechanische Energie in Motoren.
- Die Drehbewegung einer Leiterschleife im zeitlich konstanten Magnetfeld erzeugt **Wechselspannungen**. Zur effizienten Energieübertragung zwischen Kraftwerk und Verbraucher werden einerseits sehr hohe Spannungen verwendet, andererseits Mehrphasensysteme, bei denen sich die Ströme in den Rückleitern kompensieren.
- Die Transformation der Wechselspannungen auf hohe Werte erfolgt in Transformatoren durch Anwendung der **Ruheinduktion**. Beim idealen Transformator stehen die Spannungen im Verhältnis der Windungszahlen, die Ströme im umgekehrten Verhältnis. Die am Eingang zugeführte Leistung wird (im Idealfall) vollständig am Ausgang direkt an den Verbraucher weitergegeben.
- Ein auf der Ausgangsseite angeschlossener Widerstand R wird mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses an die Eingangsklemmen transformiert. Diese Aussage gilt allgemein für **Impedanzen** (dieser Begriff wird in Teil 2, Kap. 8 erklärt) und damit auch für die Induktivität L und den Kehrwert der Kapazität $1/C$.

- Beim Anlegen einer Gleichspannung an eine Induktivität steigt der Strom linear an. Die der Induktivität von der Quelle zugeführte Energie ist im Magnetfeld gespeichert und kann beim Abbau des Magnetfeldes wiedergewonnen werden. Werden zur Realisierung induktiver Bauelemente hochpermeable Materialien eingesetzt, dann entstehen aufgrund der Hysterese-Erscheinungen Verluste in diesen Materialien. Diese sind proportional zu der von der Hystereseschleife gebildeten Fläche, proportional zur Frequenz und zum Volumen des Materials.

COMPANION WEBSITE Lösungen

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1 Induktionsgesetz

Ein auf der z-Achse befindlicher unendlich langer Linienleiter wird von einem zeitabhängigen Strom $i(t)$ durchflossen. Der Rückleiter ist sehr weit entfernt, so dass sein Einfluss vernachlässigt werden kann. In der Ebene $y = 0$ befindet sich eine nicht geschlossene quadratische Leiterschleife der Seitenlänge $b - a$.

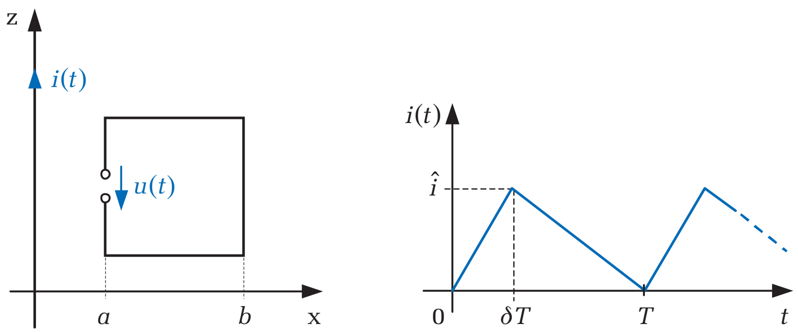


Abbildung 6.59: Betrachtete Leiteranordnung und zeitabhängiger Strom

1. Berechnen Sie die in der Abbildung eingetragene induzierte Spannung $u(t)$ als Funktion des Stromes $i(t)$.
2. Stellen Sie für den dreieckförmigen Stromverlauf die induzierte Spannung $u(t)$ in einem Diagramm dar und geben Sie Maximal- und Minimalwert der Spannung an.
3. Welche Gegeninduktivität M besteht zwischen den beiden Schleifen?

Aufgabe 6.2 Induktionsgesetz

Der in ▶Abb. 6.60 dargestellte Schleifkontakt aus Metall rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung. Der Zeiger gleitet dabei auf einem Metallring mit dem Radius a. Ein homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{e}}_z B_0$ durchflutet den gesamten Metallring senkrecht zur Ringebene. Alle Betrachtungen sollen für $0 < \omega t < 2\pi$ erfolgen.

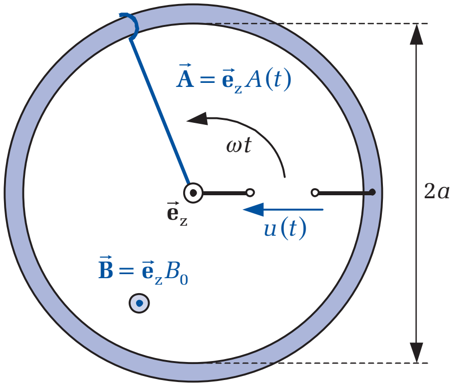


Abbildung 6.60: Rotierender Zeiger im homogenen Magnetfeld

Berechnen Sie die in Abb. 6.60 eingetragene induzierte Spannung $u(t)$, die sich infolge der Bewegung zwischen dem Drehpunkt des Zeigers und dem Metallring einstellt.

Aufgabe 6.3 Energieaufteilung zwischen Kern und Luftspalt

Ein Ringkern der Abmessungen $a = 2$ cm, $b = 2{,}5$ cm und der Dicke $h = 0{,}5$ cm besteht aus hochpermeablem Material $\mu = 1000\mu_0$ und besitzt einen Luftspalt der Länge $d = 1$ mm. Das Feld außerhalb des Luftspalts wird vernachlässigt. Die Wicklung besteht aus $N = 6$ Windungen und wird von einem Strom $I = 1$ A durchflossen.

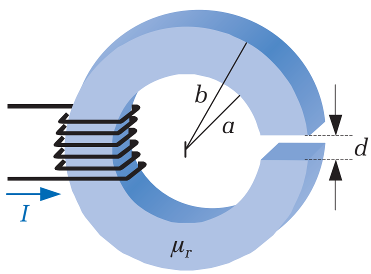


Abbildung 6.61: Ringkern mit Luftspalt

1. Bestimmen Sie die Induktivität der Anordnung.
2. Bestimmen Sie die insgesamt in dem Bauelement gespeicherte Energie.
3. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke und die Flussdichte im Kern und im Luftspalt.
4. Bestimmen Sie die prozentuale Aufteilung der Energie zwischen Kern und Luftspalt.

Aufgabe 6.4 Induktivitätserhöhung durch Ferritring

Ein praktisch unendlich langer, gerader Runddraht (Permeabilität μ_0, Radius a) führt den Gleichstrom I. Der Rückleiter ist sehr weit entfernt, so dass sein Einfluss vernachlässigt werden kann. Um den Draht wird ein Hohlzylinder aus nicht leitendem, permeablem Material (Permeabilität $\mu > \mu_0$, Länge l, Innenradius b, Außenradius c) konzentrisch angeordnet.

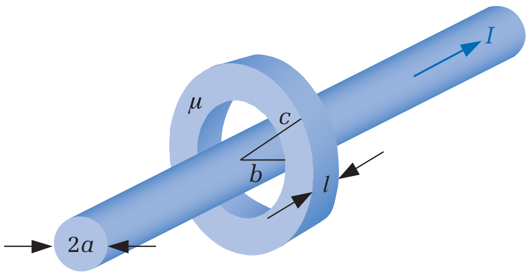


Abbildung 6.62: Kupferrunddraht mit Ferritring

1. Um welchen Betrag ändert sich die magnetische Energie durch das Anbringen des permeablen Hohlzylinders?
2. Welche zusätzliche Induktivität erhält der Stromkreis durch das Anbringen des permeablen Hohlzylinders?

Aufgabe 6.5 Induktivität des Koaxialkabels

1. Berechnen Sie für das in Abb. 1.33 dargestellte Koaxialkabel die Induktivität pro Längeneinheit. Für den Raum zwischen Innen- und Außenleiter kann $\mu = \mu_0$ angenommen werden.
2. Welche Beiträge liefern Innenleiter, Zwischenraum und Außenleiter zur Induktivität, wenn die Abmessungen $a = 0{,}5$ mm, $b = 3$ mm und $c = 3{,}2$ mm betragen?

Aufgabe 6.6 Gekoppelte Induktivitäten

Die aus einem Material der Permeabilitätszahl μ_r bestehenden vier gleichen Ringkerne mit rechteckigem Querschnitt werden von einem sinusförmigen Strom $i_1(t)$ durchflossen. Jeweils zwei Kerne sind durch widerstandslose Kurzschlussschleifen verbunden, in denen sich die Ströme $i_2(t)$ und $i_3(t)$ einstellen. Nun soll das Klemmenverhalten dieses Bauelements untersucht werden.

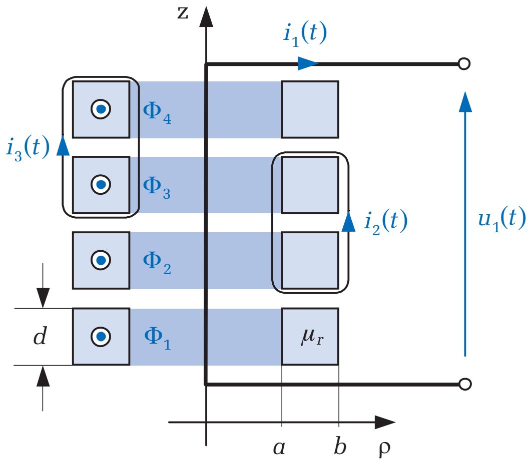


Abbildung 6.63: Induktivität aus vier Ringkernen

1. Bestimmen Sie die magnetischen Flüsse $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$ und $\Phi_4(t)$ in Abhängigkeit der Ströme, der Geometrie- und der Materialdaten.
2. Wenden Sie das Induktionsgesetz auf die beiden Kurzschlussschleifen an und berechnen Sie $i_2(t)$ und $i_3(t)$ in Abhängigkeit von $i_1(t)$.
3. Berechnen Sie die Induktivität L_0 der Anordnung.
4. Welche Induktivität L besitzt die Anordnung nach dem Entfernen der beiden Kurzschlussschleifen?

Aufgabe 6.7 Serien- und Parallelschaltung gekoppelter Induktivitäten

Für die beiden gekoppelten Leiterschleifen der ▶Abb. 6.64 gelten die Beziehungen

$$u_1 = L_{11}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\,.$$

Die Induktivitätswerte L_{11}, L_{22} und M sind bekannt.

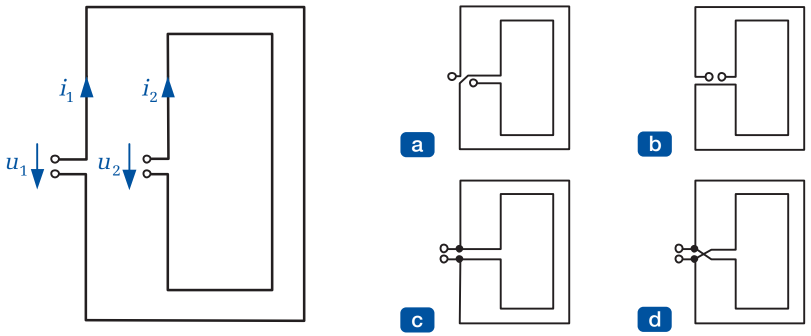


Abbildung 6.64: Zusammenschaltung gekoppelter Induktivitäten

Welche Gesamtinduktivität stellt sich jeweils zwischen den Eingangsklemmen ein, wenn die beiden Schleifen entsprechend den Abbildungen a) bis d) zusammengeschaltet werden?

II

Periodische und nicht periodische Signalformen

Der Übergang zu den zeitabhängigen Strom- und Spannungsformen

7

ÜBERBLICK

Einführung

» Im Gegensatz zu den Gleichstromnetzwerken treten bei den zeitabhängigen Vorgängen zusätzliche Effekte auf, die im Rahmen der Schaltungsanalyse nicht außer Acht gelassen werden dürfen. Zum einen beeinflussen sowohl die parasitären Eigenschaften der Bauelemente als auch die induktiven und kapazitiven Kopplungen innerhalb der Schaltungen mit zunehmenden Frequenzen mehr und mehr das Schaltungsverhalten. Zum anderen führt die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Felder bei schnellen zeitlichen Änderungen dazu, dass diese Änderungen an unterschiedlichen Stellen einer Schaltung nicht mehr gleichzeitig auftreten.

Das folgende Kapitel diskutiert diese Situationen im Detail und führt gleichzeitig die notwendigen Kenngrößen ein, die für die Beschreibung zeitlich periodischer Signalformen notwendig sind. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- abzuschätzen, ob ein Netzwerk mit zeitabhängigen Strömen und Spannungen mithilfe der quasistationären Rechnung behandelt werden darf,
- den formelmäßigen Zusammenhang zwischen zeitabhängigen Strömen und Spannungen an passiven Netzwerkelementen anzugeben,
- die verschiedenen Kenngrößen für zeitlich periodische Ströme und Spannungen zu berechnen.

7.1 Vorbetrachtungen

In diesem zweiten Teil aus der Reihe *Grundlagen der Elektrotechnik* werden wir uns mit der Analyse von Schaltungen mit zeitabhängigen Strömen und Spannungen beschäftigen. Die Berechnung der Gleichstromnetzwerke mit den zeitlich konstanten Größen U und I haben wir bereits im ersten Teil kennen gelernt. Eine besondere technische Bedeutung kommt den zeitlich periodischen Vorgängen zu, die ihrerseits entsprechend ▶Abb. 7.1 in sinusförmige und nicht sinusförmige Signalformen unterteilt werden. Nicht periodische Strom- und Spannungsverläufe entstehen insbesondere bei Schaltvorgängen, z.B. beim erstmaligen Anschließen eines elektronischen Geräts an die Spannungsversorgung.

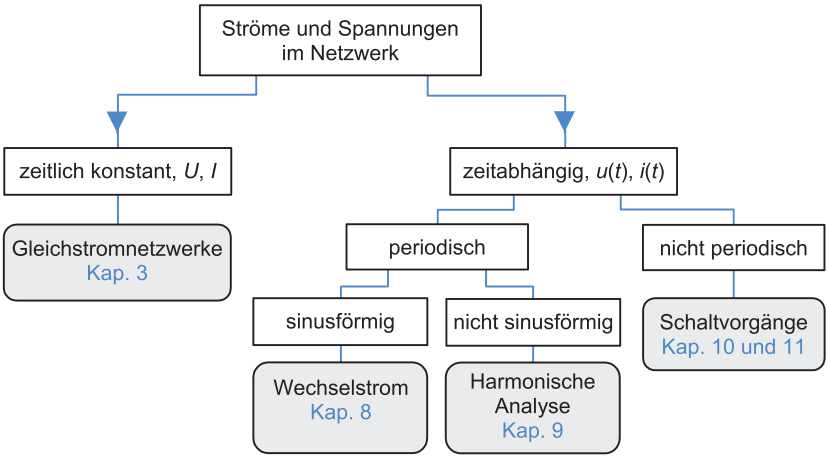


Abbildung 7.1: Übersicht zu den möglichen Strom- und Spannungsformen in einem Netzwerk

Wir werden in den folgenden Kapiteln sehen, dass zu der Vielzahl möglicher Zeitabhängigkeiten bei den Strömen und Spannungen auch eine entsprechende Anzahl mathematischer Verfahren existiert, die in besonderer Weise für die Lösung der jeweiligen Problemstellung geeignet sind.

Die komplexe Wechselstromrechnung (*symbolische Methode*) ist eine sehr effiziente Methode zur Berechnung sinusförmiger Vorgänge. Wir werden sie in Kap. 8 ausführlich behandeln. Die nicht sinusförmigen Vorgänge in Kap. 9 werden mithilfe der harmonischen Analyse (*Fourier-Entwicklung*) zurückgeführt auf eine Überlagerung von sinusförmigen Vorgängen unterschiedlicher Frequenzen. Bei der Analyse der Schaltvorgänge entstehen üblicherweise Systeme von Differentialgleichungen, die in einfachen Fällen direkt gelöst werden können (Kap. 10) oder mithilfe der *Laplace-Transformation* zunächst in einen *Bildbereich* übertragen werden, in dem die entstandene algebraische Form des Gleichungssystems auf einfachere Weise gelöst werden kann (Kap. 11). Die anschließende Rücktransformation liefert dann ebenfalls die gesuchte zeitabhängige Lösung.

Bevor wir mit der eigentlichen Netzwerkanalyse beginnen, müssen wir zunächst noch die Voraussetzungen diskutieren, unter denen diese Verfahren zu praktisch sinnvollen Ergebnissen führen. Eine oft unterschätzte Ursache für die Abweichungen zwischen berechneten und den an einer realen Schaltung gemessenen Signalverläufen ist die unzureichende Modellierung der Schaltung. Die Diskrepanz zwischen dem Schaltungsaufbau und dem verwendeten Ersatzschaltbild führt zwangsläufig zu fehlerhaften Resultaten. Bei den zeitabhängigen Vorgängen spielt außerdem die Geschwindigkeit, mit der sich die Ströme und Spannungen abhängig von der Zeit ändern, eine begrenzende Rolle.

7.2 Modellbildung

Der erste Schritt bei der Analyse einer realen Schaltung besteht in der Aufstellung eines geeigneten **Ersatzschaltbildes**, in dem die realen Bauelemente durch einfache Schaltsymbole repräsentiert werden. Die Ableitung der Modellparameter für die einzelnen Komponenten haben wir bereits im ersten Teil für einfache geometrische Anordnungen, z.B. bei der Berechnung der Kapazität eines Plattenkondensators oder bei der Berechnung der Induktivitäten eines Übertragers, kennen gelernt. Dabei wurden die im allgemeinen Fall komplizierten dreidimensionalen Feldverteilungen mithilfe geeigneter Rechenverfahren und unter Zuhilfenahme vereinfachender Annahmen zurückgeführt auf die integralen Größen R, L und C.

Die Beschreibung der Bauelemente durch einfache Modelle ist aber in vielen Fällen nicht ausreichend, da unter Umständen wesentliche Verhaltensweisen der Schaltung nicht hinreichend gut beschrieben werden können. Je nach Anforderung an die Genauigkeit der Resultate muss bereits jede einzelne Komponente durch ein umfangreiches Netzwerk modelliert werden, das alle relevanten parasitären Eigenschaften berücksichtigt.

Als Beispiel beinhaltet ein einfaches Ersatzschaltbild für eine Spule neben der Induktivität auch einen Widerstand zur Erfassung der Verluste und eine Kapazität, deren Wert vom Wickelaufbau abhängt, vgl. Abb. 5.42. Beim Kondensator kann der Verlustmechanismus im Dielektrikum oder die Induktivität der Anschlussdrähte von Bedeutung sein. Die parasitären Eigenschaften der realen Komponenten werden auf diese Weise durch zusätzliche ideale Komponenten erfasst. Insgesamt lässt sich feststellen, dass die aus realen Bauelementen aufgebauten Schaltungen durch Schaltbilder beschrieben werden können, die ausschließlich aus den Basiskomponenten R, L und C sowie den eventuell vorhandenen Koppelinduktivitäten M bestehen. Auf die gleiche Weise können auch nichtideale Strom- und Spannungsquellen durch ideale Quellen und zusätzliche ideale Komponenten ersetzt werden. Eine Modellierung nichtlinearer Zusammenhänge, wie sie z.B. infolge nichtlinearer Materialeigenschaften entstehen (vgl. die Hysteresekurve in Abb. 5.21), wird in diesem Band nicht behandelt.

Bei den zeitabhängigen Spannungs- und Stromverläufen kommt aber noch ein weiterer Aspekt hinzu. Nicht nur die Bauelemente müssen entsprechend modelliert werden, auch der Aufbau der Schaltung kann eine große Rolle spielen. Jede leitende Verbindung zwischen den Bauelementen besitzt einen ohmschen Widerstand, eine Masche des Netzwerks besitzt eine Induktivität und zwischen verschiedenen Maschen bestehen Gegeninduktivitäten, d.h. ein sich zeitlich ändernder Strom in einer Masche induziert Spannungen in den anderen Maschen des Netzwerks. Zusätzlich existieren Teilkapazitäten zwischen den unterschiedlichen Schaltungsteilen. Während diese induktiven und kapazitiven Effekte bei Gleichstrom keine Rolle spielen, werden sie das Verhalten der Schaltung mit zunehmender Frequenz immer stärker beeinflussen. Bei der Modellierung müssen diese zusätzlich in der Schaltung auftretenden Effekte durch geeignete Erweiterung des Schaltbildes gegebenenfalls berücksichtigt werden.

7.3 Quasistationäre Rechnung

Die Übereinstimmung zwischen den berechneten Strom- und Spannungsverläufen in einer Schaltung und den in der realen Anordnung auftretenden Kurvenformen hängt neben der möglichst genauen Modellierung sowohl der Einzelkomponenten als auch des Schaltungsaufbaus noch von einer weiteren Voraussetzung ab. Die Änderungsgeschwindigkeit der Ströme und Spannungen muss nämlich so klein sein, dass trotz der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Felder die gesamte Schaltung praktisch gleichzeitig von den Änderungen betroffen ist. Die entlang der räumlichen Ausdehnung der Schaltung infolge der Laufzeiten auftretenden Phasenverschiebungen bei zeitlich periodischen Signalen können unter dieser Voraussetzung vernachlässigt werden, wir sprechen dann von einem **quasistationären Zustand**.

Zur Verdeutlichung betrachten wir die ▶Abb. 7.2, in der eine einfache Schaltung an eine hochfrequente Wechselspannungsquelle angeschlossen ist. Von dem sich mit Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s ausbreitenden elektromagnetischen Feld ist ebenfalls eine Periode in der Abbildung dargestellt. Es ist unmittelbar zu erkennen, dass die innerhalb der Schaltung auftretenden Phasendifferenzen umso größer werden, je höher die Frequenz $f = 1/T$, d.h. je kleiner die Wellenlänge $\lambda = cT$ ist.

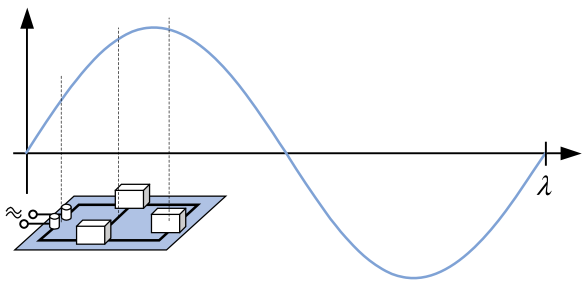


Abbildung 7.2: Zur Gültigkeit der quasistationären Rechnung

Beispiel 7.1: Zahlenbeispiel

Die maximale Abmessung einer Schaltung beträgt $l = 20$ cm. Wie hoch darf die Frequenz werden, damit die Phasenunterschiede innerhalb der Schaltung nicht größer als 5° werden?

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{l}{cT} = \frac{f\,l}{c} \le \frac{5}{360} \qquad \rightarrow \qquad f \le \frac{5}{360}\,\frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 20{,}8\,\mathrm{MHz} \tag{7.1}$$

Wir wollen vereinbaren, dass bei allen in den nachstehenden Kapiteln analysierten Schaltungen die beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Alle zur hinreichend genauen Beschreibung der realen Schaltung benötigten Komponenten R, L, C und M, insbesondere die parasitären Eigenschaften der einzelnen Bauteile sowie die besonderen Eigenschaften infolge des Aufbaus, sind im Ersatzschaltbild erfasst.
2. Die zeitlichen Änderungen der Ströme und Spannungen finden überall in der Schaltung praktisch gleichzeitig statt.

Daraus ergeben sich die folgenden Konsequenzen:

- Die Vorgänge können als ortsunabhängig betrachtet werden.
- Die Netzwerkelemente R, L, C werden weiterhin als konzentrierte Elemente aufgefasst.
- Die Schaltungsanalyse bezieht sich ausschließlich auf die Komponenten im Schaltbild. Das reale Verhalten der Schaltung wird dadurch hinreichend gut beschrieben.
- Die Kirchhoff'schen Gesetze (Maschenregel und Knotenregel) dürfen weiterhin verwendet werden. Daraus folgt, dass auch die Gesetzmäßigkeiten für die Zusammenfassung der Komponenten bei Reihen- und Parallelschaltungen weiterhin gelten.
- Da die betrachteten Netzwerke aus linearen Elementen zusammengesetzt sind, gilt weiterhin der Überlagerungssatz, d.h. mehrere im Netzwerk vorhandene Quellen dürfen unabhängig voneinander betrachtet werden. Als Gegenbeispiel sei nochmals auf die Verlustberechnung in Kap. 3.8 hingewiesen.

7.4 Die Netzwerkanalyse

Von der Betrachtung der Gleichstromnetzwerke in Kap. 3 wissen wir, dass bei einem aus z Zweigen bestehenden Netzwerk insgesamt $2z$ Unbekannte vorliegen, nämlich z Spannungen und z Ströme. Unter Berücksichtigung der Zusammenhänge zwischen Strom und Spannung an den Komponenten kann die Anzahl der Unbekannten auf die Hälfte reduziert werden. Zur Aufstellung der verbleibenden z linear unabhängigen Gleichungen stehen uns die Kirchhoff'schen Sätze, nämlich die Maschenregel und die Knotenregel, zur Verfügung.

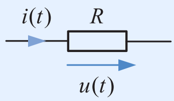
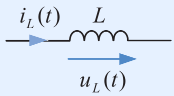
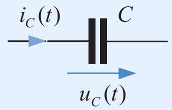
Stellen wir zunächst noch einmal die an den Netzwerkelementen geltenden Beziehungen in einer kleinen Übersicht zusammen. Am Widerstand gilt das Ohm'sche Gesetz (2.29) zu jedem Zeitpunkt, d.h. auch für allgemein zeitabhängige Größen. Unabhängig von dem zeitlichen Verlauf der Ströme und Spannungen gilt bei den Induktivitäten immer die Gl. (6.28). Die entsprechende Beziehung bei den Kapazitäten kann ausgehend von der Definition des Stromes (2.3) und unter Berücksichtigung der integralen Beziehung (1.74) leicht abgeleitet werden

$$i(t) \overset{(2.3)}{=} \frac{\mathrm{d}\,q(t)}{\mathrm{d}\,t} \overset{(1.74)}{=} C\frac{\mathrm{d}\,u(t)}{\mathrm{d}\,t}\,. \tag{7.2}$$

Mit dem bei allen Komponenten verwendeten Verbraucherzählpfeilsystem gelten die in der Tab. 7.1 zusammengestellten Gleichungen.

Tabelle 7.1

Zusammenhang zwischen Strang- und Außenleitergrößen

Komponente	Spannung	Strom	Gleichung
	$u(t) = R\,i(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}\,u(t)$	(7.3)
	$u_L(t) = L\,\frac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}t}$	$i_L(t) = \frac{1}{L}\int u_L(t)\,\mathrm{d}t$	(7.4)
	$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\,\mathrm{d}t$	$i_C(t) = C\,\frac{\mathrm{d}\,u_C(t)}{\mathrm{d}t}$	(7.5)

Besitzt das Netzwerk k Knoten, dann können $k-1$ linear unabhängige Knotengleichungen aufgestellt werden, wobei die spezielle Auswahl der Knoten keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Zwei prinzipielle Möglichkeiten zur Aufstellung der noch benötigten $m = z - (k-1)$ linear unabhängigen Maschengleichungen wurden bereits in Kap. 3 gezeigt. Eine ausführlichere Beschreibung der Methodik insbesondere im Hinblick auf eine Reduzierung des Aufwandes erfolgt im 3. Teil dieser Buchreihe.

7.5 Kurvenformen und ihre Kenngrößen bei zeitlich periodischen Vorgängen

In den Kap. 8 und 9 werden wir uns ausschließlich mit den zeitlich periodischen Vorgängen beschäftigen. Zur Charakterisierung der Signalformen werden wir einige Begriffe benötigen, die an dieser Stelle definiert werden sollen.

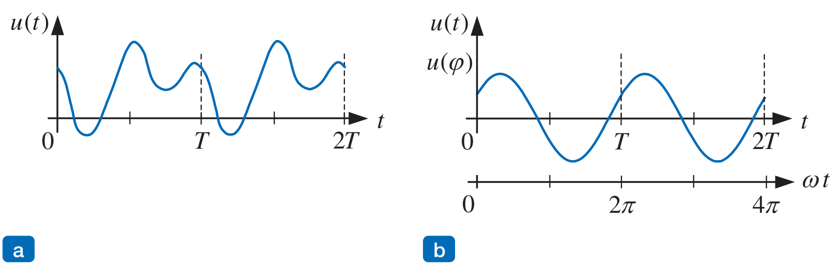


Abbildung 7.3: a) Beliebige periodische Signalform b) Sinusförmige periodische Signalform

Wir betrachten zunächst die beiden Signalverläufe in ▶Abb. 7.3. Beliebige periodische Signale können zwar innerhalb der Periodendauer T einen zeitlich beliebigen Verlauf aufweisen, nach jeder Periodendauer wiederholen sich die Kurvenformen aber auf die exakt gleiche Weise, d.h. für jede ganze Zahl k gilt die Beziehung

$$u(t + kT) = u(t). \tag{7.6}$$

Die sinusförmigen Signale[1] in Abb. 7.3b) bilden einen Sonderfall der periodischen Signale. Sie werden vielfach nicht als Funktion der Zeit, sondern als Funktion des Winkels $\varphi = \omega t$ dargestellt. Der Übergang zwischen den beiden Darstellungsarten erfolgt durch einfache Umskalierung, nämlich durch Multiplikation der Zeitachse mit der Kreisfrequenz ω. Die Periodendauer T auf der Zeitachse geht dann über in den Winkel $\omega T = 2\pi$ auf der ωt-Achse (vgl. Abb. 7.3b)). Die in Gl. (7.6) formulierte Periodizität für eine als Funktion der Zeit gegebene Funktion nimmt im Falle der ωt-Achse die folgende Form an:

$$u(\omega t + k2\pi) = u(\omega t). \tag{7.7}$$

Mittelwert

Unter dem Mittelwert einer zeitabhängigen periodischen Funktion versteht man definitionsgemäß das über eine Periodendauer genommene Integral der Funktion, bezogen auf die Periodendauer

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int\limits_{t=t_0}^{t_0+T} u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} u(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega t=\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} u(\omega t)\,\mathrm{d}(\omega t)\,. \tag{7.8}$$

Die Fläche unterhalb der Kurve ist also identisch zum Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen $\overline{u}$ und T. Zur Kennzeichnung des Mittelwertes wird ein übergesetzter Querstrich verwendet. Als Integrationsvariable kann entweder die Zeit t mit dem zugehörigen Integrationsbereich $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ oder der Winkel $\varphi = \omega t$ mit dem Integrationsbereich $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + 2\pi$ verwendet werden.

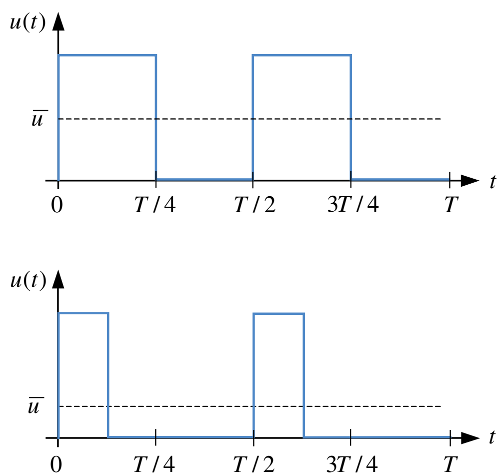


Abbildung 7.4: Mittelwerte von Rechteckfunktionen

1 Der Begriff *sinusförmige Signale* steht stellvertretend sowohl für die Sinus- als auch für die Kosinusfunktionen mit beliebigem Phasenwinkel.

Die Wahl der Integrationsgrenzen t_0 bzw. φ_0 ist wegen der Periodizität der Funktionen beliebig. Die ▶Abb. 7.4 zeigt als Beispiel zwei Rechteckfunktionen mit ihrem Mittelwert. Bei reinen Sinus- oder Kosinusfunktionen ist der arithmetische Mittelwert gleich Null.

Gleichrichtwert

Zur Berechnung des Gleichrichtwertes bildet man zunächst den Betrag der Funktion. Von diesem Ausdruck wird dann mit der Formel (7.8) der Mittelwert berechnet

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_{t=t_0}^{t_0+T} |u(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} |u(\varphi)|\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega t=\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} |u(\omega t)|\,\mathrm{d}(\omega t). \tag{7.9}$$

Beispiel 7.2: Gleichrichtwert

Für den sinusförmigen Spannungsverlauf $u = \hat{u}\sin(\omega t)$ ist der Gleichrichtwert zu berechnen.

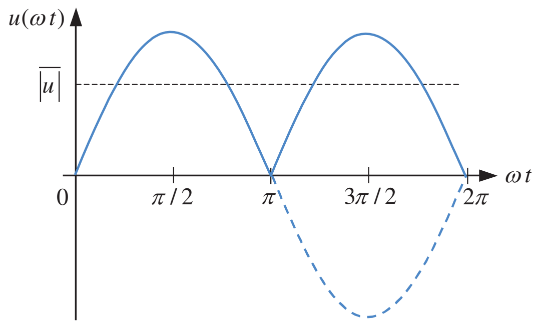


Abbildung 7.5: Gleichrichtwert einer sinusförmigen Funktion

Infolge der Betragsbildung wird der untere Kurventeil nach oben geklappt, so dass man das folgende Ergebnis erhält

$$\overline{|u|} = \frac{\hat{u}}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(\omega t)|\,\mathrm{d}(\omega t) = \frac{\hat{u}}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(\omega t)\,\mathrm{d}(\omega t) = \frac{-\hat{u}}{\pi}\cos(\omega t)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\hat{u}\,. \tag{7.10}$$

Auch der Gleichrichtwert ist ein arithmetischer Mittelwert, allerdings für den Betrag einer Funktion. Er gewinnt Bedeutung im Zusammenhang mit Gleichrichterschaltungen.

Effektivwert

In vielen Zusammenhängen treten Strom und Spannung nicht linear, sondern quadratisch auf. Ein einfaches Beispiel ist die Berechnung der Verluste an einem ohmschen Widerstand. Wegen der besonderen Bedeutung definiert man daher den Effektivwert der Spannung in der folgenden Form

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=t_0}^{t_0+T} u^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{\omega t=\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} u^2(\omega t)\,\mathrm{d}(\omega t)}\,. \tag{7.11}$$

Das Quadrat der Spannung wird über eine Periodendauer integriert und auf die Periodendauer bezogen. Die Wurzel aus diesem Ausdruck nennt man **quadratischen Mittelwert** oder **Effektivwert** der Spannung. Bei anderen zeitabhängigen Größen, z.B. beim Strom, wird der Effektivwert nach der gleichen Vorschrift berechnet.

Für eine beliebige zeitabhängige Signalform $u(t)$ bzw. $i(t)$ ist der **Momentanwert** der Verluste an einem ohmschen Widerstand durch die Momentanwerte von Strom und Spannung, d.h. durch die Beziehung

$$p(t) = u(t)\,i(t) = i^2(t)\,R = \frac{u^2(t)}{R} \tag{7.12}$$

gegeben. Den zeitlichen Mittelwert der Verluste findet man also mithilfe der Effektivwerte

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_{t=t_0}^{t_0+T} p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t=t_0}^{t_0+T} i^2(t)\,R\,\mathrm{d}t = I_{eff}{}^2 R = \frac{1}{R}U_{eff}{}^2 = I^2 R = \frac{1}{R}U^2\ . \tag{7.13}$$

Durch Vergleich mit der Beziehung (2.49) gelangt man zu folgender Aussage:

Merke

Der Effektivwert eines beliebigen zeitabhängigen Stromes gibt denjenigen Wert des Stromes an, den ein Gleichstrom haben muss, der im zeitlichen Mittel an einem ohmschen Widerstand die gleichen Verluste verursacht.

Diese Aussage liefert auch die Begründung für die gleiche Bezeichnungsweise von Gleichstromgrößen und Effektivwerten durch Großbuchstaben[2].

2 Der Index *eff* ist gemäß Norm nur erforderlich bei möglicherweise auftretenden Verwechslungen. Wir werden ihn daher in den folgenden Kapiteln, sofern nicht gleichzeitig zeitunabhängige Größen auftreten, generell weglassen.

Beispiel 7.3: Effektivwert

Für den sinusförmigen Stromverlauf $i = \hat{i}\sin(\omega t)$ ist der Effektivwert zu berechnen.

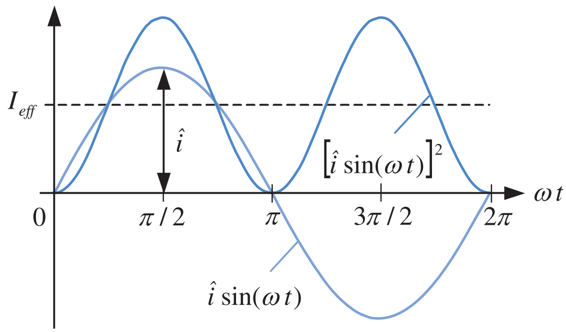


Abbildung 7.6: Effektivwert einer sinusförmigen Funktion

Ausgehend von Gl. (7.11) und mit dem Integral (H.11) im Anhang nimmt der Effektivwert der sinusförmigen Größe den resultierenden Ausdruck

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\hat{i}\sin(\omega t)\right]^2 \mathrm{d}(\omega t)} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{2}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \tag{7.14}$$

an. Ein Gleichstrom der Größe $I = I_{eff}$ und ein sinusförmiger Strom der Amplitude $\hat{i} = \sqrt{2}\,I$ rufen an einem Widerstand im zeitlichen Mittel die gleichen Verluste hervor.

Damit gilt die Aussage:

Merke

Der Effektivwert einer sinusförmigen Funktion entspricht dem durch $\sqrt{2}$ dividierten Spitzenwert. Bei anderen Kurvenformen gelten andere Faktoren (vgl. Kap. H.3 im Anhang).

Maximalwert, Spitzenwert

Unter dem Maximalwert einer zeitabhängigen Größe $\hat{u} = |u|_{\max}$ wird der betragsmäßig größte Augenblickswert verstanden. Bei einer reinen Sinusfunktion entspricht der Maximalwert der Amplitude. Von Spitzenwert spricht man, wenn der Maximalwert nur kurzzeitig innerhalb einer Periodendauer auftritt.

Spitze-Spitze-Wert, Schwingungsbreite

Als Spitze-Spitze-Wert u_{ss} oder auch als Schwingungsbreite wird die Differenz zwischen dem Maximal- und dem Minimalwert einer zeitabhängigen Funktion bezeichnet. Bei einer zwischen $\hat{u}$ und $-\hat{u}$ verlaufenden Sinusfunktion entspricht der Spitze-Spitze-Wert dem Abstand zwischen dem positiven und dem negativen Scheitelwert $u_{ss} = 2\hat{u}$.

ZUSAMMENFASSUNG

- **Zeitabhängige Vorgänge** können eingeteilt werden in die Gruppen „zeitlich periodisch“ mit den Untergruppen *sinusförmig* und *nicht sinusförmig* sowie „zeitlich nicht periodisch“, z.B. Schaltvorgänge.
- Bei den zeitabhängigen Vorgängen erhalten die parasitären Eigenschaften der Bauelemente eine mit wachsender Frequenz zunehmende Bedeutung. Das gleiche gilt für die induktiven und kapazitiven Kopplungen innerhalb der Baugruppen.
- Die den Schaltungsanalysen zugrunde gelegten **Ersatzschaltbilder** sollten das reale Verhalten einer Schaltung möglichst genau beschreiben, d.h. alle relevanten frequenzabhängigen Einflüsse müssen in den Ersatzschaltbildern mit erfasst werden.
- Zur Charakterisierung der zeitlich periodischen Signalformen werden verschiedene **Kenngrößen** definiert, deren Nutzen aber erst bei den Berechnungen in späteren Kapiteln deutlich wird.

Übungsaufgaben

Lösungen

Aufgabe 7.1 Parasitäre Eigenschaft

Die Messung einer Spule mithilfe eines Impedanzanalysators ergab, dass sie durch das Ersatzschaltbild in ▶Abb. 7.7 beschrieben werden kann.

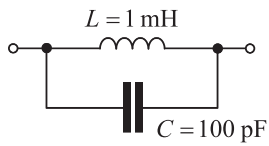


Abbildung 7.7: Einfaches Ersatzschaltbild für eine Spule

1. Berechnen Sie die beiden Teilströme durch L und durch C, wenn an die Anschlussklemmen eine Spannung $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ angelegt wird.
2. In welchem Frequenzbereich dominiert der Einfluss der parasitären Kapazität?

Aufgabe 7.2 Kenngrößen

Die ▶Abbildung 7.8a) zeigt den prinzipiellen Aufbau einer **Phasenanschnittschaltung** (Dimmschaltung). Die Glühlampe R_L ist über einen Halbleiterschalter (Thyristor) mit der 50-Hz-Netzwechselspannung $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t) = 230\sqrt{2}\,\mathrm{V}\sin\omega t$ verbunden. Der Schalter wird so angesteuert, dass er in jeder Netzhalbwelle während der Zeit $0 \le t \le \alpha T/2$ mit $0 \le \alpha \le 1$ geöffnet bleibt. In der übrigen Zeit ist der Schalter geschlossen. Zur Vereinfachung soll davon ausgegangen werden, dass der Lampenwiderstand R_L unabhängig von der Lampenleistung und damit von der Temperatur den konstanten Wert $R_L = 529\ \Omega$ aufweist.

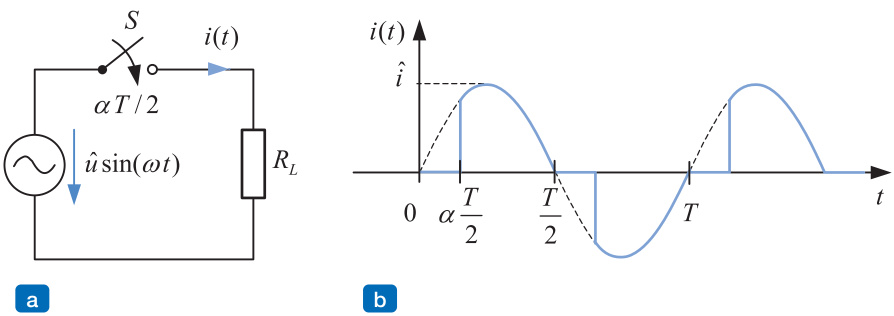


Abbildung 7.8: Phasenanschnittsteuerung, a) Prinzipschaltbild, b) mögliche Form des Netzstromes

1. Berechnen Sie die maximal mögliche mittlere Leistung an der Lampe.
2. Berechnen Sie für den in ▶Abb. 7.8b) dargestellten Lampenstrom die folgenden Größen:
   1. den Mittelwert,
   2. den Gleichrichtwert,
   3. den Effektivwert,
   4. den Spitze-Spitze-Wert und
   5. die mittlere Leistung an der Lampe, bezogen auf die maximal mögliche mittlere Leistung bei $\alpha = 0$

   in Abhängigkeit des Parameters α. Stellen Sie diese Größen als Funktion des Parameters α grafisch dar.

Wechselspannung und Wechselstrom

8

ÜBERBLICK

Einführung

» Dem jetzt folgenden Kapitel kommt eine ganz besondere Bedeutung zu. Nicht nur bei den üblicherweise mit 50/60 Hz arbeitenden Energieversorgungsnetzen, sondern auch bei sehr vielen Hochfrequenzanwendungen werden Schaltungen mit sinusförmigen Strom- und Spannungsformen betrieben. Mit der symbolischen Methode werden wir ein Verfahren kennen lernen, das die bei den Zeitbereichsanalysen auftretenden Differentialgleichungen vermeidet.

Die Anwendung dieser Methode wird es uns erlauben, wichtige Begriffe einzuführen und die damit verbundenen Netzwerke zu analysieren. Dazu gehören erste Vierpolschaltungen mit Hochpass- oder Tiefpasscharakter, Schwingkreise und Brückenschaltungen. Zur übersichtlichen Darstellung der Ströme und Spannungen als Folge der Änderung einzelner Netzwerkparameter werden wir die Ortskurven kennen lernen. Ein weiteres wichtiges Thema sind die Leistungsbetrachtungen sowohl im einphasigen Wechselspannungsnetz, als auch beim Drehstromsystem. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- lineare Netzwerke mit zeitlich sinusförmigen Strom- und Spannungsverläufen mithilfe der symbolischen Methode zu berechnen,
- den Amplituden- und Phasengang einfacher frequenzabhängiger Spannungsteiler zu berechnen und deren Eckfrequenzen zu bestimmen,
- Schwingkreise zu analysieren und die Kenngrößen zu deren Charakterisierung wie z.B. deren Resonanzfrequenz und Güte zu bestimmen,
- Ortskurven zu erstellen, um die Abhängigkeiten der Ströme, Spannungen oder Impedanzen von der Frequenz oder von den Werten einzelner Netzwerkelemente zu visualisieren,
- die Begriffe Wirkleistung, Blindleistung, Scheinleistung und komplexe Leistung zu erklären,
- Schaltungen zur Leistungsanpassung an Quellen mit frequenzabhängigen Innenwiderständen zu dimensionieren und Fehlanpassungen zu beurteilen,
- Schaltungen zur Kompensation von Blindströmen zu entwerfen und
- einfache Leistungsbetrachtungen beim Drehstromsystem durchzuführen.

Wegen der besonderen technischen Bedeutung werden wir uns in diesem Kapitel ausschließlich mit zeitlich periodischen Signalformen beschäftigen, die sich in Form einer Sinus- bzw. Kosinusfunktion mit einer konstanten Kreisfrequenz ω ändern (vgl. Abb. 7.3b). Dabei werden wir uns auf den eingeschwungenen Zustand beschränken, der sich nach dem Abklingen aller Einschaltvorgänge einstellt. In diesen Fällen können die Ströme und Spannungen in der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u) = \hat{u}\sin(\omega t+\varphi_u+\pi/2) = U\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_u+\pi/2) \\ i(t) &= \hat{i}\cos(\omega t+\varphi_i) = \hat{i}\sin(\omega t+\varphi_i+\pi/2) = I\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_i+\pi/2) \end{aligned} \tag{8.1}$$

mit den Amplituden $\hat{u}$, $\hat{i}$ und den Phasenverschiebungen φ_u, φ_i gegenüber einem willkürlich gewählten Bezugswert $u(0)$ bzw. $i(0)$ dargestellt werden. Die zeitabhängigen Ströme und Spannungen können sowohl durch Kosinusfunktionen als auch durch Sinusfunktionen ausgedrückt werden, der Unterschied besteht lediglich in einer zusätzlichen Phasenverschiebung um $\pi/2$.

8.1 Das Zeigerdiagramm

Zur Analyse der Wechselstromschaltungen steht mit der komplexen Wechselstromrechnung eine sehr effiziente mathematische Methode zur Verfügung, mit deren Hilfe umfangreiche Netzwerke unter gewissen Voraussetzungen auf relativ einfache Weise berechnet werden können. Als Einstieg in diese Methode wollen wir zunächst das **Zeigerdiagramm** kennen lernen, mit dessen Hilfe die Strom- und Spannungsverhältnisse in einem Netzwerk übersichtlich nach Betrag und Phase dargestellt werden können.

Auf der linken Seite der ▶Abb. 8.1 ist ein Zeiger der Länge (Amplitude) $\hat{i}$ dargestellt, der sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω in Richtung wachsender φ-Werte dreht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet er sich an der mit 0 gekennzeichneten Stelle. Für eine volle Umdrehung $\varphi = 2\pi$ wird die Periodendauer T benötigt. Die Projektion des Zeigers auf die vertikale Achse wird durch die Funktion $\hat{i}\sin\varphi = \hat{i}\sin\omega t$ beschrieben. Diese Projektion ist an der Position 1 durch einen Doppelpfeil markiert. Stellt man diese Projektion, wie auf der rechten Seite der Abbildung gezeigt, als Funktion des Winkels $\varphi = \omega t$ dar, dann erhält man die bereits erwähnte Funktion $\hat{i}\sin\omega t$. Beide Darstellungsarten, sowohl der Stromverlauf in dem konventionellen Diagramm als Funktion der Zeit oder als Funktion des Winkels als auch die Darstellung des Stromes durch den rotierenden Zeiger beinhalten alle Informationen bezüglich der vorgegebenen Funktion.

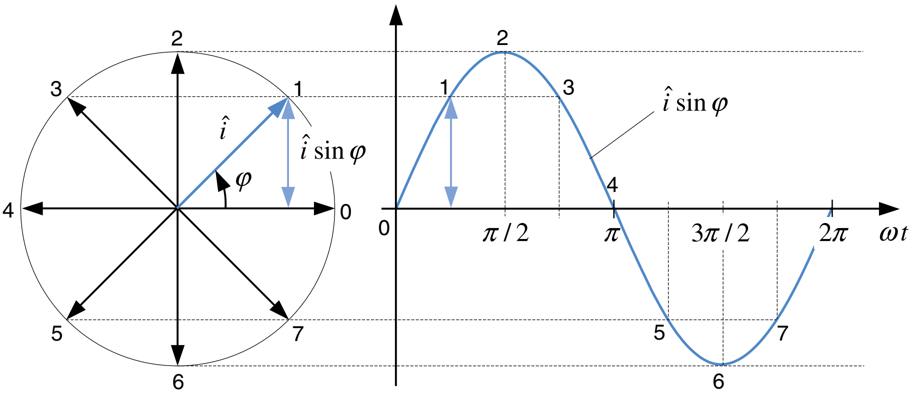


Abbildung 8.1: Zusammenhang zwischen Zeigerdiagramm und zeitabhängiger Funktion

Als nächstes Beispiel betrachten wir die ▶Abb. 8.2 mit zwei sinusförmigen Stromverläufen mit unterschiedlichen Amplituden und mit einer Phasenverschiebung zwischen den beiden Strömen. Da sich die Zeiger im linken Diagramm entgegen dem Uhrzeigersinn drehen, ist der Strom $i_2(t)$ um den Phasenwinkel φ_2 voreilend. Im rechten Diagramm erkennt man dies daran, dass der Nulldurchgang des Stromes $i_2(t)$, z.B. beim Wechsel von negativen zu positiven Werten, um den Winkel φ_2 früher erfolgt. Bezogen auf einen Stromverlauf $i(t) = \hat{i}\cos(\omega t)$ ist der Strom

$$i(t) = \begin{matrix} \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) \\ \hat{i}\cos(\omega t - \varphi_i) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{voreilend} \\ \text{nacheilend} \end{matrix} \qquad \text{um } \varphi_i\,. \tag{8.2}$$

Das Zeigerdiagramm auf der linken Seite zeigt die Position der beiden Stromzeiger zum Zeitpunkt $t = 0$.

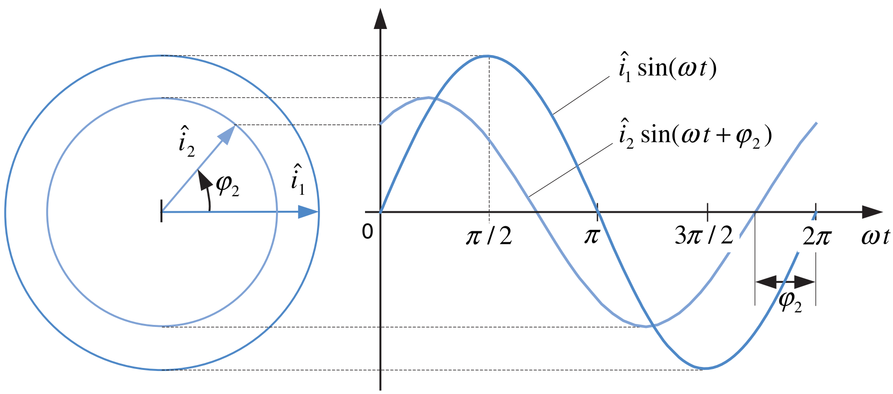


Abbildung 8.2: Zeigerdiagramme und zugehörige zeitabhängige Funktionen

Besitzen die beiden Ströme die gleiche Kreisfrequenz ω, dann bleibt der Phasenwinkel zwischen den Strömen konstant und die beiden Zeiger rotieren mit gleich bleibendem Abstand im Zeigerdiagramm. Da die Länge des Zeigers der Amplitude des Signals entspricht, sprechen wir von **Spitzenwertzeigern**. Nach Gl. (7.14) besteht bei sinusförmigen Signalen ein fester Zusammenhang zwischen Spitzenwert und Effektivwert. Man könnte daher die Betrachtungen auch mit **Effektivwertzeigern** durchführen, ihre Länge ist lediglich um den Faktor $\sqrt{2}$ geringer als bei den Spitzenwertzeigern. In den folgenden Kapiteln werden wir aber ausschließlich die Spitzenwertzeiger verwenden.

Da wir bei der Anwendung der Kirchhoff'schen Gleichungen immer wieder Spannungen oder Ströme addieren müssen, wollen wir uns im nächsten Schritt die Zusammensetzung von Signalen im Zeigerdiagramm ansehen. Ausgangspunkt sind die beiden Signalverläufe der Abb. 8.2, die im rechten Diagramm der ▶Abb. 8.3 zusammen mit ihrer punktweise berechneten Summe eingetragen sind. Das Ergebnis lässt vermuten, dass die Summe zweier phasenverschobener Sinusfunktionen unterschiedlicher Amplituden, aber gleicher Frequenz, wieder eine Sinusfunktion ist. Der Summenstrom $i_3(\omega t)$ muss sich also in der Form

$$i_3(\omega t) = \hat{i}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{i}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \hat{i}_3 \sin(\omega t + \varphi_3) \tag{8.3}$$

mit noch zu bestimmender Amplitude $\hat{i}_3$ und Phasenverschiebung φ_3 darstellen lassen. In der Abb. 8.3 liegt zwar der Sonderfall $\varphi_1 = 0$ vor, wir wollen aber den Zusammenhang (8.3) allgemein beweisen und die Formeln zur Bestimmung des Summenstromes angeben.

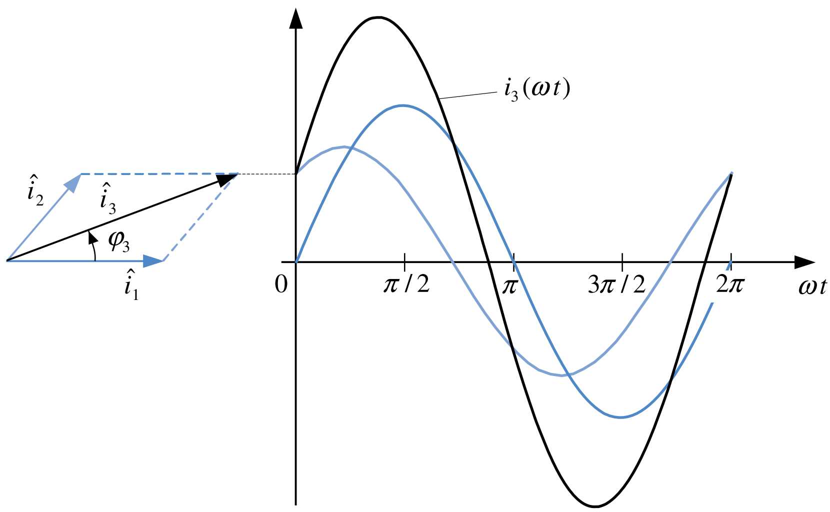


Abbildung 8.3: Addition von sinusförmigen zeitabhängigen Signalen

Zunächst werden beide Seiten der Gl. (8.3) mit dem Additionstheorem (H.4) in der folgenden Weise umgeformt

$$\begin{aligned} &\hat{i}_1 (\sin\omega t \cos\varphi_1 + \cos\omega t \sin\varphi_1) + \hat{i}_2 (\sin\omega t \cos\varphi_2 + \cos\omega t \sin\varphi_2) \\ &= \left(\hat{i}_1 \cos\varphi_1 + \hat{i}_2 \cos\varphi_2\right) \sin\omega t + \left(\hat{i}_1 \sin\varphi_1 + \hat{i}_2 \sin\varphi_2\right) \cos\omega t \\ &= \hat{i}_3 \cos\varphi_3 \sin\omega t + \hat{i}_3 \sin\varphi_3 \cos\omega t \ . \end{aligned} \tag{8.4}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ kann die Gl. (8.4) für alle Werte t nur erfüllt werden, wenn die Koeffizienten vor diesen beiden Funktionen auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen. Die Beziehung (8.4) zerfällt damit in die beiden Forderungen

$$\begin{aligned} \hat{i}_3 \sin\varphi_3 &= \hat{i}_1 \sin\varphi_1 + \hat{i}_2 \sin\varphi_2 \\ \hat{i}_3 \cos\varphi_3 &= \hat{i}_1 \cos\varphi_1 + \hat{i}_2 \cos\varphi_2 , \end{aligned} \tag{8.5}$$

die unabhängig voneinander erfüllt sein müssen und aus denen die beiden gesuchten Größen $\hat{i}_3$ und φ_3 bestimmt werden können. Zur Berechnung der Amplitude $\hat{i}_3$ werden die beiden Beziehungen zunächst quadriert und anschließend addiert

$$\begin{aligned} \hat{i}_3^{\,2}\left(\sin^2\varphi_3 + \cos^2\varphi_3\right) &= \hat{i}_1^{\,2}\left(\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1\right) + \hat{i}_2^{\,2}\left(\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2\right) \\ &\quad + 2\hat{i}_1\hat{i}_2\left(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2\right) . \end{aligned} \tag{8.6}$$

Diese Gleichung kann mithilfe der Additionstheoreme (H.1) und (H.5) vereinfacht und direkt nach $\hat{i}_3$ aufgelöst werden

$$\boxed{\hat{i}_3 = \sqrt{\hat{i}_1^{\,2} + \hat{i}_2^{\,2} + 2\hat{i}_1\hat{i}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}} \; . \tag{8.7}$$

Zur Berechnung des Phasenwinkels φ_3 wird der Quotient aus den beiden Beziehungen (8.5) gebildet

$$\boxed{\tan\varphi_3 = \frac{\hat{i}_1 \sin\varphi_1 + \hat{i}_2 \sin\varphi_2}{\hat{i}_1 \cos\varphi_1 + \hat{i}_2 \cos\varphi_2}} \; . \tag{8.8}$$

Bei der Auflösung dieser Beziehung nach dem Winkel φ_3 mithilfe der arctan-Funktion müssen die in Gl. (E.4) angegebenen Fallunterscheidungen beachtet werden. Die Addition zweier Sinuskurven gleicher Frequenz ergibt also wieder eine Sinuskurve gleicher Frequenz, deren Amplitude und Phase aus den beiden abgeleiteten Beziehungen bestimmt werden können. Für den Sonderfall $\varphi_1 = \varphi_2$ folgt aus der Gl. (8.8) $\varphi_3 = \varphi_1 = \varphi_2$ und aus der Gl. (8.7) $\hat{i}_3 = \hat{i}_1 + \hat{i}_2$, d.h. die beiden Ströme dürfen bei Phasengleichheit algebraisch addiert werden.

An dieser Stelle soll zunächst die Frage untersucht werden, welche Bedeutung diese beiden Gleichungen für die Netzwerkanalyse mithilfe des Zeigerdiagramms haben. Wir betrachten dazu das in Abb. 8.4a dargestellte schiefwinklige Dreieck mit den beiden Seiten der Längen $\hat{i}_1$ und $\hat{i}_2$, die mit der Horizontalen die Winkel φ_1 und φ_2 einschließen. Die Länge der Diagonalen $\hat{i}_3$ kann mit dem aus der Mathematik bekannten Kosinussatz berechnet werden. Der Winkel $\alpha = \pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$ lässt sich aus der Winkelsumme 2π im Parallelogramm ermitteln, so dass wir resultierend die zur Gl. (8.7) identische Beziehung

$$\begin{aligned} \hat{i}_3^{\,2} &= \hat{i}_1^{\,2} + \hat{i}_2^{\,2} - 2\hat{i}_1\hat{i}_2 \cos\alpha = \hat{i}_1^{\,2} + \hat{i}_2^{\,2} - 2\hat{i}_1\hat{i}_2 \cos\left[\pi - \left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\right] \\ &= \hat{i}_1^{\,2} + \hat{i}_2^{\,2} + 2\hat{i}_1\hat{i}_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = \hat{i}_1^{\,2} + \hat{i}_2^{\,2} + 2\hat{i}_1\hat{i}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \end{aligned} \tag{8.9}$$

erhalten, d.h. wir können die Amplitude $\hat{i}_3$ für den Summenstrom als Länge der Diagonalen aus dem Parallelogramm der ▶Abb. 8.4 ablesen. Damit bleibt noch die Frage nach der geometrischen Interpretation für den Phasenwinkel φ_3. Betrachten wir jetzt die Abb. 8.4b, dann entspricht die Summe im Zähler der Gl. (8.8) offenbar der Projektion des Summenzeigers auf die vertikale Achse und der Nenner entspricht der Projektion des Summenzeigers auf die horizontale Achse. Das Verhältnis dieser beiden Längen ist gleich dem Tangens des Winkels φ_3, der damit genau dem Winkel zwischen dem Zeiger i_3 und der Horizontalen entspricht.

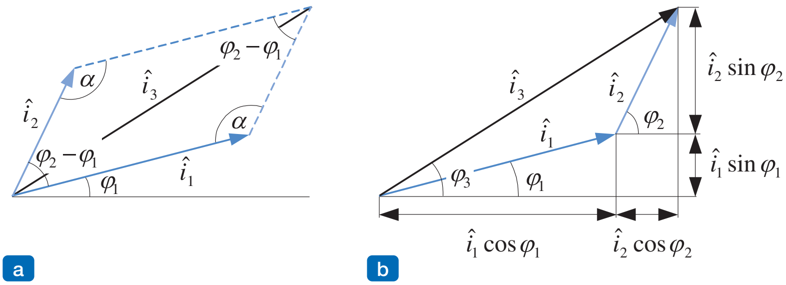


Abbildung 8.4: Addition von sinusförmigen Signalen im Zeigerdiagramm

Die Berechnung der Werte $\hat{i}_3$ und φ_3 wird mithilfe des Zeigerdiagramms sehr einfach. Es gilt nämlich die folgende Aussage:

Merke

Der Zeiger für das Summensignal $i_1 + i_2$ ergibt sich aus einer geometrischen Addition der beiden ursprünglichen Zeiger i_1 und i_2. Der Zeiger für das Differenzsignal $i_1 - i_2$ wird gebildet, indem der Zeiger $-i_2$ (gleiche Länge wie i_2, aber entgegengesetzte Richtung) zu dem Zeiger i_1 geometrisch addiert wird. Der Vorgang ist völlig analog zur Addition bzw. Subtraktion zweier Vektoren.

Dies ist der Hauptgrund für die einfache Analyse von Netzwerken mit sinusförmigen Signalen gleicher Frequenz. Die in den Kirchhoff'schen Gleichungen auftretenden Summen von Strömen und Spannungen können durch geometrische Addition der Zeiger vollständig bestimmt werden.

8.1.1 Der ohmsche Widerstand an Wechselspannung

In den folgenden Abschnitten wollen wir das Verhalten der Komponenten R, L, C untersuchen, wenn diese an eine Quelle $\hat{u}\sin(\omega t)$ mit zeitlich periodischer Spannung der Kreisfrequenz ω angeschlossen werden. Als erstes und einfachstes Beispiel betrachten wir den ohmschen Widerstand R. Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ist zu jedem Zeitpunkt durch das Ohm'sche Gesetz (7.3) gegeben

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad i(t) \overset{(7.3)}{=} \frac{u(t)}{R} = \frac{\hat{u}}{R}\sin(\omega t) = \hat{i}\sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{u} = R\,\hat{i}}\,. \tag{8.10}$$

Man erkennt, dass Strom und Spannung in Phase sind und dass das Ohm'sche Gesetz den Zusammenhang zwischen den Amplituden beschreibt.

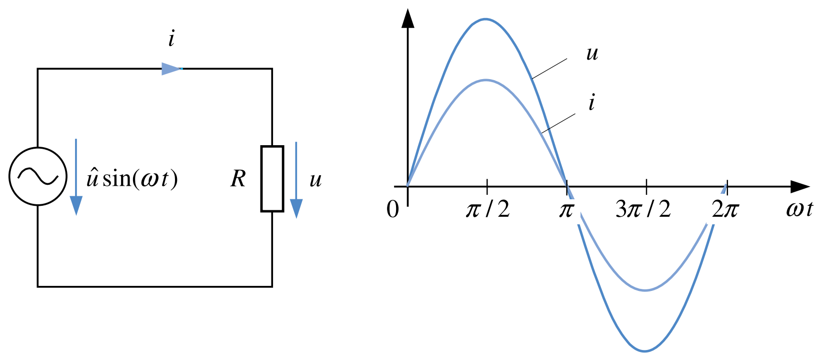


Abbildung 8.5: Ohmscher Widerstand an Wechselspannung

8.1.2 Die Induktivität an Wechselspannung

Schließen wir eine Induktivität L an die Wechselspannungsquelle $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ nach ▶Abb. 8.6 an, dann kann der Strom nach Gl. (7.4) aus dem Integral

$$i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\hat{u}}{L}\int \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{-\hat{u}}{\omega L}\cos(\omega t) + I_0 = I_0 - \frac{\hat{u}}{\omega L}\cos(\omega t) \tag{8.11}$$

berechnet werden. Die Integrationskonstante I_0 entspricht einem zeitlich konstanten Strom. Berechnen wir zur Kontrolle, ausgehend von dem Strom (8.11), die zugehörige Spannung an der Induktivität $u(t) = L\,\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t = \hat{u}\sin(\omega t)$, dann stellen wir fest, dass der zeitlich konstante Strom I_0 nicht zur Spannung beiträgt. Er kann also einen beliebigen Wert aufweisen. Da wir uns ausschließlich für den Zusammenhang der Wechselgrößen interessieren und da unser Netzwerk in Abb. 8.6 keinen Anlass für das Entstehen eines Gleichstromes gibt, dürfen wir $I_0 = 0$ setzen. Die zugehörigen zeitabhängigen Verläufe von Strom und Spannung an der Induktivität sind ebenfalls in Abb. 8.6 dargestellt.

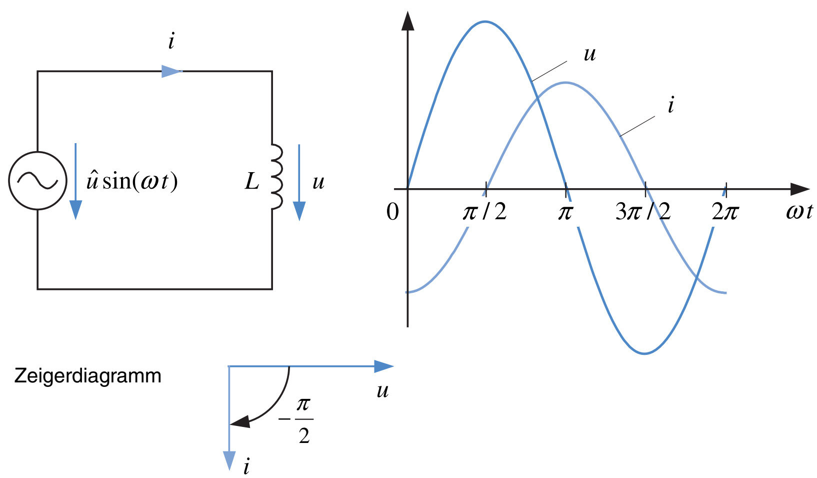


Abbildung 8.6: Induktivität an Wechselspannung

Stellen wir nun den Strom wegen der sinusförmigen Spannungsvorgabe ebenfalls durch eine Sinusfunktion dar, dann ist unmittelbar zu erkennen, dass der Strom um den Phasenwinkel $\pi/2$ gegenüber der Spannung nacheilt und dass sich die Amplituden um den Faktor ωL unterscheiden. Resultierend gilt zwischen Wechselstrom und Wechselspannung an einer Induktivität der Zusammenhang

$$i(t) = \frac{-\hat{u}}{\omega L}\cos(\omega t) = \frac{\hat{u}}{\omega L}\sin(\omega t - \pi/2) \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{u} = \omega L \hat{i}}\,. \tag{8.12}$$

Merke

An einer Induktivität sind Wechselspannung und Wechselstrom um 90° bzw. $\pi/2$ phasenverschoben, wobei der Strom nacheilt.

Legen wir den Spannungszeiger als Bezugsgröße in die Waagerechte, dann muss der zugehörige Stromzeiger entlang der vertikalen Achse nach unten zeigen.

Das Verhältnis aus Spannungsamplitude und Stromamplitude hat die Dimension eines Widerstandes

$$\boxed{\omega L = X_L = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}} \tag{8.13}$$

und wird als **induktiver Widerstand** X_L oder auch als **induktiver Blindwiderstand** bezeichnet.

Bei vorgegebener Spannungsamplitude $\hat{u}$ nimmt die Amplitude des Stromes $\hat{i}$ mit steigender Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ ab. Die Gl. (8.13) bietet also eine Möglichkeit zur Bestimmung der Induktivität durch Messung von Spannung und Strom bei einer bekannten Frequenz.

Merke

Der induktive Widerstand $X_L = \omega L$ steigt linear mit der Frequenz an. Für Gleichspannung stellt die Induktivität einen **Kurzschluss** dar, bei sehr hohen Frequenzen wird sie zum **Leerlauf**.

8.1.3 Die Kapazität an Wechselspannung

Im Gegensatz zur Induktivität stellt die Kapazität für Gleichspannung einen Leerlauf dar. Sobald die Kondensatorplatten auf die Spannung aufgeladen sind, findet keine weitere Ladungsträgerbewegung mehr statt. Beim Anschluss an eine Wechselspannungsquelle $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ nach ▶Abb. 8.7 findet dagegen eine ständige Umladung der Platten statt und in dem Stromkreis kann ein Wechselstrom gemessen werden. Dieser kann mit Gl. (7.5) berechnet werden

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\hat{u}\sin(\omega t)\right] = \omega C \hat{u}\cos(\omega t) \overset{(\mathrm{H.4})}{=} \omega C \hat{u}\sin(\omega t + \pi/2) \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{i} = \omega C \hat{u}}\,. \tag{8.14}$$

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass man den gleichen Strom erhält, wenn sich eine zusätzliche Gleichspannungsquelle mit beliebiger Spannung U_0 im Kreis befindet. Diese Spannung verschwindet nach Gl. (7.5) bei der Ableitung und liefert keinen Beitrag zum Strom. Die zeitabhängigen Verläufe von Strom und Spannung an der Kapazität sind in Abb. 8.7 dargestellt.

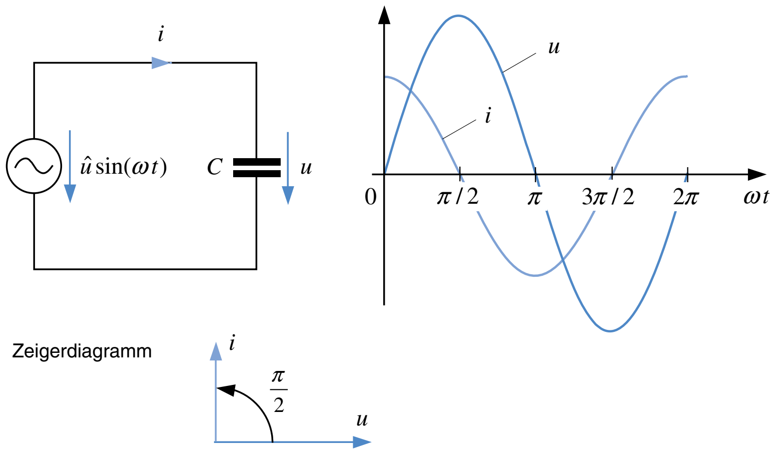


Abbildung 8.7: Kapazität an Wechselspannung

Merke

An einer Kapazität sind Wechselspannung und Wechselstrom um 90° bzw. $\pi/2$ phasenverschoben, wobei die Spannung nacheilt.

Legen wir den Spannungszeiger als Bezugsgröße in die Waagerechte, dann muss der zugehörige Stromzeiger entlang der vertikalen Achse nach oben zeigen.

Das Verhältnis aus Stromamplitude und Spannungsamplitude hat die Dimension eines Leitwertes

$$\omega C = B_C = \frac{\hat{i}}{\hat{u}} \tag{8.15}$$

und wird als **Blindleitwert** B_C bzw. als **kapazitiver Blindleitwert** bezeichnet.

Bei vorgegebener Spannungsamplitude $\hat{u}$ steigt die Amplitude des Stromes $\hat{i}$ mit steigender Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ an. Der Wert einer Kapazität kann ebenfalls durch Messung von Spannung und Strom bei einer bekannten Frequenz ermittelt werden.

Merke

Der kapazitive Blindleitwert $B_C = \omega C$ nimmt mit steigender Frequenz zu. Für Gleichspannung stellt die Kapazität einen **Leerlauf** dar, bei sehr hohen Frequenzen wird sie zum **Kurzschluss**.

Beispiel 8.1: Zeigerdiagramm

Gegeben ist das in ▶Abb. 8.8 dargestellte Netzwerk mit den Komponenten R_1, R_2 und C. Zu bestimmen sind Amplitude und Phase von allen in der Abbildung eingetragenen zeitabhängigen Größen, wenn die Quellenspannung $\hat{u}\sin(\omega t)$ sowie die Werte der Komponenten bekannt sind.

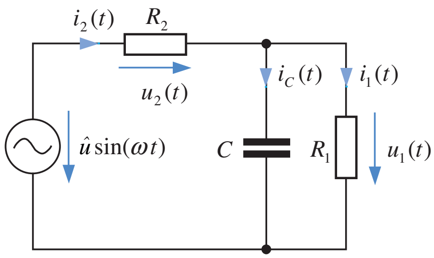


Abbildung 8.8: Mithilfe des Zeigerdiagramms zu analysierendes Netzwerk

Wir wollen dieses Problem mithilfe des Zeigerdiagramms schrittweise lösen:

1. Die Spannung $\hat{u}_1$ wird als Bezugszeiger entlang der horizontalen Achse gezeichnet. Für die zunächst unbekannte Amplitude wird eine beliebige Länge gewählt. Der Maßstabsfaktor für die Spannungen [V/cm] wird sich erst am Ende der Betrachtung ergeben.

2. Der Strom durch den Widerstand R_1 ist in Phase mit der Spannung und hat nach Gl. (8.10) den Wert $\hat{i}_1 = \hat{u}_1/R_1$. Die Länge für den Stromzeiger können wir ebenfalls beliebig wählen, da sich der Maßstabsfaktor für den Strom [A/cm] auch erst am Ende der Analyse ergeben wird.

3. Der Strom durch die Kapazität hat nach Gl. (8.14) die Amplitude $\hat{i}_C = \omega C \hat{u}_1 = \omega C R_1 \hat{i}_1$. Die Länge des Zeigers $\hat{i}_C$ ist nicht mehr frei wählbar, sondern muss der mit dem Faktor $\omega C R_1$ multiplizierten Länge des Zeigers $\hat{i}_1$ entsprechen. Diesen Zeiger müssen wir nach Abb. 8.7 um $\pi/2$ voreilend, d.h. nach oben gerichtet, zeichnen.

4. Aus der Knotengleichung $i_2(t) = i_C(t) + i_1(t)$ folgt, dass sich der Strom $\hat{i}_2$ aus der geometrischen Addition der beiden bisherigen Ströme ergibt.

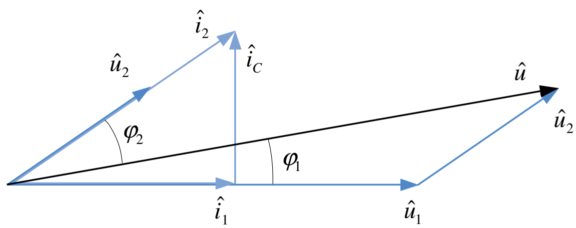


Abbildung 8.9: Zeigerdiagramm zur Schaltung in Abb. 8.8

5. Die Spannung an dem Widerstand R_2 wird in Phase zu dem Strom $\hat{i}_2$ gezeichnet. Die Länge dieses Zeigers ist durch die Beziehung $\hat{u}_2 = R_2\hat{i}_2 = [R_2\hat{i}_2/(\hat{i}_1R_1)]\cdot\hat{u}_1$ eindeutig festgelegt und entspricht der mit dem Faktor in der eckigen Klammer multiplizierten Länge des Zeigers $\hat{u}_1$. Der Wert in der Klammer ist aber bekannt, da die Widerstände gegeben sind und das Verhältnis der beiden Ströme aus dem bisherigen Diagramm durch Abmessen der Längen ermittelt werden kann.

6. Entsprechend der Maschengleichung $\hat{u}\sin(\omega t) = u_2(t) + u_1(t)$ entspricht die Summe der beiden bisherigen Spannungen im Zeigerdiagramm der Quellenspannung.

7. Das Verhältnis aus dem Wert der vorgegebenen Spannung $\hat{u}$ und der im Zeigerdiagramm gemessenen Länge dieses Zeigers ergibt den Maßstabsfaktor für alle Spannungen.

8. Aus der jetzt bekannten Amplitude von $\hat{u}_1$ ist wegen $\hat{i}_1 = \hat{u}_1/R_1$ auch die Amplitude des Stromes $\hat{i}_1$ bekannt, so dass mit der gemessenen Länge des Zeigers für den Strom $\hat{i}_1$ auch der Maßstabsfaktor für alle Ströme bekannt ist.

9. Die Phasenbeziehungen können ebenfalls dem Zeigerdiagramm entnommen werden. Die Spannung $u_1(t)$ eilt der Quellenspannung um φ_1 nach, die Spannung $u_2(t)$ eilt der Quellenspannung um φ_2 vor. Auf die gleiche Weise sind alle Phasenwinkel zwischen den Strömen und der Quellenspannung aus dem Zeigerdiagramm ablesbar.

Das Beispiel zeigt, dass das Zeigerdiagramm die Möglichkeit bietet, die Lösung auf zeichnerischem Wege zu ermitteln. Es erlaubt einen schnellen Überblick über die Beziehungen zwischen den zeitabhängigen Größen, allerdings gilt das Ergebnis nur für eine feste Frequenz. Bei einer anderen Frequenz nimmt der Blindleitwert ωC einen anderen Zahlenwert an und die Längen der Zeiger sowie die Phasenbeziehungen ändern sich.

Da sich alle Zeiger mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit in mathematisch positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn) drehen, bleibt das Zeigerdiagramm zu jedem Zeitpunkt gleich, es vollführt lediglich eine Rotationsbewegung. Zur Bestimmung aller Amplituden und Phasenbeziehungen genügt die Betrachtung zu einem beliebigen Zeitpunkt. Üblicherweise wird der Zeitpunkt so gewählt, dass ein bestimmter Zeiger (der Bezugszeiger) sich gerade in der Position parallel zur horizontalen Achse befindet. Im vorliegenden Beispiel war das die Spannung $u_1(t)$. Aus der Position der Quellenspannung $\hat{u}\sin(\omega t)$ im Zeigerdiagramm lässt sich dieser Zeitpunkt rückwirkend aus der Beziehung $\omega t = \varphi_1$ bestimmen.

Fassen wir die Ergebnisse aus diesem Abschnitt noch einmal zusammen:

- Sinusförmige Ströme und Spannungen in einem Netzwerk können mithilfe eines Zeigerdiagramms dargestellt werden.
- Die Periodizität des zeitabhängigen Vorgangs spiegelt sich in der Rotationsbewegung des Zeigerdiagramms wider (vgl. Abb. 8.1).

- Die grafische Darstellung des Zeigerdiagramms ist eine Momentaufnahme zu einem festen Zeitpunkt (vgl. ▶Abb. 8.9).
- Die Amplituden der Zeiger sowie die Phasenbeziehungen zwischen den Zeigern sind von der Zeit unabhängig und damit konstant.
- Der Momentanwert einer zeitabhängigen Größe $u(t)$ oder $i(t)$ entspricht der Projektion des zugehörigen Zeigers im betrachteten Zeitpunkt t auf die vertikale Achse.

8.2 Komplexe Wechselstromrechnung

Die Analyse linearer Netzwerke für den eingeschwungenen Zustand wird dadurch erleichtert, dass alle Spannungen und Ströme in dem Netzwerk einen ebenfalls sinusförmigen Verlauf mit der gleichen Frequenz wie die Quellenspannung besitzen. Es müssen also nur die Amplituden und die Phasenlagen bestimmt werden. Ausgehend von der Zeigerdarstellung der sinusförmigen Ströme und Spannungen können die Wechselstromschaltungen auf einfache Weise mit der so genannten **symbolischen Methode** berechnet werden, die wir in dem folgenden Kapitel ausführlich behandeln.

8.2.1 Der Übergang zur symbolischen Methode

Wir haben bereits in den Abb. 8.1 und 8.2 gesehen, dass die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Zeiger eindeutig durch ihre Amplitude und ihre Phasenverschiebung gegenüber einem willkürlich gewählten Referenzzeiger beschrieben werden können. Aus diesen beiden Werten kann bei bekannter Kreisfrequenz ω zu jedem beliebigen Zeitpunkt t der Augenblickswert der betrachteten Größe Strom oder Spannung ermittelt werden.

Wir wollen uns zunächst noch einmal den Übergang von einer zeitabhängigen Funktion zur Zeigerdarstellung und schließlich zur mathematischen Beschreibung des Zeigers ansehen. Dabei gehen wir von den Kosinusfunktionen (8.1) aus, bei der Erklärung der Vorgehensweise werden wir uns aber auf den Spannungszeiger beschränken.

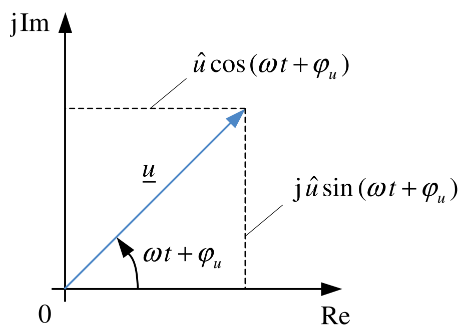


Abbildung 8.10: Spannungszeiger in komplexer Zahlenebene

Zur einfacheren mathematischen Beschreibung wird die Ebene, in der das Zeigerdiagramm betrachtet wird, als komplexe Zahlenebene aufgefasst. Die ▶Abb. 8.10 zeigt die Darstellung eines beliebigen Spannungszeigers nach Gl. (8.1) mit der Amplitude $\hat{u}$ und der Phasenverschiebung φ_u gegenüber dem Bezugszeiger in der komplexen Ebene. Der Spannungszeiger wird als eine komplexe Größe aufgefasst, die als *Symbol* für die zeitabhängige Spannung dient und eine einfache mathematische Behandlung[1] erlaubt

$$\underline{u}(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{u}(t)\right\} + \mathrm{j}\ \mathrm{Im}\left\{\underline{u}(t)\right\} = \hat{u}\cos\left(\omega t + \varphi_u\right) + \mathrm{j}\hat{u}\sin\left(\omega t + \varphi_u\right). \tag{8.16}$$

Wir werden die komplexen Größen durch einen untergesetzten Querstrich kennzeichnen. Der Realteil entspricht in der angegebenen Form der ursprünglichen zeitabhängigen Funktion nach Gl. (8.1)[2]. Die Gl. (8.16) lässt sich mit einer elementaren Rechnung auf eine Form bringen, in der der zeitabhängige Anteil separiert werden kann

$$\underline{u}(t) = \hat{u}\left[\cos\left(\omega t + \varphi_u\right) + \mathrm{j}\sin\left(\omega t + \varphi_u\right)\right] = \hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}. \tag{8.17}$$

Den in die komplexe Ebene übertragenen Spannungszeiger $\underline{u}(t)$ kann man darstellen als das Produkt aus einem zeitunabhängigen Faktor $\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$ und dem Zeitfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. Sofern sich in einem elektrischen Netzwerk alle Größen mit der gleichen Kreisfrequenz ω ändern, kann dieser Zeitfaktor bei allen Strömen und Spannungen ausgeklammert werden. Bei der Anwendung der symbolischen Methode wird die Rotation des Zeigerdiagramms also nicht mehr berücksichtigt und die Netzwerkanalyse kann allein mit den als **komplexen Amplituden** bezeichneten *zeitunabhängigen* Größen $\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$ durchgeführt werden

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= \hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{\hat{u}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ \underline{i}(t) &= \hat{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{\hat{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \underline{\hat{u}} &= \hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} \\ \underline{\hat{i}} &= \hat{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} \end{aligned}. \tag{8.18}$$

8.2.2 Die Berechnung von Netzwerken mit der symbolischen Methode

1. Schritt: Transformation in den Bildbereich

Der erste Schritt bei der Behandlung eines Netzwerks mit der symbolischen Methode besteht darin, die Ströme und Spannungen als komplexe Amplituden darzustellen. Die unterschiedlichen Möglichkeiten, die beim Übergang von einer gegebenen zeitabhängigen Quellenspannung zur komplexen Amplitude auftreten können, sind in der Tab. 8.1 aufgelistet.

1 Ein kurzer Abriss zur komplexen Rechnung befindet sich in Anhang E.
2 Wir hätten auch mit der gleichen Berechtigung die Sinusfunktion zugrunde legen können, beim Übergang von der komplexen Darstellung (8.16) zur zeitabhängigen Funktion müssten wir dann aber den Imaginärteil verwenden.

Tabelle 8.1

Zeitabhängige Spannung und zugehörige komplexe Amplitude

Zeitabhängige Spannung	Komplexe Amplitude
$\hat{u}\cos\omega t$	$\underline{\hat{u}} = \hat{u}$
$\hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u)$	$\underline{\hat{u}} = \hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$
$\hat{u}\sin\omega t = \hat{u}\cos(\omega t-\pi/2)$	$\underline{\hat{u}} = \hat{u}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$
$\hat{u}\sin(\omega t+\varphi_u)$	$\underline{\hat{u}} = \hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u-\pi/2)}$

Während die reellen zeitabhängigen Ausgangsgrößen in der linken Spalte der Tabelle physikalisch messbar sind, gilt dies für die transformierten Größen in der rechten Spalte der Tabelle nicht mehr. Sie sind lediglich nützliche Rechengrößen bei der einfachen Auflösung der entstehenden Gleichungssysteme. Da die komplexen Amplituden ein durch die Vereinbarungen (8.16) bis (8.18) zustande gekommenes Abbild der ursprünglichen Zeitfunktion darstellen, bezeichnet man den Übergang als Transformation in den Bildbereich (vgl. Abb. 8.13).

2. Schritt: Analyse des Netzwerks im Bildbereich

Der zweite Schritt besteht in der Analyse des Netzwerks, d.h. der Berechnung der Ströme und Spannungen an den einzelnen Komponenten. Dazu benötigen wir sowohl die an den Netzwerkelementen geltenden Beziehungen als auch die Knoten- und Maschengleichung und zwar in einer für die Anwendung der symbolischen Methode geeigneten Formulierung.

Bei den Gleichungen in Tab. 7.1 werden zeitabhängige Größen differenziert bzw. integriert. Die zeitliche Ableitung der zeitabhängigen Funktionen geht bei der komplexen Rechnung in eine Multiplikation mit dem Faktor jω über

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underline{\hat{u}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{j}\omega\,\underline{\hat{u}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \;\rightarrow\; \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \;\rightarrow\; \mathrm{j}\omega}\,. \tag{8.19}$$

Die abgeleitete Größe eilt gemäß Abb. E.6 der Ausgangsgröße um $\pi/2$ bzw. 90° vor. Für eine Ableitung n-ter Ordnung gilt allgemein

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \;\rightarrow\; (\mathrm{j}\omega)^n\,. \tag{8.20}$$

Die Integration über die Zeit wird ersetzt durch eine Division durch den Faktor jω

$$\int \underline{\hat{u}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\,\underline{\hat{u}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \;\rightarrow\; \boxed{\int \mathrm{d}t \;\rightarrow\; \frac{1}{\mathrm{j}\omega}}\,. \tag{8.21}$$

Die integrierte Größe eilt der Ausgangsgröße um $\pi/2$ bzw. 90° nach.

Bildet man den Quotienten der komplexen Größen Spannung und Strom, dann kürzt sich der Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ weg und man erhält den als **Impedanz** bezeichneten zeitlich unabhängigen komplexen Wechselstromwiderstand $\underline{Z}$

$$\frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} \overset{(8.18)}{=} \frac{\underline{\hat{u}}\, e^{j\omega t}}{\underline{\hat{i}}\, e^{j\omega t}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{i}}} = \underline{Z} \quad \rightarrow \quad \boxed{\underline{\hat{u}} = \underline{Z}\,\underline{\hat{i}}}\,. \tag{8.22}$$

In den beiden Darstellungen der Impedanz durch Real- und Imaginärteil bzw. durch Betrag und Phase

$$\boxed{\underline{Z} = R + jX = |\underline{Z}|\,e^{j\varphi}} \quad \text{mit} \quad \boxed{|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}} \quad \text{und} \quad \boxed{\tan\varphi = \frac{X}{R}} \tag{8.23}$$

bezeichnet man den Realteil R des komplexen Widerstandes als **Wirkwiderstand (Resistanz)**, den Imaginärteil X als **Blindwiderstand (Reaktanz)**. Der Betrag $|\underline{Z}|$ heißt **Scheinwiderstand**.

Den Kehrwert der Impedanz bezeichnet man als **Admittanz** $\underline{Y}$, ihr Realteil G heißt **Leitwert (Konduktanz)**, der Imaginärteil B heißt **Blindleitwert (Suszeptanz)** und der Betrag $|\underline{Y}|$ wird als **Scheinleitwert** bezeichnet

$$\boxed{\underline{Y} = G + jB = |\underline{Y}|\,e^{j\psi}} \quad \text{mit} \quad \boxed{|\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2}} \quad \text{und} \quad \boxed{\tan\psi = \frac{B}{G}}\,. \tag{8.24}$$

Impedanz $\underline{Z}$ und Admittanz $\underline{Y}$ haben zwar die gleiche Einheit Ω bzw. $1/\Omega$ wie ein Wirkwiderstand R bzw. dessen Kehrwert, sie haben jedoch im allgemeinen Fall keine physikalische Bedeutung. Enthalten $\underline{Z}$ und $\underline{Y}$ auch Blindanteile, dann treten die Maximalwerte von Strom und Spannung phasenversetzt, d.h. nicht mehr zeitgleich auf. Impedanz und Admittanz stellen also nicht das Verhältnis der zeitabhängigen Größen dar ($\underline{Z} \neq u(t)/i(t)$ und $\underline{Y} \neq i(t)/u(t)$) und sind daher als reine Rechengrößen anzusehen. Ihre Bedeutung erhalten sie dadurch, dass die Wechselstromnetzwerke durch Verwendung dieser Größen genauso wie die Gleichstromnetzwerke behandelt werden können.

Für die Umrechnungen zwischen Impedanz und Admittanz in der algebraischen Schreibweise gelten die Beziehungen

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j\frac{-B}{G^2 + B^2} \overset{(8.23)}{\rightarrow}$$
$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{|\underline{Y}|^2}\,, \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2} = \frac{-B}{|\underline{Y}|^2} \tag{8.25}$$

und

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j\frac{-X}{R^2 + X^2} \overset{(8.24)}{\rightarrow}$$
$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{|\underline{Z}|^2}\,, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} = \frac{-X}{|\underline{Z}|^2}\,. \tag{8.26}$$

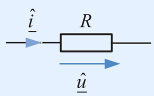
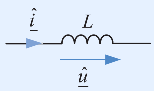
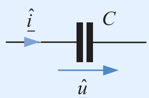
Wir werden uns diese Beziehungen in Kap. 8.2.5 etwas detaillierter ansehen. In der Exponentialdarstellung gilt der Zusammenhang

$$\left|\underline{Z}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \frac{1}{\left|\underline{Y}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}} = \frac{1}{\left|\underline{Y}\right|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi} \quad \rightarrow \quad \left|\underline{Z}\right| = \frac{1}{\left|\underline{Y}\right|} \quad \text{und} \quad \varphi = -\psi \,. \tag{8.27}$$

Das Produkt der Beträge von Impedanz und Admittanz ergibt den Wert 1 und die beiden Phasenwinkel unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Die Kehrwertbildung in Gl. (8.27) kann auch auf grafischem Wege durchgeführt werden. Wir werden dazu in Kap. 8.7.2 zwei unterschiedliche Vorgehensweisen kennen lernen. Stellen wir aber zunächst einmal die an den Netzwerkelementen R, L und C geltenden Gleichungen zusammen:

Tabelle 8.2

Strom- und Spannungsbeziehungen an den linearen, passiven Netzwerkelementen

Komponente	Spannung	Strom	Impedanz	Admittanz	Gl.
	$\underline{\hat{u}} = R\,\underline{\hat{i}}$	$\underline{\hat{i}} = \underline{\hat{u}}\,/\,R$	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Y}_R = \frac{1}{R} = G$	(8.28)
	$\underline{\hat{u}} = \mathrm{j}\omega L\,\underline{\hat{i}}$	$\underline{\hat{i}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\mathrm{j}\omega L}$	$\underline{Z}_L = \mathrm{j}\omega L \overset{(8.13)}{=} \mathrm{j}X_L$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = \mathrm{j}B_L$ mit $B_L = -\frac{1}{\omega L}$	(8.29)
	$\underline{\hat{u}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\,\underline{\hat{i}}$	$\underline{\hat{i}} = \mathrm{j}\omega C\,\underline{\hat{u}}$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \mathrm{j}X_C$ mit $X_C = -\frac{1}{\omega C}$	$\underline{Y}_C = \mathrm{j}\omega C \overset{(8.15)}{=} \mathrm{j}B_C$	(8.30)

Entsprechend den Beziehungen (8.28) bis (8.30) ist der ohmsche Widerstand ein reiner Wirkwiderstand, während die Induktivitäten und Kapazitäten reine Blindwiderstände sind. Es ist zu beachten, dass Blindwiderstand und Blindleitwert von der Frequenz abhängen.

Betrachtet man z.B. die Gl. (8.29) für die Induktivität, dann findet man die komplexe Amplitude der Spannung $\underline{\hat{u}}$, indem die komplexe Amplitude des Stromes $\underline{\hat{i}}$ zunächst mit dem Faktor ωL multipliziert wird. Dies ist die gleiche Vorschrift wie bei den Spitzenwertzeigern (vgl. Gl. (8.12)). Die zusätzliche Multiplikation mit j entspricht in der komplexen Ebene nach Abb. E.6 einer Drehung in mathematisch positiver Richtung um 90° bzw. $\pi/2$. In dem Faktor j kommt also die Tatsache zum Ausdruck, dass die Spannung an einer Induktivität dem Strom um $\pi/2$ voreilt, wie z.B. im Zeigerdiagramm in Abb. 8.6 dargestellt.

Die Division durch j bei der Kapazität ist gleichbedeutend mit einer Multiplikation mit –j, d.h. einer Drehung in mathematisch negativer Richtung um 90° bzw. $\pi/2$ und beschreibt das Nacheilen der Spannung gegenüber dem Strom entsprechend dem Zeigerdiagramm in Abb. 8.7.

Nachdem die Beziehungen für die Komponenten angegeben sind, wollen wir uns noch die Kirchhoff'schen Gleichungen ansehen. Setzt man die Spannungen entsprechend der Gl. (8.18) in die Maschenregel ein, dann kann der Zeitfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ jeweils ausgeklammert werden, so dass diese Beziehung auch für die komplexen Amplituden gilt

$$\sum_{Masche} \underline{u}(t) \overset{(8.18)}{=} \sum_{Masche} \left(\underline{\hat{u}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \right) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \sum_{Masche} \underline{\hat{u}} = 0 \;\rightarrow\; \sum_{Masche} \underline{\hat{u}} = 0\,. \tag{8.31}$$

Eine Bemerkung muss aber an dieser Stelle angefügt werden. Bei den Gleichstromnetzwerken konnten die Spannungen an den einzelnen Widerständen einer Reihenschaltung separat mit einem Voltmeter gemessen werden. Ihre Addition war dann identisch zur gesamten an der Reihenschaltung anliegenden Spannung. Bei der Messung mit Wechselgrößen an einer Reihenschaltung, die nicht ausschließlich aus ohmschen Widerständen besteht, liefert die einfache Addition der gemessenen Spannungswerte an den einzelnen Komponenten falsche Gesamtspannungen. Misst man z.B. bei einer RL-Reihenschaltung an jeder der beiden Komponenten die Teilspannung U, dann ist die gemessene Summenspannung nicht $2U$, sondern lediglich $\sqrt{2}U$. Die Phasenbeziehungen zwischen den Spannungen ($\pi/2$ im vorliegenden Beispiel) müssen also, so wie es bei der Addition der komplexen Amplituden automatisch geschieht, berücksichtigt werden.

Bei der Knotenregel kann der Zeitfaktor auf die gleiche Weise ausgeklammert werden und wir erhalten die entsprechende Beziehung

$$\sum_{Knoten} \underline{\hat{i}} = 0\,. \tag{8.32}$$

Merke

Die Kirchhoff'schen Gleichungen gelten auch für die komplexen Amplituden.

Die Rechenregeln für die Impedanzen und Admittanzen bei der symbolischen Rechnung sind also die gleichen wie für die Widerstände und Leitwerte bei den Gleichstromnetzwerken. Für die Darstellung dieser komplexen Größen wird daher auch das Schaltsymbol des ohmschen Widerstandes verwendet. Die wichtigsten Formeln sind im Zusammenhang mit den folgenden beiden Abbildungen nochmals angegeben.

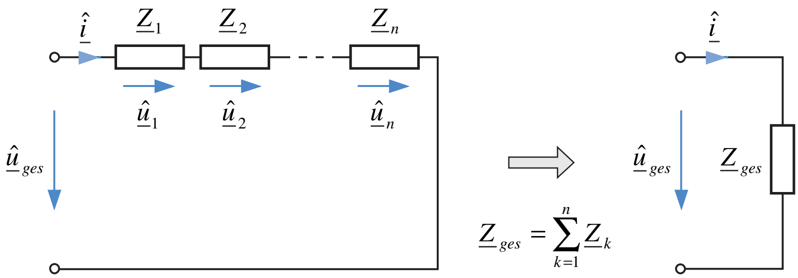


Abbildung 8.11: Reihenschaltung von komplexen Widerständen

Bei der Reihenschaltung werden die Impedanzen addiert. Wegen des gleichen Stromes stehen die Spannungen im gleichen Verhältnis wie die Impedanzen, d.h. es gilt auch wieder die Spannungsteilerregel. Mit den Bezeichnungen in ▶Abb. 8.11 gelten z.B. die Beziehungen

$$\frac{\underline{\hat{u}}_1}{\underline{\hat{u}}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_{ges}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_{ges}} \,. \tag{8.33}$$

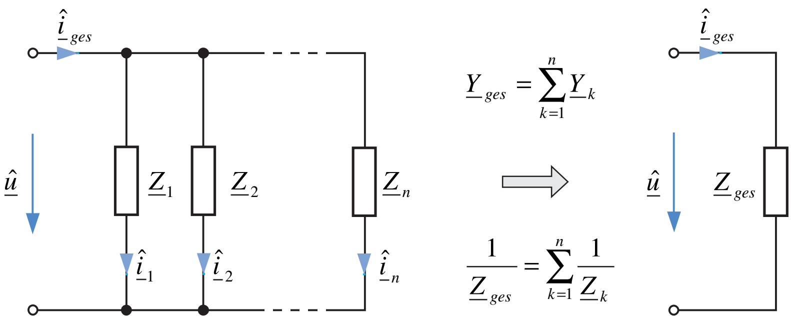


Abbildung 8.12: Parallelschaltung von komplexen Widerständen

Bei der Parallelschaltung werden die Admittanzen addiert. Wegen der an allen Komponenten gleichen Spannung stehen die Ströme im gleichen Verhältnis wie die Admittanzen, d.h. bei der Parallelschaltung gilt wieder die Stromteilerregel. Für das Netzwerk in ▶Abb. 8.12 können beispielsweise die folgenden Gleichungen angegeben werden

$$\frac{\underline{\hat{i}}_1}{\underline{\hat{i}}_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \quad \text{oder} \quad \frac{\underline{\hat{i}}_2}{\underline{\hat{i}}_{ges}} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_{ges}} = \frac{\underline{Z}_{ges}}{\underline{Z}_2} \,. \tag{8.34}$$

Die Berechnung des Netzwerks erfolgt genauso wie bei den in Kap. 3 behandelten Gleichstromnetzwerken. Mithilfe der dort besprochenen Vorgehensweisen werden die benötigten linear unabhängigen Gleichungen aufgestellt, deren Anzahl durch Anwendung der Strom- und Spannungsbeziehungen an den linearen passiven Netzwerkelementen gemäß Tab. 8.2 auf die Anzahl der Zweige in dem Netzwerk reduziert werden kann. Aus dem verbleibenden linearen Gleichungssystem werden die unbekannten komplexen Amplituden ermittelt.

3. Schritt: Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Zeitbereich

Im dritten Schritt erfolgt der Übergang von den komplexen Amplituden zu den zeitabhängigen Strömen und Spannungen und zwar in umgekehrter Reihenfolge wie bei der Einführung der komplexen Amplituden, nämlich durch

1. Multiplikation der komplexen Amplituden mit dem Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ nach Gl. (8.18) und
2. anschließende Realteilbildung dieses komplexen Ausdruckes entsprechend Gl. (8.16).

8.2.3 Gegenüberstellung der unterschiedlichen Vorgehensweisen

Die ▶Abb. 8.13 zeigt die beiden unterschiedlichen Rechenabläufe mit der konventionellen Methode (Rechnung mit den zeitabhängigen Größen) und mit der symbolischen Methode (Rechnung mit komplexen Amplituden) nochmals im Überblick. Ausgangspunkt ist das Schaltbild mit den unbekannten zeitabhängigen Strömen und Spannungen. Für ein Netzwerk mit n Zweigen werden $2n$ linear unabhängige Gleichungen für die Ströme und Spannungen aufgestellt. Mit jeweils einer bekannten Größe bei den Quellen und mit den bekannten Zusammenhängen zwischen Spannung und Strom bei den Komponenten nach Tab. 7.1 bzw. Tab. 8.2 kann das Gleichungssystem auf n Gleichungen reduziert werden.

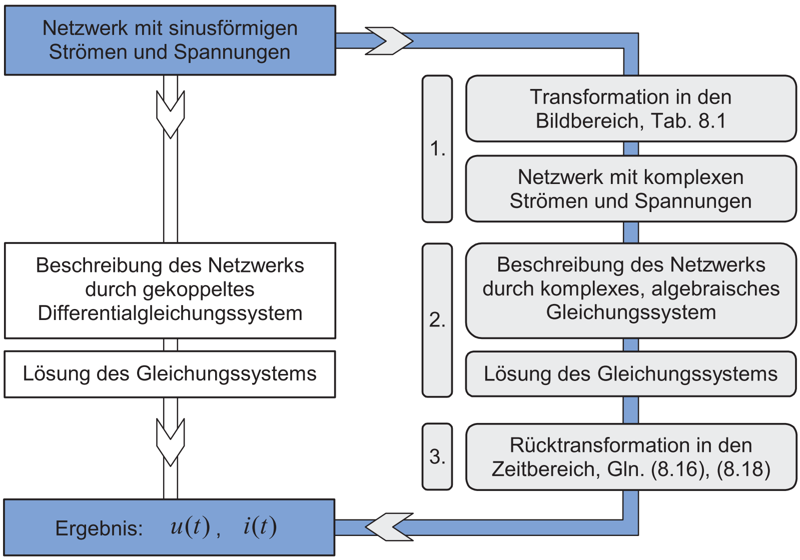


Abbildung 8.13: Gegenüberstellung der beiden unterschiedlichen Vorgehensweisen

Die Rechnung mit den zeitabhängigen Größen führt mit den Beziehungen zwischen den Strömen und Spannungen bei den Induktivitäten und Kapazitäten nach Tab. 7.1 auf ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem, dessen (eventuell mühsame) Lösung unmittelbar die gesuchten zeitabhängigen Größen liefert.

Die drei bereits im vorangegangenen Abschnitt besprochenen Schritte bei der Rechnung mit der symbolischen Methode sind auf der rechten Seite der Abb. 8.13 dargestellt. Der wesentliche Vorteil dieser Methode liegt in der relativ einfachen Auflösung des algebraischen Gleichungssystems.

Zur Verdeutlichung der unterschiedlichen Vorgehensweisen wird im folgenden Beispiel eine einfache Schaltung zunächst mit den zeitabhängigen Funktionen berechnet und anschließend durch Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung. Da wir nur eine *RL*-Reihenschaltung, d.h. eine einzige Masche betrachten, reduzieren sich die Gleichungssysteme jeweils auf eine einzige Gleichung. Der Vorteil der symbolischen Methode wird dennoch deutlich werden.

Beispiel 8.2: Vergleich zweier Lösungsverfahren

An eine Wechselspannungsquelle $u(t)=\hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u)$ mit der Spannungsamplitude $\hat{u}$ und der konstanten Kreisfrequenz ω ist die Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand R und einer Induktivität L angeschlossen. Zu berechnen sind der in der Masche fließende Strom $i(t)$ sowie die Spannungen $u_R(t)$ an dem Widerstand und $u_L(t)$ an der Induktivität.

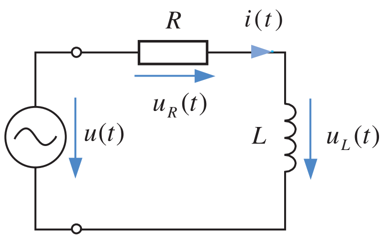


Abbildung 8.14: Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität an Wechselspannung

Lösung im Zeitbereich:

Mit der Maschengleichung und den an den Komponenten geltenden Zusammenhängen erhalten wir eine *Differentialgleichung*, in der sowohl der Strom als auch seine Ableitung nach der Zeit auftritt

$$u(t)=u_R(t)+u_L(t)\overset{(7.3,7.4)}{=}R\,i(t)+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)\,. \tag{8.35}$$

Da alle zeitabhängigen Größen periodisch mit der Kreisfrequenz ω sind, wird wegen der Reihenschaltung der in allen Komponenten gleiche Strom in der Form

$$i(t)=\hat{i}\cos(\omega t+\varphi_i) \tag{8.36}$$

mit der zunächst unbekannten Amplitude $\hat{i}$ und dem ebenfalls unbekannten Phasenwinkel φ_i angenommen. Mit diesem *Lösungsansatz* nimmt die Gl. (8.35) eine Form an, in der die Zeitableitung nicht mehr auftritt

$$\hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u) = R\,\hat{i}\cos\left(\omega t+\varphi_i\right) - \omega L\hat{i}\sin\left(\omega t+\varphi_i\right). \tag{8.37}$$

Im nächsten Schritt werden die trigonometrischen Funktionen mithilfe der Additionstheoreme (H.4) und (H.5) zerlegt, so dass auf beiden Seiten der Gleichung die linear unabhängigen Funktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ auftreten

$$\begin{aligned}\hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u) &= \hat{u}\cos(\varphi_u)\cos\left(\omega t\right) - \hat{u}\sin(\varphi_u)\sin\left(\omega t\right)\\ &= R\,\hat{i}\cos(\varphi_i)\cos\left(\omega t\right) - R\,\hat{i}\sin(\varphi_i)\sin\left(\omega t\right)\\ &\quad - \omega L\hat{i}\cos(\varphi_i)\sin\left(\omega t\right) - \omega L\hat{i}\sin(\varphi_i)\cos\left(\omega t\right).\end{aligned} \tag{8.38}$$

Diese Beziehung kann für alle Werte t nur erfüllt sein, wenn die Vorfaktoren von $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen, d.h. Gl. (8.38) zerfällt in zwei unabhängige Bedingungen

$$\hat{u}\cos(\varphi_u) = R\,\hat{i}\cos(\varphi_i) - \omega L\hat{i}\sin(\varphi_i) \tag{8.39}$$

$$\hat{u}\sin(\varphi_u) = R\,\hat{i}\sin(\varphi_i) + \omega L\hat{i}\cos(\varphi_i)\,, \tag{8.40}$$

aus denen die beiden Unbekannten $\hat{i}$ und φ_i bestimmt werden können. Zur Berechnung der Amplitude werden die beiden Gleichungen jeweils quadriert

$$\hat{u}^2\cos^2(\varphi_u) = \left(R\,\hat{i}\right)^2\cos^2(\varphi_i) - 2R\,\hat{i}\cos(\varphi_i)\,\omega L\hat{i}\sin(\varphi_i) + \left(\omega L\hat{i}\right)^2\sin^2(\varphi_i) \tag{8.41}$$

$$\hat{u}^2\sin^2(\varphi_u) = \left(R\,\hat{i}\right)^2\sin^2(\varphi_i) + 2R\,\hat{i}\sin(\varphi_i)\,\omega L\hat{i}\cos(\varphi_i) + \left(\omega L\hat{i}\right)^2\cos^2(\varphi_i) \tag{8.42}$$

und anschließend addiert. Dabei fallen die gemischten Glieder auf der rechten Seite weg und wegen des Additionstheorems (H.1) erhalten wir unmittelbar die Stromamplitude

$$\hat{u}^2 = \left(R\,\hat{i}\right)^2 + \left(\omega L\hat{i}\right)^2 \qquad \to \qquad \hat{i} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L\right)^2}}\,. \tag{8.43}$$

Zur Bestimmung des Phasenwinkels φ_i werden die Gln. (8.39) mit $\cos(\varphi_i)$ und (8.40) mit $\sin(\varphi_i)$ multipliziert

$$\hat{u}\cos(\varphi_u)\cos(\varphi_i) = R\,\hat{i}\cos^2(\varphi_i) - \omega L\hat{i}\sin(\varphi_i)\cos(\varphi_i) \tag{8.44}$$

$$\hat{u}\sin(\varphi_u)\sin(\varphi_i) = R\hat{i}\sin^2(\varphi_i) + \omega L\hat{i}\cos(\varphi_i)\sin(\varphi_i) \tag{8.45}$$

und anschließend addiert

$$\hat{u}\left[\cos(\varphi_u)\cos(\varphi_i)+\sin(\varphi_u)\sin(\varphi_i)\right] \overset{(\mathrm{H.5})}{=} \hat{u}\cos(\varphi_u-\varphi_i) = R\,\hat{i}\ . \tag{8.46}$$

Aus den Gln. (8.43) und (8.46) könnte man bereits mithilfe der Umkehrfunktion arccos den Phasenwinkel φ_i bestimmen. Wir werden aber noch einen Schritt weitergehen und die mit $-\sin(\varphi_i)$ multiplizierte Gl. (8.39) zu der mit $\cos(\varphi_i)$ multiplizierten Gl. (8.40) addieren, wobei wir das Zwischenergebnis

$$\hat{u}\left[-\cos(\varphi_u)\sin(\varphi_i)+\sin(\varphi_u)\cos(\varphi_i)\right] \overset{(\mathrm{H.4})}{=} \hat{u}\sin(\varphi_u-\varphi_i) = \omega L\,\hat{i} \tag{8.47}$$

erhalten. Die Division der so erhaltenen Gleichung durch die Gl. (8.46) liefert unmittelbar das gesuchte Ergebnis

$$\frac{\sin(\varphi_u-\varphi_i)}{\cos(\varphi_u-\varphi_i)} = \tan(\varphi_u-\varphi_i) = \frac{\omega L}{R} \quad\rightarrow\quad \varphi_u-\varphi_i = \arctan\frac{\omega L}{R}\ . \tag{8.48}$$

Damit ist der Strom (8.36) vollständig bestimmt und die Spannungen an den Komponenten können entsprechend Gl. (8.35) ebenfalls angegeben werden. Die Gesamtspannung $u(t)$ eilt dem Strom um den Differenzwinkel (8.48) vor. Diese Phasenverschiebung nimmt in den beiden Grenzfällen $R \to 0$ bzw. $\omega L \to 0$ die Werte $\pi/2$ bzw. 0 an. Ist also kein Widerstand vorhanden, dann eilt der Strom der Spannung um $\pi/2$ nach, so wie in Abb. 8.6 dargestellt. Ohne Induktivität sind Strom und Spannung in Phase. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung hängt von dem Verhältnis $\omega L/R$, d.h. also auch von der Frequenz ab.

Lösung mit der komplexen Wechselstromrechnung:

Zum Vergleich wollen wir jetzt das Netzwerk aus ▶Abb. 8.14 mit der symbolischen Methode berechnen. Der große Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass die algebraischen Bestimmungsgleichungen für die Zeigergrößen direkt aus dem Netzwerk (ohne den Umweg über die Differentialgleichungen) ermittelt werden können.

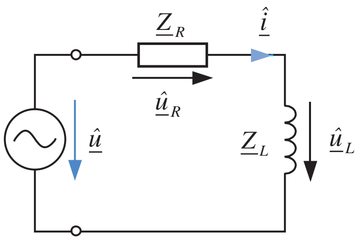


Abbildung 8.15: Netzwerk aus Abb. 8.14 mit komplexen Größen

1. Schritt:

Wir beginnen die Betrachtung mit der Transformation der Aufgabenstellung in den Bildbereich und erhalten die ▶Abb. 8.15, in der bereits alle komplexen Größen eingetragen sind. Für die komplexe Amplitude der Quellenspannung $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$ gilt mit Tab. 8.1

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\,. \tag{8.49}$$

2. Schritt:

Der Maschenumlauf (8.31) liefert

$$\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_R + \underline{\hat{u}}_L \overset{(8.22)}{=} \underline{Z}_R \underline{\hat{i}} + \underline{Z}_L \underline{\hat{i}} \overset{(8.28,8.29)}{=} (R + \mathrm{j}\omega L)\,\underline{\hat{i}} = \underline{Z}\,\underline{\hat{i}}\,. \tag{8.50}$$

Mit der Impedanz der Serienschaltung nach Gl. (8.23)

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \quad \text{mit} \quad \varphi = \arctan\frac{\omega L}{R} \tag{8.51}$$

und der allgemeinen Darstellung für die komplexe Amplitude des Stromes nach Gl. (8.18) erhalten wir die Beziehung

$$\underline{\hat{u}} = \underline{Z}\,\underline{\hat{i}} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\,\underline{\hat{i}} \qquad \rightarrow$$

$$\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\;\hat{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} = \hat{i}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi + \varphi_i)}\,. \tag{8.52}$$

Ein Vergleich der Amplituden und der Phasenwinkel in der Beziehung (8.52) liefert bereits in Übereinstimmung mit den Gleichungen (8.43) bzw. (8.48) die Ergebnisse

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi_u - \varphi_i = \varphi \overset{(8.51)}{=} \arctan\frac{\omega L}{R}\,. \tag{8.53}$$

3. Schritt:

Den zeitabhängigen Stromverlauf erhalten wir durch Rücktransformation der komplexen Amplitude entsprechend der Beschreibung in Kap. 8.2.2

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) \tag{8.54}$$

beziehungsweise in ausführlicher Schreibweise

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos\left(\omega t + \varphi_u - \arctan\frac{\omega L}{R}\right). \tag{8.55}$$

Zur Übung wollen wir noch den zeitabhängigen Spannungsverlauf an der Induktivität $u_L(t)$ berechnen. Für die komplexe Amplitude dieser Spannung gilt mit den bereits angegebenen Gleichungen

$$\hat{\underline{u}}_L \overset{(8.29)}{=} \underline{Z}_L \hat{\underline{i}} = \mathrm{j}\omega L\, \hat{\underline{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}\, \omega L\, \hat{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} = \omega L\, \hat{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_i + \pi/2)}\,. \tag{8.56}$$

Den zeitabhängigen Spannungsverlauf finden wir durch Realteilbildung aus der mit $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ multiplizierten komplexen Amplitude

$$\begin{aligned} u_L(t) &= \mathrm{Re}\left\{ \hat{\underline{u}}_L\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \hat{i}\, \omega L\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i + \pi/2)} \right\} \\ &= \hat{u} \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi_u - \arctan \frac{\omega L}{R} \right). \end{aligned} \tag{8.57}$$

8.2.4 Strom-Spannungs- und Widerstandsdiagramm

Die Darstellung der komplexen Amplituden in der Gauß'schen Zahlenebene führt auf eine dem Zeigerdiagramm entsprechende Abbildung, aus der sowohl die Amplituden der Ströme und Spannungen als auch die Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen Größen abgelesen werden können. Als Beispiel soll das Strom-Spannungsdiagramm für die Schaltung in Abb. 8.15 gezeichnet werden.

Da bei der Reihenschaltung in allen Netzwerkelementen der gleiche Strom fließt, wird dieser als Bezugsgröße parallel zur horizontalen Achse gezeichnet[3]. Die Spannung am Widerstand hat die gleiche Phase wie der Strom, während die Spannung an der Induktivität nach Abb. 8.6 dem Strom um $\pi/2$ voreilt. Diese Phasenverschiebung lässt sich auch an den Ergebnissen (8.55) und (8.57) erkennen. Mit den Amplitudenverhältnissen nach Gl. (8.10) bzw. (8.12)

$$\hat{u}_R = R\hat{i}\,, \qquad \hat{u}_L = \omega L\, \hat{i} \tag{8.58}$$

erhalten wir z.B. das in ▶Abb. 8.16a dargestellte Strom-Spannungsdiagramm.

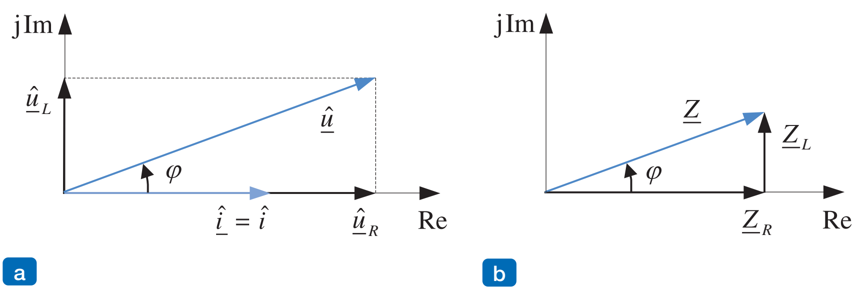


Abbildung 8.16: a) Strom-Spannungsdiagramm und b) Widerstandsdiagramm

3 Diese Vereinbarung ist gleichbedeutend mit der Festlegung $\varphi_i = 0$. Das ist aber keine Einschränkung, da wir das fertig gestellte Diagramm zum Schluss insgesamt um den Winkel $\varphi_i \neq 0$ in der komplexen Ebene drehen können.

Der Phasenwinkel $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ zwischen Strom und Quellenspannung kann unmittelbar aus dem Diagramm abgelesen werden.

Betrachten wir noch einmal die Gl. (8.22). Offenbar bestimmt die Impedanz $\underline{Z}$, welche Phasenlage zwischen Strom und Spannung an einem Zweipol auftritt

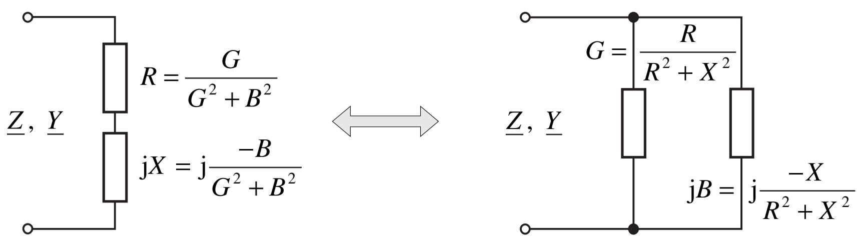
$$\hat{\underline{u}} = \underline{Z}\,\hat{\underline{i}} \overset{(8.23)}{=} \left|\underline{Z}\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\,\hat{\underline{i}} \overset{(8.18)}{=} \left|\underline{Z}\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\,\hat{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\,. \tag{8.59}$$

Wird der Zeitpunkt $t = 0$ so gewählt, dass der Strom $\hat{\underline{i}}$ als Bezugszeiger parallel zur reellen Achse liegt ($\varphi_i = 0$), dann stimmt die Phasenlage der Spannung im Spannungsdiagramm mit dem Argument φ der Impedanz überein. Werden also alle Spannungen durch den Wert des Stromes $\hat{i}$ dividiert, dann geht das Spannungsdiagramm in ein **Widerstandsdiagramm** mit den gleichen Phasenbeziehungen über (▶Abb. 8.16b), bei dem sich lediglich die Amplituden um einen konstanten Faktor unterscheiden.

Die Impedanzen können auf die gleiche Weise wie die Strom- und Spannungszeiger grafisch dargestellt werden. Während jedoch die Impedanzen nach Tab. 8.2 in der komplexen Ebene eine fest vorgegebene Lage einnehmen, besteht bei der Darstellung der zeitabhängigen Größen ein Freiheitsgrad, der sich in der willkürlichen Wahl eines Bezugszeigers ausdrückt.

8.2.5 Umrechnung zwischen Impedanz und Admittanz

Bevor wir in den folgenden Kapiteln einfache Wechselstromnetzwerke untersuchen, wollen wir noch einmal die häufig wiederkehrende Umrechnung zwischen Impedanz und Admittanz betrachten. Die nach Gl. (8.23) aus Wirkwiderstand R und Blindwiderstand X bestehende Impedanz $\underline{Z}$ kann als Reihenschaltung dargestellt werden, die aus Leitwert G und Blindleitwert B bestehende Admittanz $\underline{Y}$ als Parallelschaltung. Die in ▶Abb. 8.17 dargestellten Netzwerke sind entsprechend den Umrechnungsformeln (8.25) und (8.26) äquivalent. Sie besitzen beide die gleiche Impedanz und die gleiche Admittanz.



$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + \mathrm{j}B}$$

Abbildung 8.17: Umrechnung zwischen Reihen- und Parallelschaltung

An den Formeln ist zu erkennen, dass X und B entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Nach den Gleichungen (8.29) und (8.30) weisen aber Impedanz und Admittanz sowohl bei der Induktivität als auch bei der Kapazität zueinander entgegengesetzte

Vorzeichen auf. Das bedeutet, dass eine *RL*-Reihenschaltung in eine *RL*-Parallelschaltung übergeht und umgekehrt. Das gleiche gilt für die *RC*-Schaltungen.

Ausgehend von den Formeln in Abb. 8.17 können die Komponenten auch direkt angegeben werden. In den ▶Abb. 8.18 und 8.19 sind die beiden Fälle mit induktivem bzw. kapazitivem Blindanteil dargestellt.

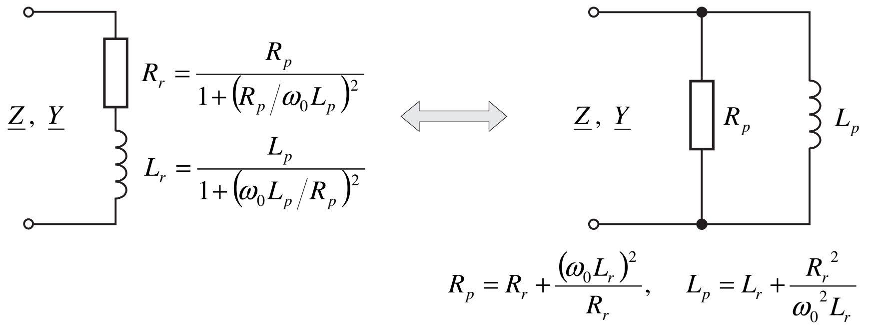


Abbildung 8.18: Umrechnung zwischen Reihen- und Parallelschaltung bei induktivem Blindanteil

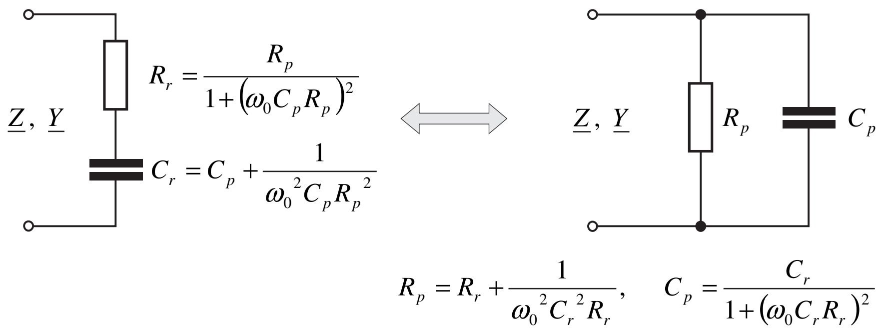


Abbildung 8.19: Umrechnung zwischen Reihen- und Parallelschaltung bei kapazitivem Blindanteil

In dem berechneten äquivalenten Netzwerk hängen sowohl Wirk- als auch Blindkomponente von der Frequenz ab. Die Umrechnung zwischen Reihenschaltung (Index *r*) und Parallelschaltung (Index *p*) gilt daher nur für eine feste, in den Abbildungen mit ω_0 bezeichnete Kreisfrequenz.

Zur Veranschaulichung dieser Aussage betrachten wir ein konkretes Zahlenbeispiel. Die Reihenschaltung aus einem Widerstand $R_r = 12\Omega$ und einer Induktivität $L_r = 1{,}2\text{mH}$ soll bei der Frequenz $f_0 = 1\text{kHz}$ in eine äquivalente Parallelschaltung umgewandelt werden. Die durchgezogenen Linien in den beiden Teilbildern der ▶Abb. 8.20 zeigen Real- und Imaginärteil von der Impedanz $\underline{Z}_r = R_r + \mathrm{j}\omega L_r$ der gegebenen Reihenschaltung. In der doppelt logarithmischen Darstellung ist jeweils eine Frequenzdekade oberhalb und unterhalb der Frequenz f_0 berücksichtigt. Für die Komponenten der äquivalenten Parallelschaltung erhalten wir mit den in Abb. 8.18 angegebenen Beziehungen und mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0$ die Werte $R_p = 16{,}74\Omega$ und $L_p = 4{,}24\text{mH}$. Die Impedanz $\underline{Z}_p$ dieser Parallelschaltung kann mit der in Abb. 8.12 angegebenen Beziehung berechnet werden.

Ihr Real- und Imaginärteil sind zum Vergleich als gestrichelte Kurven in Abb. 8.20 eingezeichnet. Beide Anteile hängen in unterschiedlicher Weise von der Frequenz ω ab und stimmen erwartungsgemäß nur bei der Frequenz f_0 mit der Reihenschaltung überein.

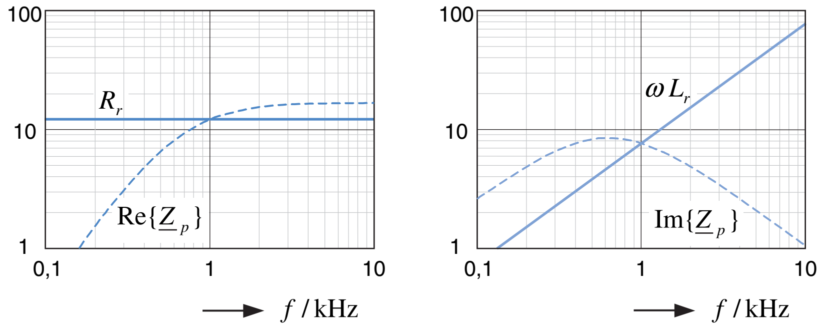


Abbildung 8.20: Frequenzabhängige Impedanz von Reihen- und äquivalenter Parallelschaltung

8.3 Frequenzabhängige Spannungsteiler

Die frequenzabhängige Impedanz von Induktivitäten und Kapazitäten kann z.B. zum Aufbau ebenfalls frequenzabhängiger Spannungsteiler verwendet werden. Wir betrachten noch einmal das Netzwerk aus Abb. 8.14, das in ▶Abb. 8.21 in einer leicht geänderten Form dargestellt ist. Während die Spannungsquelle in Abb. 8.14 mit dem aus einer *RL*-Reihenschaltung bestehenden *Zweipol* belastet wird, besitzt das gleiche Netzwerk in Abb. 8.21 jetzt insgesamt vier Anschlussklemmen, zwei für den Anschluss der Eingangsspannungsquelle und zwei weitere zum Anschluss zusätzlicher Komponenten an die Ausgangsklemmen, d.h. parallel zur Induktivität. Eine solche Kombination von Netzwerkelementen wird allgemein als **Vierpol** bezeichnet. Enthält ein Vierpol eigene Quellen, dann wird er als **aktiver Vierpol**, im anderen Fall als **passiver Vierpol** bezeichnet.

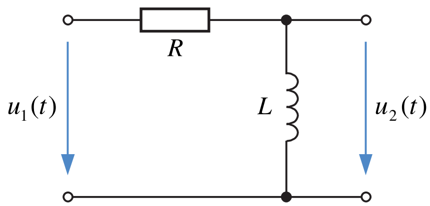


Abbildung 8.21: Frequenzabhängiger Spannungsteiler

Bei einem Vierpol ist vor allem die Frage interessant, welche Abhängigkeiten zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen bestehen. Bei der betrachteten Schaltung werden sich die beiden Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ nach Betrag und Phase unterscheiden. Das Verhältnis der komplexen Amplituden führt auf einen Ausdruck

$$\frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_1} \overset{(8.18)}{=} \frac{\hat{u}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{u_2}}}{\hat{u}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{u_1}}} = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\varphi_{u_2} - \varphi_{u_1}\right)} = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\varphi_u} , \tag{8.60}$$

in dem das Verhältnis der beiden Spannungsamplituden $\hat{u}_2 / \hat{u}_1$ und die Differenz der beiden Phasenwinkel $\Delta\varphi_u = \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1}$ auftritt. Diese beiden Informationen werden üblicherweise in zwei getrennten Diagrammen als Funktion der Frequenz dargestellt. Bei dem vorliegenden Beispiel entspricht das Verhältnis der Amplituden dem bisherigen Verhältnis $\hat{u}_L / \hat{u}$ und kann aus Gl. (8.57) übernommen werden

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \,. \tag{8.61}$$

Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi_u = \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1}$ ist ebenfalls aus Gl. (8.57) ablesbar

$$\Delta\varphi_u = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega L}{R} \,. \tag{8.62}$$

Diese beiden Ergebnisse sind für die Zahlenwerte $R = 1\Omega$ und $L = 1\mu\text{H}$ als Funktion der Frequenz $f = \omega / 2\pi$ in ▶Abb. 8.22 dargestellt.

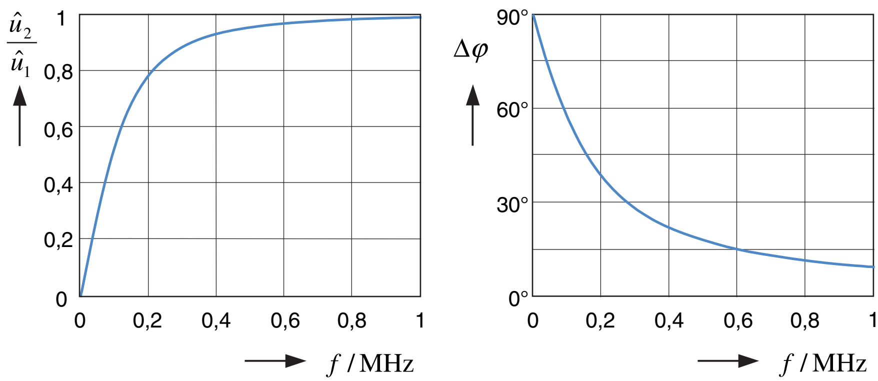


Abbildung 8.22: Amplituden- und Phasenbeziehung zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung

Wir wollen uns die beiden Grenzfälle $f \to 0$ und $f \to \infty$ etwas genauer anschauen.

Grenzfall $f \to 0$:

Bei Gleichstrom stellt die Induktivität einen Kurzschluss dar, d.h. die Ausgangsspannung verschwindet. Der Strom wird allein durch den Widerstand bestimmt und ist daher in Phase mit der Eingangsspannung. Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi_u$ zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung entspricht deshalb im Grenzübergang $f \to 0$ der Phasenverschiebung zwischen Ausgangsspannung und Strom und diese nimmt an der Induktivität den Wert 90° an.

Grenzfall $f \to \infty$:

Bei sehr hohen Frequenzen wird die Induktivität zum Leerlauf, d.h. der Wert des Widerstandes R kann gegenüber der Impedanz ωL vernachlässigt werden und die Ausgangsspannung nähert sich der Eingangsspannung. Der Spannungsabfall am Widerstand ist vernachlässigbar, so dass die Phasendifferenz $\Delta\varphi_u$ wegen gleicher Spannungen $u_1 = u_2$ verschwindet.

Der prinzipielle Kurvenverlauf in Abb. 8.22 ist auf diese Weise zwar zu verstehen, über den Frequenzbereich zwischen den beiden Bereichsgrenzen lassen sich aber keine weiteren nennenswerten Erkenntnisse gewinnen. Wir wählen daher eine alternative Darstellung für die bisherigen Ergebnisse. Um von den konkreten Zahlenwerten für die Netzwerkelemente unabhängig zu werden, wird die bisherige Frequenzachse umskaliert. Mit der Festlegung

$$x = \frac{\omega L}{R} \tag{8.63}$$

gelangen wir zu einer **normierten Darstellung** für die bisherigen Ergebnisse

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \overset{(8.61)}{=} \frac{\omega L / R}{\sqrt{1+(\omega L / R)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad \Delta\varphi_u \overset{(8.62)}{=} \frac{\pi}{2} - \arctan x\,. \tag{8.64}$$

Zusätzlich werden die beiden Achsen sowohl für die normierte Frequenz als auch für das Verhältnis der beiden Spannungsamplituden, nicht mehr linear, sondern logarithmisch eingeteilt. Der Grenzfall $f \to 0$ kann jetzt natürlich nicht mehr erfasst werden. Die resultierenden Darstellungen in ▶Abb. 8.23 werden allgemein als **Frequenzgänge** bezeichnet. Die doppelt logarithmische Darstellung in Abb. 8.23a heißt **Amplitudengang**, die einfach logarithmische Darstellung in Abb. 8.23b heißt **Phasengang**.

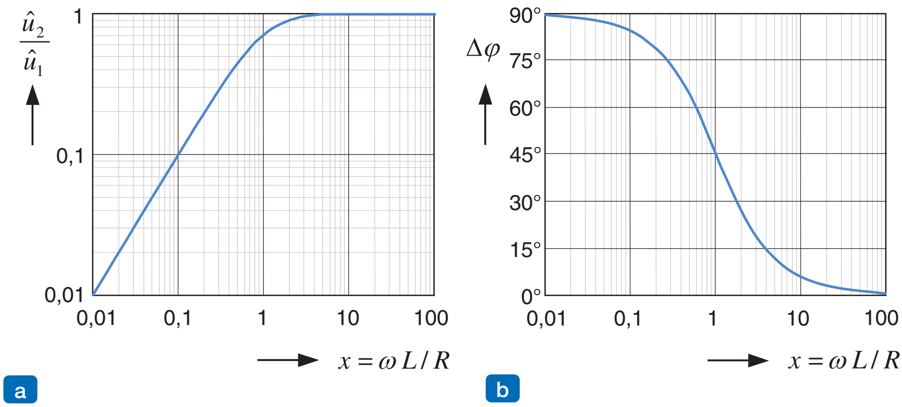


Abbildung 8.23: Amplituden- und Phasengang der Hochpass-Schaltung

In dieser normierten Darstellung lässt sich der Amplitudengang durch zwei Geraden sehr gut annähern. Für $x \ll 1$ kann der Wurzelausdruck in Gl. (8.64) näherungsweise durch 1 ersetzt werden, für $x \gg 1$ durch x. Resultierend gelten die Approximationen

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \approx \begin{cases} x & \text{für} \quad x \ll 1 \quad \text{bzw.} \quad \omega L \ll R \\ 1 & \phantom{\text{für}} \quad x \gg 1 \quad \phantom{\text{bzw.}} \quad \omega L \gg R \end{cases}. \tag{8.65}$$

Diese Gleichung beschreibt im unteren Frequenzbereich einen linearen Anstieg und im oberen Frequenzbereich eine Konstante. Der Schnittpunkt dieser beiden Näherungen liegt bei $x = 1$ bzw. bei $\omega L = R$. An dieser Stelle sind Wirk- und Blindwiderstand gleich groß und das Spannungsverhältnis nimmt nach Gl. (8.64) den Wert

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{8.66}$$

an. Der Phasenwinkel beträgt hier 45° und liegt genau in der Mitte seines möglichen Wertebereichs. Die zu $x = 1$ gehörende Frequenz trennt offenbar zwei Bereiche mit unterschiedlichem Verhalten. Sie wird als **Grenzfrequenz**

$$f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L} \tag{8.67}$$

bezeichnet. Unterhalb der Grenzfrequenz ist die Ausgangsspannung gegenüber der Eingangsspannung gedämpft, oberhalb der Grenzfrequenz wird die Eingangsspannung praktisch unbeeinflusst an den Ausgang weitergeleitet. Der hier betrachtete frequenzabhängige Spannungsteiler wird daher als **Hochpass** bezeichnet.

Werden die beiden Komponenten miteinander vertauscht, dann erhält man die Schaltung in ▶Abb. 8.24.

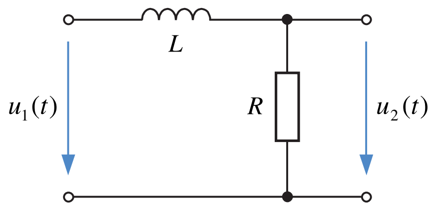


Abbildung 8.24: Frequenzabhängiger Spannungsteiler, *RL*-Tiefpass-Schaltung

Die Ausgangsspannung ist mit dem Strom nach Gl. (8.55) bereits bekannt

$$u_2(t) = R\,i(t) = \frac{R\,\hat{u}_1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_u - \arctan\frac{\omega L}{R}\right), \tag{8.68}$$

so dass für diesen Vierpol die normierte Darstellung

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \overset{(8.68)}{=} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \overset{(8.63)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad \Delta\varphi_u = -\arctan x \tag{8.69}$$

gilt. Die beiden Approximationen

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \approx \begin{cases} 1 \\ 1/x \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} x \ll 1 \\ x \gg 1 \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} \omega L \ll R \\ \omega L \gg R \end{matrix} \tag{8.70}$$

sind in der doppelt logarithmischen Darstellung wieder Geraden mit dem Schnittpunkt bei $x = 1$ bzw. bei $\omega L = R$. Bei der Grenzfrequenz f_g, die auch jetzt durch die Beziehung (8.67) gegeben ist, nimmt das Spannungsverhältnis wieder den Wert (8.66) an und die Phasenverschiebung beträgt –45°. Bei sehr hohen Frequenzen ist $\omega L >> R$ und der Strom wird im Wesentlichen durch die Induktivität bestimmt, d.h. er ist um 90° gegenüber der Eingangsspannung nacheilend. Die in diesem Bereich relativ kleine Ausgangsspannung ist in Phase zum Strom und daher ebenfalls um 90° nacheilend.

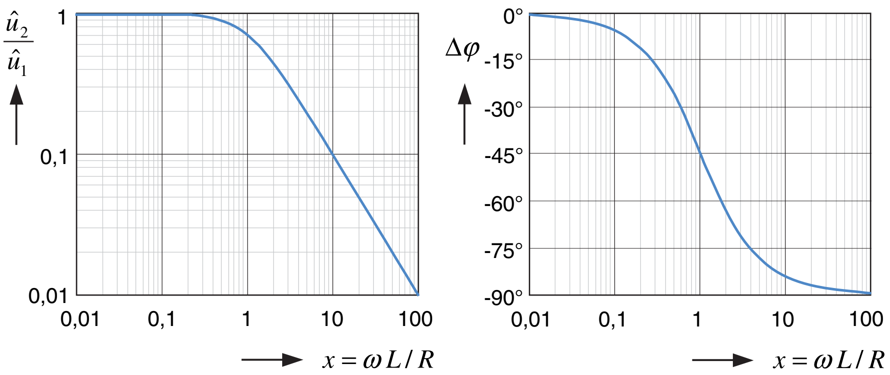


Abbildung 8.25: Amplituden- und Phasengang der Tiefpass-Schaltung

Eingangsspannungen mit Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz werden mit nahezu unveränderter Amplitude an den Ausgang weitergeleitet, Spannungen mit Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz werden gedämpft. Ein Vierpol mit dieser Eigenschaft wird als **Tiefpass** bezeichnet.

Zum Abschluss betrachten wir noch einmal die beiden bisherigen Vierpole, in denen aber jetzt die Induktivität durch eine Kapazität ersetzt werden soll. Wir beginnen mit der Schaltung in ▶Abb. 8.26.

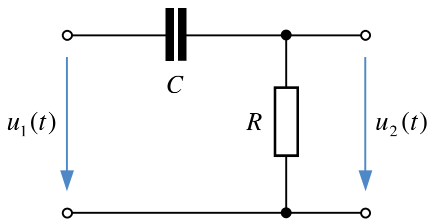


Abbildung 8.26: Frequenzabhängiger Spannungsteiler, *RC*-Hochpass-Schaltung

Im Gegensatz zu den Beispielen mit den *RL*-Schaltungen haben wir die zeitabhängige Ausgangsspannung bei den *RC*-Kombinationen noch nicht berechnet. Während wir bisher die Informationen über Amplituden- und Phasengang aus den zeitabhängigen Spannungsverläufen entnommen haben, werden wir jetzt entsprechend Gl. (8.60) lediglich das Verhältnis der komplexen Amplituden bestimmen. Die Rückkehr in den Zeitbereich ist zur Berechnung der Frequenzgänge nicht erforderlich.

Wegen des in der Masche überall gleichen Stromes stehen die Spannungen in dem gleichen Verhältnis wie die Impedanzen, an denen sie abfallen. Mit der Spannungsteilerregel gilt also

$$\frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_1} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{\omega RC\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\omega RC}}$$
$$= \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2-\arctan\omega RC)} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\frac{1}{\omega RC}}\,. \tag{8.71}$$

Mit der Festlegung

$$x = \omega RC \tag{8.72}$$

gelangen wir zu der normierten Darstellung für den Amplitudengang

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,. \tag{8.73}$$

Dieser ist identisch zur Gl. (8.64), d.h. die Schaltung in Abb. 8.26 stellt einen Hochpass dar, dessen Grenzfrequenz bei $x = 1$ bzw. bei

$$f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} \tag{8.74}$$

liegt. Der Phasengang

$$\Delta\varphi_u = \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1} = \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x \tag{8.75}$$

ist aber wegen der in Gl. (8.75) angegebenen Umrechnung der arctan-Funktionen ebenfalls identisch zum Phasengang beim *RL*-Hochpass nach Gl. (8.64). Die Amplituden- und Phasengänge der beiden Hochpass-Schaltungen in den Abb. 8.21 und 8.26 haben den gleichen in Abb. 8.23 bereits dargestellten Verlauf. Der einzige Unterschied besteht in der Bedeutung der Achsenbeschriftung x, die entweder durch die Gl. (8.63) oder durch die Gl. (8.72) festgelegt ist.

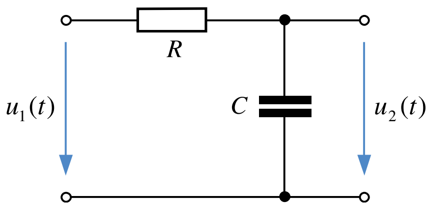


Abbildung 8.27: Frequenzabhängiger Spannungsteiler, *RC*-Tiefpass-Schaltung

Für die in ▶Abb. 8.27 dargestellte Tiefpass-Schaltung gilt für das Verhältnis der komplexen Amplituden

$$\frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_1} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arctan(\omega RC)}\,. \tag{8.76}$$

Auch in diesem Fall nehmen die Frequenzgänge mit Gl. (8.72) die gleiche Form wie bei der *RL*-Tiefpass-Schaltung nach Gl. (8.69) an

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \overset{(8.72)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad \Delta\varphi_u = -\arctan x \,. \tag{8.77}$$

Bei der Grenzfrequenz (8.74) gilt wegen $x = 1$ für das Spannungsverhältnis wieder die Beziehung (8.66).

Zum Abschluss dieses Kapitels sollen noch einige Bemerkungen im Hinblick auf eine Realisierung frequenzabhängiger Spannungsteiler angefügt werden:

- Vierpole mit gleichem Hochpass- bzw. Tiefpassverhalten können offenbar auf unterschiedliche Weise, z.B. durch *RL*- oder *RC*-Kombinationen, realisiert werden.
- Die den Berechnungen zugrunde gelegten Netzwerke stellen nur sehr einfache Modelle für reale Bauelemente dar. Die unterschiedlichen parasitären Eigenschaften von Spulen und Kondensatoren müssen aber für eine praxisgerechte Auslegung solcher Vierpolschaltungen berücksichtigt werden.
- Die Impedanzen der eingangs angeschlossenen Spannungsquelle sowie der an den Ausgang angeschlossenen weiteren Schaltung oder Messapparatur beeinflussen das Gesamtnetzwerk und müssen in der Praxis ebenfalls berücksichtigt werden.

8.4 Frequenzkompensierter Spannungsteiler

Die Spannungsteilung mithilfe eines rein ohmschen Netzwerks, wie in Kap. 3.5.1 beschrieben, ist unabhängig von der Frequenz. In vielen praktischen Fällen besteht aber einer der beiden Zweipole bereits aus einer *RC*-Parallelschaltung, so dass die Spannungsteilung frequenzabhängig wird. In diesen Fällen muss der andere Zweipol ebenfalls frequenzabhängig aufgebaut werden, damit das Teilerverhältnis bei allen Frequenzen gleich bleibt.

Als konkretes Beispiel betrachten wir die Messanordnung in ▶Abb. 8.28. Mit einem Oszilloskop soll eine Spannung $u_1(t)$ gemessen werden, deren Spitzenwert den maximal zulässigen Eingangsspannungsbereich des Messgerätes überschreitet. Zur Spannungsteilung wird daher ein Tastkopf verwendet, dessen Impedanz im Folgenden bestimmt werden soll.

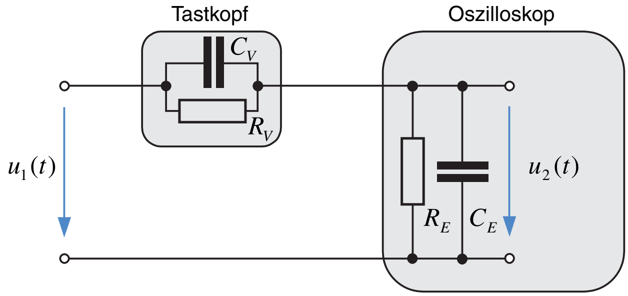


Abbildung 8.28: Realisierung einer frequenzunabhängigen Spannungsteilung

Die aus einer *RC*-Parallelschaltung mit den bekannten Werten R_E und C_E bestehende Eingangsimpedanz $\underline{Z}_E$ des Oszilloskops

$$\underline{Z}_E = \frac{R_E \cdot \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_E}}{R_E + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_E}} = \frac{R_E}{1 + \mathrm{j}\omega R_E C_E} \tag{8.78}$$

wirkt wie ein Tiefpass. Die Spannung $\hat{\underline{u}}_2$ wird oberhalb einer Grenzfrequenz entsprechend der abnehmenden Impedanz $\underline{Z}_E$ gedämpft. Die geforderte frequenzunabhängige Spannungsteilung

$$\frac{\hat{\underline{u}}_2}{\hat{\underline{u}}_1} = \frac{1}{n} \tag{8.79}$$

kann nur realisiert werden, wenn die Impedanz des Tastkopfes $\underline{Z}_V$ oberhalb der Grenzfrequenz in der gleichen Weise abnimmt. Zu einem ohmschen Vorwiderstand R_V wird daher ebenfalls eine Kapazität C_V parallel geschaltet. Das Spannungsverhältnis

$$\frac{\hat{\underline{u}}_2}{\hat{\underline{u}}_1} = \frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_E + \underline{Z}_V} = \frac{\dfrac{R_E}{1 + \mathrm{j}\omega R_E C_E}}{\dfrac{R_E}{1 + \mathrm{j}\omega R_E C_E} + \dfrac{R_V}{1 + \mathrm{j}\omega R_V C_V}} = \frac{R_E}{R_E + R_V \dfrac{1 + \mathrm{j}\omega R_E C_E}{1 + \mathrm{j}\omega R_V C_V}} \tag{8.80}$$

soll aufgrund der Forderung (8.79) reell und unabhängig von der Frequenz gleich $1/n$ sein. An dem Ausdruck (8.80) ist ohne weitere Umformungen bereits zu erkennen, dass die Frequenzunabhängigkeit durch die Forderung

$$R_E C_E = R_V C_V \quad \text{bzw.} \quad \frac{R_V}{R_E} = \frac{C_E}{C_V} \tag{8.81}$$

erfüllt wird. Die zweite Bestimmungsgleichung für die beiden Komponenten des Tastkopfes ergibt sich durch Gleichsetzen des infolge der Gl. (8.81) vereinfachten Ausdruckes (8.80) mit der verbleibenden Forderung (8.79)

$$\frac{\hat{\underline{u}}_2}{\hat{\underline{u}}_1} = \frac{R_E}{R_E + R_V} \stackrel{!}{=} \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad R_V = (n-1)\, R_E \quad \text{und} \quad C_V = C_E / (n-1) . \tag{8.82}$$

Durch diese Dimensionierung bleibt die Spannungsteilung auch oberhalb der Grenzfrequenz des *RC*-Gliedes am Eingang des Oszilloskops erhalten, allerdings geht der ohmsche Spannungsteiler in einen kapazitiven Spannungsteiler über und die Spannungsquelle $u_1(t)$ wird bei höheren Frequenzen wegen der abnehmenden Impedanz der beiden Kapazitäten zunehmend stärker belastet.

8.5 Resonanzerscheinungen

8.5.1 Der Serienschwingkreis

Wir untersuchen jetzt die als **Serienschwingkreis** (**Reihenschwingkreis**) bezeichnete Reihenschaltung aus den drei Komponenten R, L und C der ▶Abb. 8.29. Unter der Voraussetzung einer mit der konstanten Kreisfrequenz ω zeitlich periodischen Quellenspannung führen wir die Rechnung direkt mit den komplexen Amplituden durch.

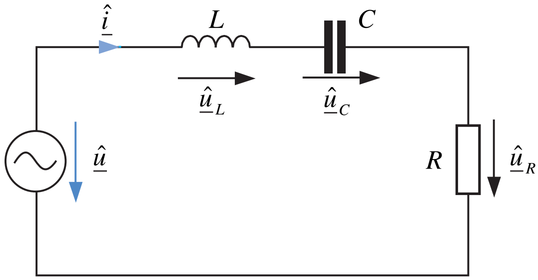


Abbildung 8.29: Serienschwingkreis

Die Maschengleichung (8.31) führt mit den in der Tab. 8.2 angegebenen Impedanzen auf die Beziehung

$$\hat{\underline{u}} \overset{(8.31)}{=} \hat{\underline{u}}_R + \hat{\underline{u}}_L + \hat{\underline{u}}_C = \left(\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C\right)\hat{\underline{i}} = \left(R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\hat{\underline{i}} = \underline{Z}\,\hat{\underline{i}}\,. \tag{8.83}$$

Die Gesamtimpedanz der Reihenschaltung

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \overset{(8.23)}{=} \left|\underline{Z}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{8.84}$$

besteht aus dem Wirkwiderstand R und dem Blindwiderstand $\omega L - 1/(\omega C)$. In der Exponentialschreibweise (8.23) gelten für Scheinwiderstand und Argument die Beziehungen

$$\left|\underline{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\,. \tag{8.85}$$

Legen wir bei der Reihenschaltung die komplexe Amplitude des Stromes als Bezugswert auf die reelle Achse, dann erhalten wir das in der ▶Abb. 8.30 dargestellte Strom-Spannungsdiagramm. Da bei der Reihenschaltung alle Komponenten von dem gleichen Strom durchflossen werden, sind die Phasenbeziehungen bei den Spannungen identisch zu den Phasenbeziehungen bei den einzelnen Impedanzen. Die Zusammensetzung der Impedanz $\underline{Z}$ aus den einzelnen Anteilen nach Gl. (8.84) ist auf der rechten Seite der Abbildung dargestellt. Die realen Längen der Zeiger hängen von den Werten der Netzwerkelemente ab.

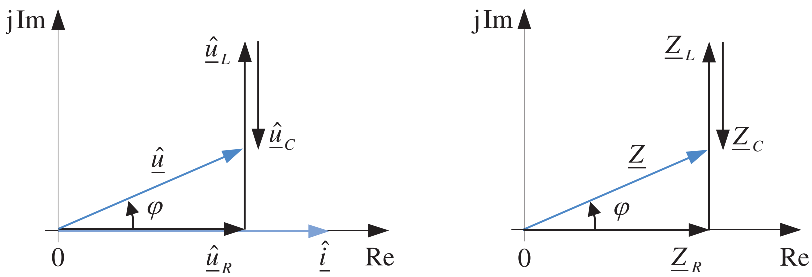


Abbildung 8.30: Serienschwingkreis: Strom-Spannungsdiagramm und Widerstandsdiagramm

Der Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung kann positiv, negativ oder im Sonderfall $\omega L = 1/(\omega C)$ auch Null werden. Die Frequenz, bei der dieser Sonderfall auftritt, wird **Resonanzfrequenz** f_0 genannt. Sie berechnet sich nach der Beziehung

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}\,. \tag{8.86}$$

Merke

In Netzwerken mit Induktivitäten und Kapazitäten treten Resonanzerscheinungen auf, wenn der Blindanteil von Impedanz bzw. Admittanz verschwindet. Quellenstrom und Quellenspannung sind bei der Resonanzfrequenz in Phase.

Im nächsten Schritt wollen wir das Verhalten der Spannungen an den drei Komponenten etwas näher untersuchen. Am Widerstand gilt für den Betrag der Spannung

$$\frac{|\underline{\hat{u}}_R|}{|\underline{\hat{u}}|} = \frac{|\underline{Z}_R|}{|\underline{Z}|} \quad \rightarrow \quad \hat{u}_R = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}\,\hat{u}\,. \tag{8.87}$$

Der Maximalwert dieser Spannung tritt bei der Resonanzfrequenz auf und hat den gleichen Wert wie die Eingangsspannung.

Für die Beträge der beiden Spannungen an Induktivität und Kapazität erhalten wir

$$\frac{|\underline{\hat{u}}_L|}{|\underline{\hat{u}}|} = \frac{|\underline{Z}_L|}{|\underline{Z}|} \quad \rightarrow \quad \hat{u}_L = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}\,\hat{u} \tag{8.88}$$

beziehungsweise

$$\frac{|\underline{\hat{u}}_C|}{|\underline{\hat{u}}|} = \frac{|\underline{Z}_C|}{|\underline{Z}|} \quad \rightarrow \quad \hat{u}_C = \frac{1}{\omega C\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}\,\hat{u}\,. \tag{8.89}$$

Von besonderem Interesse sind die Spannungen bei den Frequenzen $f \rightarrow 0$, $f = f_0$ und $f \rightarrow \infty$. Diese Werte sind in der Tab. 8.3 zusammengestellt.

Tabelle 8.3

Spannungen an den Komponenten bei ausgewählten Frequenzen

	$f \to 0$	$f = f_0$	$f \to \infty$
$\hat{u}_R$	0	$\hat{u}$	0
$\hat{u}_L$	0	$\hat{u}\dfrac{1}{R}\omega_0 L = \hat{u}\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$	$\hat{u}$
$\hat{u}_C$	$\hat{u}$	$\hat{u}\dfrac{1}{R}\dfrac{1}{\omega_0 C} = \hat{u}\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$	0

Nach den Ergebnissen in dieser Tabelle entsprechen die Amplituden der Spannungen an Induktivität und Kapazität bei der Resonanzfrequenz der mit dem Wert

$$Q_s = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{8.90}$$

multiplizierten Amplitude der Quellenspannung. Diesen Wert bezeichnet man als die **Güte** des Serienschwingkreises, sein Kehrwert

$$d_s = \frac{1}{Q_s} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{8.91}$$

heißt **Verlustfaktor** oder **Dämpfung**. Da die Güte wesentlich größer als 1 werden kann, kann die Spannungsamplitude an Induktivität und Kapazität ein Vielfaches der Quellenspannung betragen. Wegen dieser **Spannungsüberhöhung** an den Komponenten bezeichnet man diese Resonanzerscheinung als **Spannungsresonanz**.

Die Maximalwerte der beiden Spannungen treten bei den Frequenzen $\omega_L = 2\pi f_L$ bzw. $\omega_C = 2\pi f_C$ auf, die aus der Forderung

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{u}_L}{\mathrm{d}\,\omega} \overset{!}{=} 0 \quad \to \quad f_L = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}} = f_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}d_s^{\,2}}} \quad \text{mit} \quad d_s \le \sqrt{2} \tag{8.92}$$

beziehungsweise

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{u}_C}{\mathrm{d}\,\omega} \overset{!}{=} 0 \quad \to \quad f_C = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = f_0\sqrt{1-\frac{1}{2}d_s^{\,2}} \quad \text{mit} \quad d_s \le \sqrt{2} \tag{8.93}$$

berechnet werden können. Bei großen Schwingkreisgüten bzw. kleinen Verlustfaktoren fallen diese beiden Frequenzen praktisch mit der Resonanzfrequenz zusammen. Für $Q_s = 4$ nimmt der Wurzelausdruck z.B. den Wert 0,984 an. Erst bei noch kleineren Schwingkreisgüten nimmt der Abstand zwischen den beiden Frequenzen f_L und f_C

erkennbar zu. Ein Grenzfall tritt ein bei $d_s = \sqrt{2}$ bzw. $Q_s = 1/\sqrt{2}$. In diesem Fall nimmt die Wurzel in den beiden vorstehenden Gleichungen den Wert Null an und für die beiden Frequenzen ergeben sich die Grenzwerte $f_L \to \infty$ und $f_C = 0$. Für $d_s > \sqrt{2}$ bzw. $Q_s < 1/\sqrt{2}$ tritt keine Resonanzerscheinung mehr auf.

Die maximalen Spannungen an den Reaktanzen können aus den Gln. (8.88) und (8.89) berechnet werden, wobei im Bereich $Q_s > 1/\sqrt{2}$ die Gln. (8.92) und (8.93) einzusetzen sind

$$\frac{\hat{u}_{L\max}}{\hat{u}} = \frac{\hat{u}_{C\max}}{\hat{u}} = \begin{cases} \dfrac{1}{d_s\sqrt{1-(d_s/2)^2}} = \dfrac{Q_s}{\sqrt{1-1/(2Q_s)^2}} & \text{für} \quad Q_s \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \phantom{\text{für}} \quad Q_s \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} . \tag{8.94}$$

Für $Q_s > 4$ kann die Wurzel näherungsweise zu 1 gesetzt werden. Der dadurch verursachte Fehler ist kleiner als 1 %. Die Spannungsüberhöhung entspricht dann der Schwingkreisgüte. In dem gesamten Bereich $Q_s \leq 1/\sqrt{2}$ nimmt das Ergebnis (8.94) den Wert 1 an und die an Induktivität und Kapazität maximal auftretende Spannung entspricht der Eingangsspannung. Dieses Ergebnis wird in der Abb. 8.37 nochmals dargestellt. Zusammengefasst gilt die Aussage:

Merke

Eine Spannungsüberhöhung kann beim Reihenschwingkreis nur auftreten, wenn die Güte größer als $1/\sqrt{2}$ ist. In dem Bereich $Q_s \leq 1/\sqrt{2}$ kann die Spannung an den einzelnen Komponenten maximal den Wert der Eingangsspannung annehmen.

Diskussion des Schwingkreisverhaltens an einem konkreten Zahlenbeispiel

Zum leichteren Verständnis betrachten wir einen aus den gegebenen Komponenten $R = 4\Omega$, $L = 1\text{mH}$ und $C = 1\mu\text{F}$ aufgebauten Serienschwingkreis, dessen Verhalten als Funktion der Frequenz untersucht werden soll. Die Resonanzfrequenz folgt direkt aus der Gl. (8.86)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-3}10^{-6}}}\frac{1}{\text{s}} \approx 5\,\text{kHz} \tag{8.95}$$

und für die Güte erhalten wir

$$Q_s = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{10^{-3}}{10^{-6}}} \approx 7{,}9\,. \tag{8.96}$$

Betrag und Phase der Impedanz $\underline{Z}$ können durch Einsetzen der Zahlenwerte in die Gl. (8.85) berechnet werden. Das Ergebnis ist in ▶Abb. 8.31 als Funktion der Frequenz dargestellt. Unterhalb der Resonanzfrequenz überwiegt der Einfluss der Kapazität, der Phasenwinkel ist negativ, bei Frequenzen oberhalb von f_0 gilt $\omega L > 1/\omega C$ und der Phasenwinkel wird infolge der dominierenden Induktivität positiv.

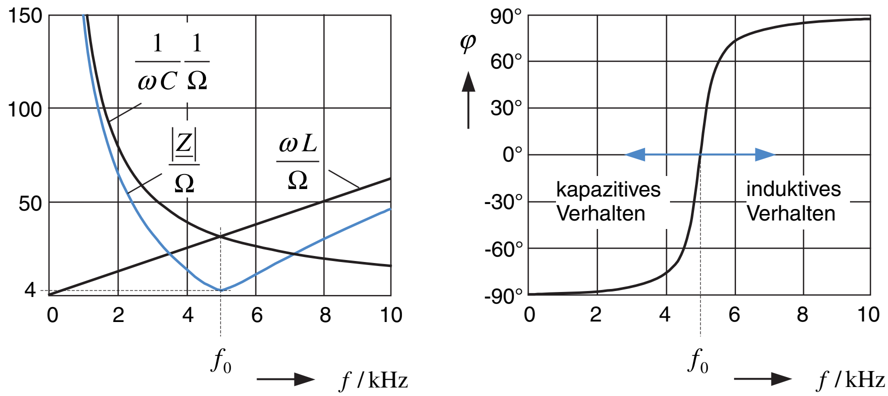


Abbildung 8.31: Impedanz des Serienschwingkreises, Betrag und Phase

Betrag und Phase der Admittanz $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ sind in ▶Abb. 8.32 dargestellt. Der Betrag der Admittanz ist nach Gl. (8.27) gleich dem Kehrwert des Betrages der Impedanz, d.h. beim Minimum der Impedanz besitzt die Admittanz ihr Maximum. Die Phasenwinkel von Impedanz und Admittanz unterscheiden sich lediglich durch das umgekehrte Vorzeichen.

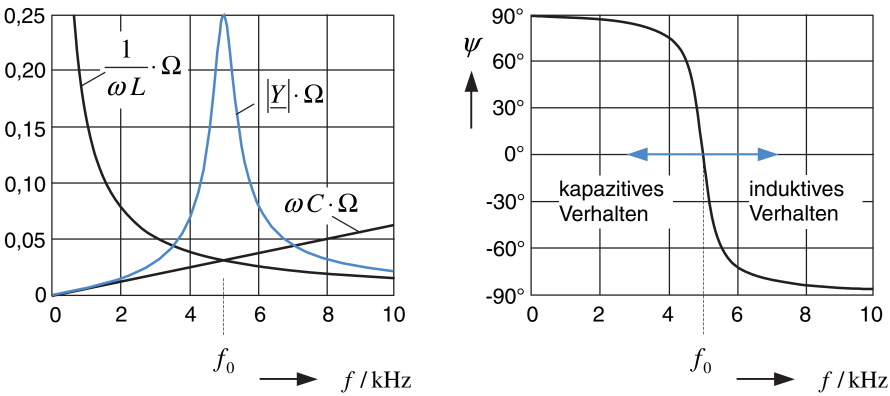


Abbildung 8.32: Admittanz des Serienschwingkreises, Betrag und Phase

Besitzt die Quellenspannung in Abb. 8.29 eine Amplitude $\hat{u} = 1\,\text{V}$, dann ist die Amplitude des Stromes nach Gl. (8.83) durch das Verhältnis $\hat{i} = 1\,\text{V}/|\underline{Z}| = 1\,\text{V}\cdot|\underline{Y}|$ gegeben. Die Abhängigkeit der Stromamplitude von der Frequenz ist in ▶Abb. 8.33 dargestellt. Bei vorgegebener konstanter, d.h. frequenzunabhängiger Amplitude der Quellenspannung $\hat{u}$ sind die Verläufe von Admittanz $|\underline{Y}|$ und Strom $\hat{i} = |\hat{\underline{i}}|$ als Funktion der Frequenz identisch.

Das Resonanzverhalten ist sehr deutlich an den frequenzabhängigen Verläufen von Strom und Spannung zu erkennen. Der Strom verschwindet bei $f = 0$ infolge der Kapazität und für $f \to \infty$ infolge der Induktivität. Bei der Resonanzfrequenz verschwindet der Blindwiderstand, d.h. es gilt $\underline{Z} = R$ und der Strom ist in Phase mit der Quellenspannung. Seine Amplitude beträgt $\hat{i} = \hat{u}/R$.

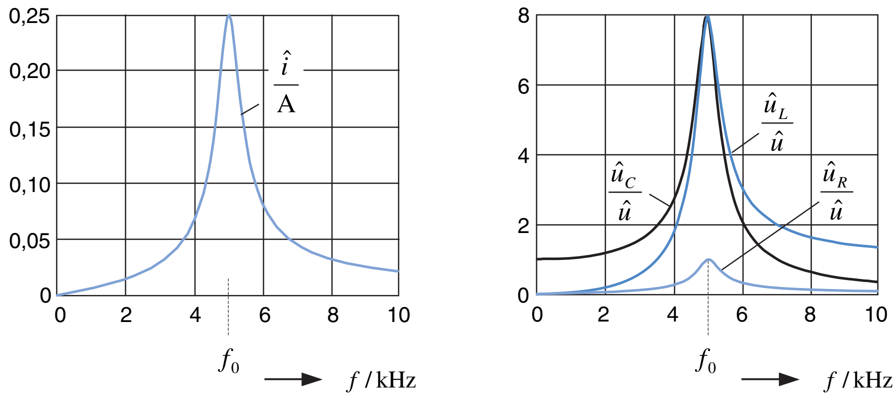


Abbildung 8.33: Strom- und Spannungsamplituden als Funktion der Frequenz, $Q_s = 7{,}9$

Die Spannung an der Induktivität auf der rechten Seite der Abb. 8.33 verschwindet bei $f = 0$ (Kurzschluss) und nimmt bei $f \to \infty$ den Wert der Quellenspannung 1V an (Leerlauf). Im Gegensatz dazu entspricht die Spannung an der Kapazität der Quellenspannung 1V bei $f = 0$ (Leerlauf). Für $f \to \infty$ zeigt die Kapazität Kurzschlussverhalten und die Spannung an C verschwindet (vgl. die Werte in Tab. 8.3).

Bei der Resonanzfrequenz sind die Spannungen an Induktivität und Kapazität betragsmäßig gleich groß, aber entgegen gerichtet $\underline{\hat{u}}_L = -\underline{\hat{u}}_C$, d.h. das LC-Netzwerk wird bei der Resonanzfrequenz zum Kurzschluss und der Strom wird nur durch den ohmschen Widerstand R begrenzt. Ein kleiner Widerstand R hat einen großen Strom $\underline{\hat{i}}$ zur Folge und damit auch sehr hohe Spannungen an Induktivität und Kapazität. In dem betrachteten Zahlenbeispiel besitzen diese beiden Spannungen etwa den **7,9-fachen** Wert der Quellenspannung. Diese Spannungsüberhöhung ist durch die Schwingkreisgüte festgelegt und muss bei der Dimensionierung von Schaltungen berücksichtigt werden (Überschlag).

Infolge der frequenzabhängigen Impedanz (hoher Leitwert bei der Resonanzfrequenz) bietet dieser Schwingkreis die Möglichkeit, aus einem Gemisch vieler verschiedener Frequenzen einen bestimmten Frequenzbereich herauszufiltern. Er wird daher auch als **Saugkreis** bezeichnet.

Merke

Unterhalb der Resonanzfrequenz wird das Verhalten des Serienschwingkreises durch die Kapazität bestimmt, oberhalb der Resonanzfrequenz durch die Induktivität. Bei der Resonanzfrequenz wird die Impedanz minimal, sie besteht dann nur aus dem Widerstand. Der Strom nimmt bei f_0 seinen Maximalwert an (Saugkreis).

An Induktivität und Kapazität können erhebliche Spannungsüberhöhungen auftreten, die sich aus der Multiplikation von Amplitude der Quellenspannung und Schwingkreisgüte berechnen lassen.

Um den Einfluss der Güte Q_s auf das frequenzabhängige Verhalten des Serienschwingkreises nochmals zu verdeutlichen, betrachten wir die ▶Abb. 8.34, in der genauso wie in der Abb. 8.32 die Admittanz nach Betrag und Phase dargestellt ist. Der Wert des Widerstandes R und das Produkt LC, d.h. die Resonanzfrequenz f_0 nach Gl. (8.95), sind gegenüber dem bisherigen Zahlenbeispiel unverändert. Allerdings wurde das Verhältnis L/C so gewählt, dass sich die in der Abbildung angegebenen Güten Q_s einstellen.

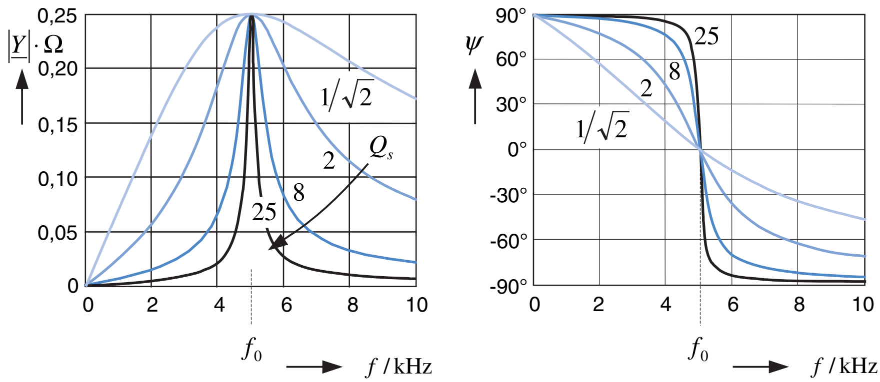


Abbildung 8.34: Admittanz des Serienschwingkreises bei unterschiedlichen Güten, aber gleichem Widerstand

Das Resonanzverhalten ist umso stärker ausgeprägt, je größer die Schwingkreisgüte ist. Die Frequenzen in unmittelbarer Nähe der Resonanzfrequenz werden praktisch mit unveränderter Amplitude an den Widerstand weitergeleitet, während die von f_0 weiter entfernt liegenden Frequenzen umso mehr unterdrückt werden, je größer ihr Abstand zu f_0 und je größer die Schwingkreisgüte ist.

In der ▶Abb. 8.35 sind nochmals die gleichen Kurven wie in Abb. 8.33 dargestellt, jetzt aber für eine Güte $Q_s = 2$. Die Spannungen an Induktivität und Kapazität haben bei der Resonanzfrequenz jetzt nur noch den doppelten Wert der Quellenspannung und die Verschiebung der Maximalwerte gegenüber f_0 entsprechend den Gleichungen (8.92) und (8.93) ist jetzt auch im Diagramm erkennbar.

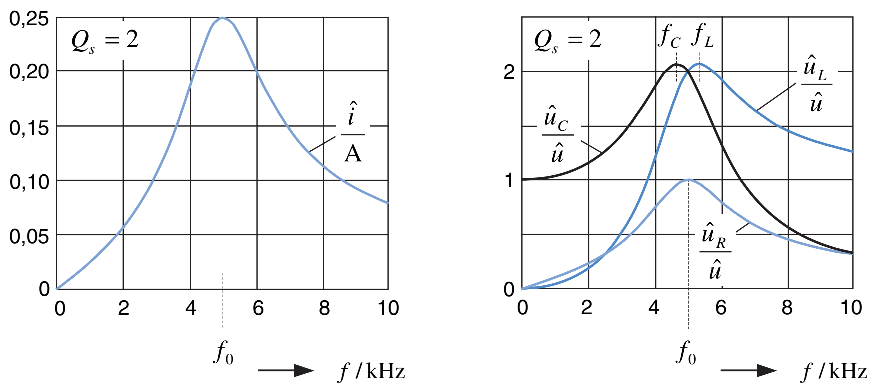


Abbildung 8.35: Strom- und Spannungsamplituden als Funktion der Frequenz, $Q_s = 2$

Die ▶Abb. 8.36 zeigt die gleichen Kurven für den Grenzfall $Q_s = 1/\sqrt{2}$. Die Spannungsüberhöhung tritt jetzt nicht mehr auf.

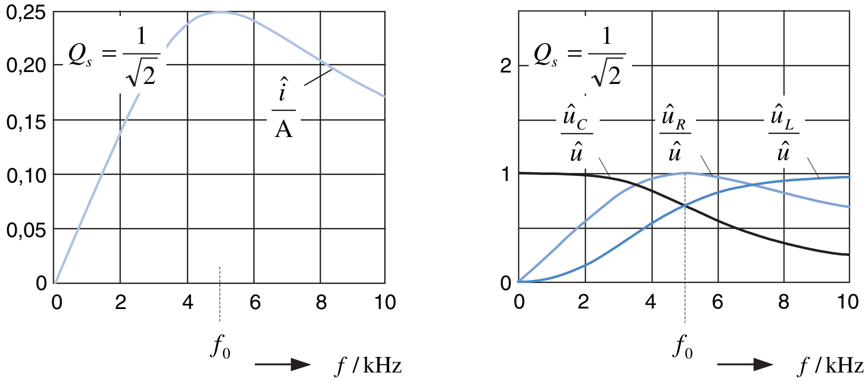


Abbildung 8.36: Strom- und Spannungsamplituden als Funktion der Frequenz, $Q_s = 1/\sqrt{2}$

Verallgemeinerte Darstellung des Schwingkreisverhaltens

Ähnlich wie bei den Vierpolschaltungen in Kap. 8.3 wollen wir jetzt eine von den Werten der Komponenten unabhängige **normierte Darstellung** für die Kennlinien des Schwingkreises angeben.

In der ▶Abb. 8.37 soll zunächst noch einmal die bereits in Gl. (8.94) berechnete, maximale Spannungsüberhöhung an Induktivität und Kapazität als Funktion der Güte dargestellt werden. Dieser Kurvenverlauf kann durch zwei Geraden approximiert werden, deren Schnittpunkt bei $Q_s = 1$ liegt. Bei großen Güten weicht die Spannungsüberhöhung nur noch geringfügig von dem Wert der Güte ab.

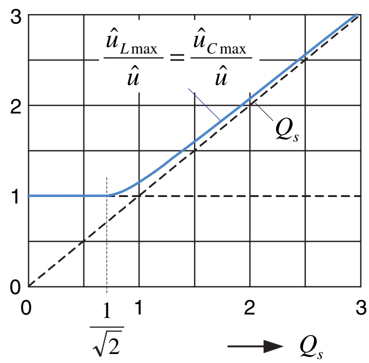


Abbildung 8.37: Spannungsüberhöhung in Abhängigkeit von der Güte

Zur Ableitung einer weiteren normierten Kennlinie werden die Impedanz $\underline{Z}$ nach Gl. (8.84) auf den Widerstand R und zusätzlich die Kreisfrequenz ω durch Erweiterung der Gleichung mit dem Faktor $1 = \omega_0\sqrt{LC}$ auf die Resonanzkreisfrequenz ω_0 bezogen

$$\frac{\underline{Z}}{R} = 1 + \mathrm{j}\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \overset{(8.86)}{=} 1 + \mathrm{j}\frac{1}{R}\left(\frac{\omega L}{\omega_0\sqrt{LC}} - \frac{\omega_0\sqrt{LC}}{\omega C}\right) \overset{(8.90)}{=} 1 + \mathrm{j}Q_s\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right). \quad (8.97)$$

Der Ausdruck

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = v \tag{8.98}$$

wird als **Verstimmung** bezeichnet, das Produkt

$$Q_s v = \Omega \tag{8.99}$$

als **normierte Verstimmung**. Bei der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$ nimmt die Verstimmung den Wert $\Omega(\omega_0) = v(\omega_0) = 0$ an. Unterhalb der Resonanzfrequenz wird sie negativ, bei $\omega = 0$ gilt $\Omega(0) = v(0) = -\infty$ und oberhalb der Resonanzfrequenz wird sie positiv, bei $\omega = \infty$ gilt $\Omega(\infty) = v(\infty) = +\infty$. Die normierte Impedanz lässt sich damit auf sehr einfache Weise darstellen

$$\frac{\underline{Z}}{R} = 1 + \mathrm{j}Q_s\, v = 1 + \mathrm{j}\Omega\,, \tag{8.100}$$

beziehungsweise in der Exponentialschreibweise

$$\underline{Z} = \left|\underline{Z}\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \quad \text{mit} \quad \left|\underline{Z}\right| = R\sqrt{1+\Omega^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \Omega\,. \tag{8.101}$$

Die ▶Abb. 8.38 zeigt die normierte Impedanz nach Gl. (8.101), aufgeteilt nach Betrag und Phase. Der Betrag nimmt bei der Resonanzfrequenz, d.h. bei $\Omega = 0$ den Wert 1 an. Die Funktion ist symmetrisch zu $\Omega = 0$ und nähert sich für betragsmäßig steigende Werte Ω jeweils der Winkelhalbierenden $\left|\underline{Z}\right|/R = \left|\Omega\right|$. Die Phase ist auf einfache Weise durch die arctan-Funktion gegeben und durchläuft den Wertebereich $-90° \le \varphi \le +90°$.

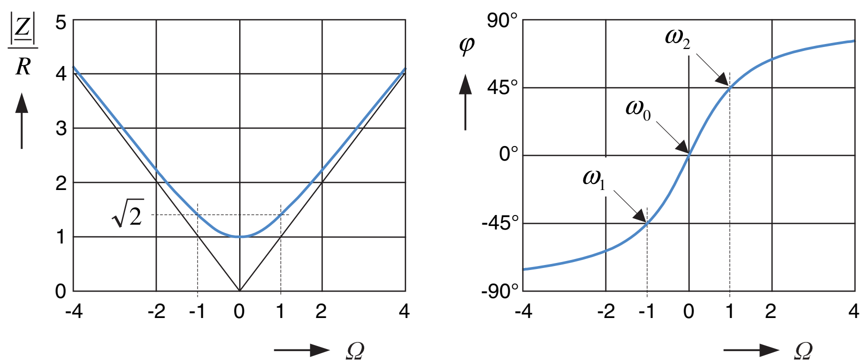


Abbildung 8.38: Normierte Impedanz als Funktion der normierten Verstimmung

Bei den frequenzabhängigen Spannungsteilern in Kap. 8.3 haben wir die Frequenz, bei der Real- und Imaginärteil betragsmäßig gleich groß waren, als Grenzfrequenz bezeichnet. Nach Gl. (8.100) tritt dieser Fall beim Reihenschwingkreis an den beiden Stellen $\Omega = \pm 1$ ein. Die zugehörigen Kreisfrequenzen lassen sich aus den beiden Forderungen

$$\Omega \overset{(8.99)}{=} Q_s v \overset{(8.97)}{=} \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \pm 1 \quad \rightarrow \quad \omega^2 \mp \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.102}$$

bestimmen und nehmen die Werte

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad \to \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q_s} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_s^{\ 2}}} \tag{8.103}$$

und

$$\omega_2 = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad \to \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = +\frac{1}{2Q_s} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_s^{\ 2}}} \tag{8.104}$$

an. Bei diesen beiden Frequenzen gilt für Betrag und Phase der Impedanz

$$\left|\underline{Z}(\omega_1)\right| = \left|\underline{Z}(\omega_2)\right| = R\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \varphi(\omega_1) = -45° \quad \text{bzw.} \quad \varphi(\omega_2) = +45°. \tag{8.105}$$

Das aus den beiden Frequenzen gebildete geometrische Mittel entspricht der Resonanzfrequenz

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^{\ 2}\,. \tag{8.106}$$

Der Abstand zwischen den beiden Frequenzgrenzen f_2 und f_1 wird als **Bandbreite** B bezeichnet[4]

$$B = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\omega_2 - \omega_1\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{R}{L} \overset{(8.86,8.90)}{=} \frac{f_0}{Q_s}\,. \tag{8.107}$$

8.5.2 Der Parallelschwingkreis

Als zweites Beispiel betrachten wir jetzt den **Parallelschwingkreis** in ▶Abb. 8.39. Ausgehend von der Knotengleichung (8.32) und den Admittanzen in Tab. 8.2 erhalten wir die Beziehung

$$\underline{\hat{i}} \overset{(8.32)}{=} \underline{\hat{i}}_R + \underline{\hat{i}}_L + \underline{\hat{i}}_C = \left(\underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C\right)\underline{\hat{u}} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C\right)\underline{\hat{u}} = \underline{Y}\,\underline{\hat{u}}\,. \tag{8.108}$$

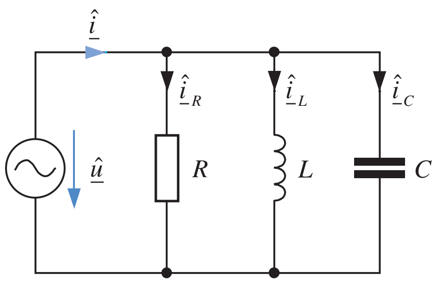


Abbildung 8.39: Parallelschwingkreis

Die Admittanz des Gesamtnetzwerkes

$$\underline{Y} = G + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \overset{(8.24)}{=} \left|\underline{Y}\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \tag{8.109}$$

4 Gelegentlich wird auch die Differenz der Kreisfrequenzen $\omega_2 - \omega_1$ als Bandbreite bezeichnet.

besteht aus dem Wirkleitwert $G=1/R$ und dem Blindleitwert $\omega C-1/(\omega L)$. In der Exponentialschreibweise gelten für Scheinleitwert und Argument die Beziehungen

$$|\underline{Y}| = \sqrt{G^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad \text{und} \quad \tan\psi = \frac{\omega C-\frac{1}{\omega L}}{G} = \omega CR-\frac{R}{\omega L}. \tag{8.110}$$

Legen wir bei der Parallelschaltung die komplexe Amplitude der Spannung als Bezugswert auf die reelle Achse, dann erhalten wir das in ▶Abb. 8.40 dargestellte Strom-Spannungsdiagramm. Da bei der Parallelschaltung die Spannung für alle Komponenten gleich ist, sind die Phasenbeziehungen bei den Strömen identisch zu den Phasenbeziehungen bei den einzelnen Admittanzen. Die Zusammensetzung der Admittanz $\underline{Y}$ aus den einzelnen Anteilen ist auf der rechten Seite der Abbildung dargestellt.

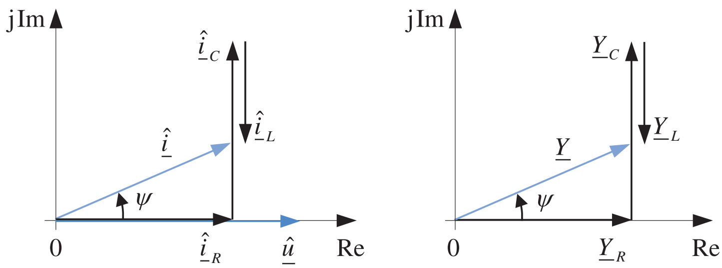


Abbildung 8.40: Parallelschwingkreis: Strom-Spannungsdiagramm und Leitwertdiagramm

Eine Resonanzfrequenz tritt auf, wenn der Blindleitwert verschwindet, d.h. es gilt wieder $\underline{Y}=G$ bzw. $\underline{Z}=R$. Die aus der Gl. (8.109) resultierende Forderung

$$\omega_0 C-\frac{1}{\omega_0 L}=0 \quad \to \quad \boxed{\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \tag{8.111}$$

liefert dieselbe Bestimmungsgleichung für die Resonanzfrequenz wie beim Serienschwingkreis.

Die Beträge der Ströme durch die einzelnen Komponenten sind, bezogen auf die Amplitude des Eingangsstromes $\hat{i}$, durch die folgenden Beziehungen gegeben:

$$\frac{|\hat{\underline{i}}_R|}{|\hat{\underline{i}}|}=\frac{|\underline{Y}_R|}{|\underline{Y}|} \quad \to \quad \hat{i}_R=\frac{G}{\sqrt{G^2+(\omega C-1/\omega L)^2}}\,\hat{i}\,, \tag{8.112}$$

$$\frac{|\hat{\underline{i}}_L|}{|\hat{\underline{i}}|}=\frac{|\underline{Y}_L|}{|\underline{Y}|} \quad \to \quad \hat{i}_L=\frac{1}{\omega L\sqrt{G^2+(\omega C-1/\omega L)^2}}\,\hat{i}\,, \tag{8.113}$$

$$\frac{|\hat{\underline{i}}_C|}{|\hat{\underline{i}}|}=\frac{|\underline{Y}_C|}{|\underline{Y}|} \quad \to \quad \hat{i}_C=\frac{\omega C}{\sqrt{G^2+(\omega C-1/\omega L)^2}}\,\hat{i}\,. \tag{8.114}$$

Die Werte dieser Ströme bei den Frequenzen $f\to 0$, $f=f_0$ und $f\to\infty$ sind in der Tab. 8.4 zusammengestellt.

Tabelle 8.4

Ströme durch die Komponenten bei ausgewählten Frequenzen

	$f \to 0$	$f = f_0$	$f \to \infty$
$\hat{i}_R$	0	$\hat{i}$	0
$\hat{i}_L$	$\hat{i}$	$\hat{i}\dfrac{1}{\omega_0 LG} = \hat{i}R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$	0
$\hat{i}_C$	0	$\hat{i}\dfrac{\omega_0 C}{G} = \hat{i}R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$	$\hat{i}$

Nach den Ergebnissen in dieser Tabelle entsprechen die Amplituden der Ströme durch Induktivität und Kapazität bei der Resonanzfrequenz der mit dem Wert

$$Q_p = R\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{8.115}$$

multiplizierten Amplitude des Eingangsstromes. Diesen Wert bezeichnet man als die **Güte** des Parallelschwingkreises, sein Kehrwert

$$d_p = \frac{1}{Q_p} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{8.116}$$

heißt wieder **Verlustfaktor** oder **Dämpfung**. Da die Amplitude des Stromes durch Induktivität und Kapazität um den Faktor Q_p größer werden kann als die Amplitude des Eingangsstromes, tritt eine **Stromüberhöhung** an den Komponenten auf. Diese Resonanzerscheinung wird daher als **Stromresonanz** bezeichnet.

Die Maximalwerte der Ströme treten bei den Frequenzen $\omega_L = 2\pi f_L$ bzw. $\omega_C = 2\pi f_C$ auf, die aus der Forderung

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{i}_L}{\mathrm{d}\,\omega} \overset{!}{=} 0 \quad \to \quad f_L = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{2C^2}} = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2}d_p^{\,2}} \quad \text{mit} \quad d_p \le \sqrt{2} \tag{8.117}$$

beziehungsweise

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{i}_C}{\mathrm{d}\,\omega} \overset{!}{=} 0 \quad \to \quad f_C = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{2LC - G^2L^2}} = f_0\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}d_p^{\,2}}} \quad \text{mit} \quad d_p \le \sqrt{2} \tag{8.118}$$

berechnet werden können. Bei großen Schwingkreisgüten bzw. kleinen Verlustfaktoren fallen diese beiden Frequenzen praktisch mit der Resonanzfrequenz zusammen (Abb. 8.43). Erst bei kleinen Schwingkreisgüten im Bereich $Q_p < 4$ nimmt der Abstand zwischen den beiden Frequenzen f_L und f_C erkennbar zu. In dem Grenzfall $d_p = \sqrt{2}$ bzw. $Q_p = 1/\sqrt{2}$ nimmt die Wurzel in den beiden vorstehenden Gleichungen den Wert Null an und für die beiden Frequenzen ergeben sich die Grenzwerte $f_L = 0$ und $f_C \to \infty$.

Unter Einbeziehung der Ergebnisse (8.117) und (8.118) für den Bereich $Q_p \geq 1/\sqrt{2}$ erhalten wir die maximal durch Induktivität und Kapazität fließenden Ströme

$$\frac{\hat{i}_{L\,\max}}{\hat{i}} = \frac{\hat{i}_{C\,\max}}{\hat{i}} = \begin{cases} \dfrac{1}{d_p\sqrt{1-\left(d_p/2\right)^2}} = \dfrac{Q_p}{\sqrt{1-1/\left(2Q_p\right)^2}} & \text{für} \quad Q_p \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \phantom{\text{für}} \quad Q_p \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} . \tag{8.119}$$

Diese Beziehung hat den gleichen Aufbau wie die Gl. (8.94), so dass wir unmittelbar zu der folgenden Aussage gelangen:

Merke

Eine Stromüberhöhung kann beim Parallelschwingkreis nur auftreten, wenn die Güte größer als $1/\sqrt{2}$ ist. In dem Bereich $Q_p \leq 1/\sqrt{2}$ kann der Strom durch die einzelnen Komponenten maximal den Wert des Eingangsstromes annehmen.

Die Darstellung der maximal möglichen Stromüberhöhung als Funktion der Schwingkreisgüte Q_p liefert den gleichen Kurvenverlauf, wie bereits in der Abb. 8.37 für die Spannungsüberhöhung angegeben.

Diskussion des Schwingkreisverhaltens an einem konkreten Zahlenbeispiel

Auch dieser Schwingkreis soll für ein Zahlenbeispiel $R = 250\Omega$, $L = 1\text{mH}$ und $C = 1\mu\text{F}$ untersucht werden. Der Widerstand muss jetzt wesentlich größer sein, da er sonst als Kurzschluss wirkt und die Resonanzerscheinungen überdeckt. So wie beim Reihenschwingkreis ein möglichst kleiner Widerstand eine große Güte und damit eine steile Resonanzkurve ergibt, so tritt dieser Effekt beim Parallelschwingkreis nur bei einem möglichst großen Parallelwiderstand auf. Mit den angegebenen Daten hat dieser Parallelschwingkreis die gleiche Resonanzfrequenz $f_0 \approx 5\text{kHz}$ und auch die gleiche Güte $Q_p \approx 7{,}9$ wie der Serienschwingkreis im vorhergehenden Kapitel. Die entsprechenden Diagramme der beiden Schaltungen können also unmittelbar miteinander verglichen werden.

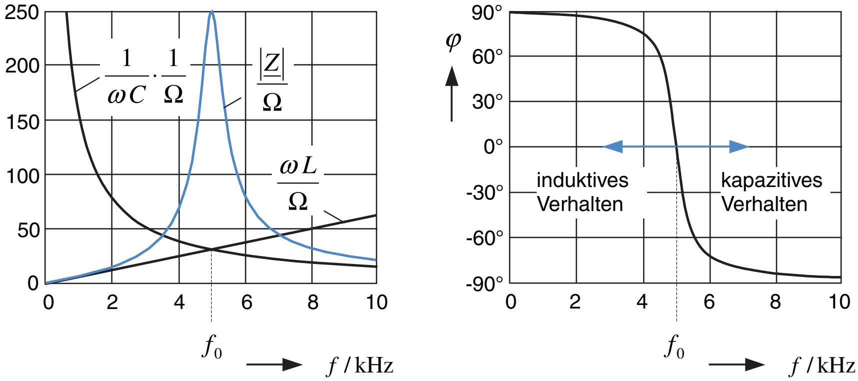


Abbildung 8.41: Impedanz des Parallelschwingkreises, Betrag und Phase

Die ▶Abb. 8.41 zeigt die Impedanz $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$ nach Betrag und Phase. Unterhalb der Resonanzfrequenz fließt fast der gesamte Strom durch die Induktivität, der Phasenwinkel ist positiv und die Spannung eilt dem Strom vor. Für $f \to 0$ geht die Impedanz nach 0 (Kurzschluss infolge L). Bei Frequenzen oberhalb von f_0 gilt $1/\omega C < \omega L$ und der Phasenwinkel wird infolge der dominierenden Kapazität negativ. Für $f \to \infty$ geht die Impedanz ebenfalls nach 0 (Kurzschluss infolge C). Bei der Resonanzfrequenz f_0 verhält sich die Parallelschaltung aus L und C wie ein Leerlauf, die Impedanz besteht allein aus dem Parallelwiderstand R.

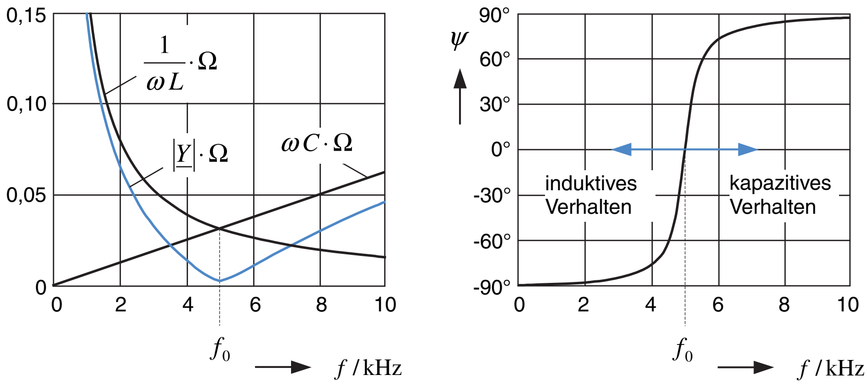


Abbildung 8.42: Admittanz des Parallelschwingkreises, Betrag und Phase

Betrag und Phase der Admittanz $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ sind in ▶Abb. 8.42 dargestellt. Ein Vergleich der Ergebnisse der beiden Schwingkreise zeigt, dass jeweils die Impedanz des einen und die Admittanz des anderen Resonanzkreises das gleiche frequenzabhängige Verhalten aufweisen.

Zum Abschluss betrachten wir noch die Spannung und die Ströme für den Fall, dass der Parallelschwingkreis an eine Stromquelle mit veränderlicher Frequenz, aber konstanter Amplitude $\hat{i} = 1\text{A}$ angeschlossen ist.

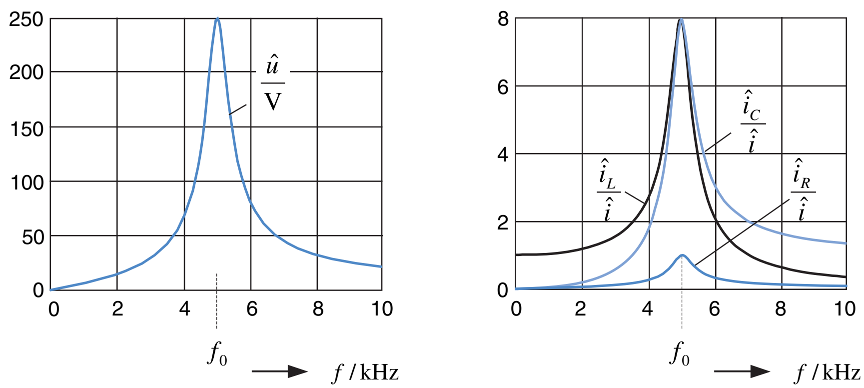


Abbildung 8.43: Strom- und Spannungsamplituden als Funktion der Frequenz, $\hat{i} = 1\,\text{A} = \text{const}$

Die Spannung an der Parallelschaltung verschwindet bei $f = 0$ infolge der Induktivität und für $f \to \infty$ infolge der Kapazität. Bei der Resonanzfrequenz verschwindet der Blindwiderstand, d.h. es gilt $\underline{Y} = G$ und die Spannung ist in Phase mit dem Quellenstrom. Ihre Amplitude beträgt $\hat{u} = R\,\hat{i}$.

Die Beträge der komplexen Amplituden der Ströme sind auf der rechten Seite der ▶Abb. 8.43 dargestellt. Bei kleiner Frequenz $f \to 0$ wird der gesamte Strom von der Induktivität übernommen, bei sehr hoher Frequenz $f \to \infty$ von der Kapazität. Obwohl der gesamte Quellenstrom bei Resonanz durch den Widerstand fließt, verschwinden die Ströme durch Induktivität und Kapazität nicht. Sie sind entgegengesetzt gleich groß $\hat{\underline{i}}_L = -\hat{\underline{i}}_C$ und nehmen bei dem zugrunde gelegten Zahlenbeispiel den 7,9-fachen Wert des Quellenstromes an. Diese Stromüberhöhung kann entsprechend den in der Tab. 8.4 angegebenen Formeln aus dem Produkt von Eingangsstromamplitude und Schwingkreisgüte berechnet werden.

Dieser Schwingkreis bietet bei einem Gemisch von vielen verschiedenen Frequenzen für einen bestimmten Frequenzbereich einen sehr hohen Widerstand (vgl. Abb. 8.41). Da diese Frequenzen nicht durchgelassen werden, wird dieser Schwingkreis auch als **Sperrkreis** bezeichnet.

Merke

Unterhalb der Resonanzfrequenz wird das Verhalten des Parallelschwingkreises durch die Induktivität bestimmt, oberhalb der Resonanzfrequenz durch die Kapazität. Bei der Resonanzfrequenz wird die Impedanz maximal. Sie entspricht dann dem Wert des Parallelwiderstandes und der Strom nimmt seinen Minimalwert an (Sperrkreis).

An Induktivität und Kapazität können erhebliche Stromüberhöhungen auftreten, die sich aus der Multiplikation von Amplitude des Quellenstromes und Schwingkreisgüte berechnen lassen.

Verallgemeinerte Darstellung des Schwingkreisverhaltens

Zur Ableitung der von den Werten der Komponenten unabhängigen **normierten Darstellung** für die Kennlinien des Parallelschwingkreises wird jetzt von der Admittanz in Gl. (8.109) ausgegangen, für die die nachfolgende Darstellung angegeben werden kann

$$\frac{\underline{Y}}{G} = 1 + \mathrm{j}\frac{1}{G}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \overset{(8.111)}{=} 1 + \mathrm{j}\frac{1}{G}\left(\frac{\omega C}{\omega_0\sqrt{LC}} - \frac{\omega_0\sqrt{LC}}{\omega L}\right) \overset{(8.115)}{=} 1 + \mathrm{j}Q_p\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right). \quad (8.120)$$

Mit der in Gl. (8.98) definierten Verstimmung v und der normierten Verstimmung Ω als das Produkt von Schwingkreisgüte und Verstimmung

$$Q_p v = \Omega \quad (8.121)$$

kann die normierte Admittanz in der gleichen Form wie die Impedanz beim Serienschwingkreis in Gl. (8.100) dargestellt werden

$$\frac{\underline{Y}}{G} = 1 + \mathrm{j}Q_p\, v = 1 + \mathrm{j}\Omega\,. \tag{8.122}$$

Die Kurvenverläufe für Betrag und Phase sind die gleichen wie in Abb. 8.38, mit dem einzigen Unterschied, dass die Ordinatenbezeichnungen jetzt $|\underline{Y}|/G$ und ψ lauten. Die Grenzfrequenzen werden aus der Gleichung

$$\Omega = \frac{1}{G}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \pm 1 \tag{8.123}$$

bestimmt und nehmen die Werte

$$\omega_1 = -\frac{G}{2C} + \sqrt{\frac{G^2}{4C^2} + \frac{1}{LC}} \quad \to \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q_p} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_p^{\;2}}} \tag{8.124}$$

und

$$\omega_2 = +\frac{G}{2C} + \sqrt{\frac{G^2}{4C^2} + \frac{1}{LC}} \quad \to \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = +\frac{1}{2Q_p} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_p^{\;2}}} \tag{8.125}$$

an. Bei diesen beiden Frequenzen gilt für Betrag und Phase der Admittanz

$$|\underline{Y}(\omega_1)| = |\underline{Y}(\omega_2)| = G\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \psi(\omega_1) = -45° \quad \text{bzw.} \quad \psi(\omega_2) = +45°. \tag{8.126}$$

Das aus den beiden Frequenzen gebildete geometrische Mittel entspricht wieder der Resonanzfrequenz

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^{\;2} \tag{8.127}$$

und die Bandbreite ist beim Parallelschwingkreis durch die folgende zur Gl. (8.107) analoge Beziehung gegeben

$$B = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi}(\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{G}{C} \overset{(8.111,8.115)}{=} \frac{f_0}{Q_p}\,. \tag{8.128}$$

8.6 Wechselstrom-Messbrücken

Eine in der Messtechnik häufig eingesetzte Schaltung ist die Wechselstrom-Messbrücke nach ▶Abb. 8.44. Das grundlegende Prinzip haben wir bereits in Beispiel 3.3 kennen gelernt. Wir werden diese Schaltung jetzt dahingehend verallgemeinern, dass die Gleichspannungsquelle in Abb. 3.19 durch eine Wechselspannungsquelle und die ohmschen Widerstände R_1 bis R_4 durch die Impedanzen $\underline{Z}_1$ bis $\underline{Z}_4$ ersetzt werden.

Im abgeglichenen Zustand der Brücke zeigt das zwischen den Punkten P_1 und P_2 angeschlossene Voltmeter keine Spannung. Da in diesem Zustand auch kein Strom durch das Messinstrument fließt, spielt der in der Praxis endliche Widerstand des Messinstruments beim Abgleich keine Rolle.

Die Voraussetzung für den Abgleich ist, dass die Spannungsteilung zwischen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ im linken Brückenzweig gleich ist zur Spannungsteilung zwischen $\underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_4$ im rechten Brückenzweig. Für die Impedanzen muss also gelten

$$\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}=\frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4} \quad \text{oder} \quad \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}=\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4} \quad \text{oder} \quad \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}=\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}. \tag{8.129}$$

Diese Bedingungen sind alle gleichwertig, wie sich durch einfache Kehrwertbildung bei den ersten beiden Gleichungen leicht überprüfen lässt.

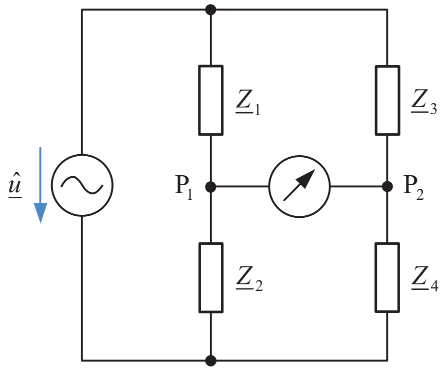


Abbildung 8.44: Brückenschaltung

Die Produkte der jeweils diagonal gegenüberliegenden Impedanzen müssen also gleich sein. Diese komplexe Gleichung

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_4=\underline{Z}_2\underline{Z}_3 \tag{8.130}$$

kann in zwei unabhängige reelle Gleichungen zerlegt werden, indem wir entweder die Realteile und die Imaginärteile getrennt voneinander betrachten oder alternativ die Beträge und die Argumente.

In der Praxis werden oft zwei der Impedanzen als ohmsche Widerstände ausgeführt, wodurch sich die Gl. (8.130) wesentlich vereinfacht. Im Folgenden werden wir zwei unterschiedliche Fälle etwas genauer untersuchen.

8.6.1 Die Wien-Brücke

Wir beginnen mit dem Fall, dass die beiden Impedanzen in einem Längszweig rein ohmsche Widerstände sind, z.B. $\underline{Z}_3=R_3$ und $\underline{Z}_4=R_4$. Für die Argumente in Gl. (8.130) muss dann $\varphi_1=\varphi_2$ gelten, d.h. die Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ müssen vom gleichen Typ sein, entweder sind beide kapazitiv oder beide induktiv. Der Sonderfall, dass $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ ohmsche Widerstände sind, soll hier nicht wiederholt werden.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass die beiden Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ aus der Reihenschaltung von einer Kapazität und einem Widerstand bestehen. Mit

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} \quad \text{und} \quad \underline{Z}_2 = R_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2} \tag{8.131}$$

nimmt die Gl. (8.130) die folgende Form an

$$R_1 R_4 + \frac{R_4}{\mathrm{j}\omega C_1} = R_2 R_3 + \frac{R_3}{\mathrm{j}\omega C_2}\,, \tag{8.132}$$

aus der wir unmittelbar durch Vergleich der Real- bzw. Imaginärteile die beiden von der Frequenz unabhängigen Bedingungen

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad \frac{C_2}{C_1} = \frac{R_3}{R_4} \tag{8.133}$$

erhalten. Diese beiden Forderungen lassen sich nicht gleichzeitig durch Verändern des Widerstandsverhältnisses R_3/R_4 erfüllen. Wird durch entsprechende Einstellung von R_3 und R_4 die zweite Bedingung erfüllt, dann muss zusätzlich einer der Widerstände R_1 oder R_2 so eingestellt werden, dass auch die erste der beiden Bedingungen erfüllt ist.

In Kap. 8.2.5 haben wir bereits gesehen, dass die Umrechnung einer *RC*-Reihenschaltung in eine *RC*-Parallelschaltung nur für eine Frequenz gilt. Verwenden wir also für die Impedanz $\underline{Z}_2$ die Parallelschaltung, dann muss der Brückenabgleich frequenzabhängig werden. Die entsprechende Schaltung ist in ▶Abb. 8.45 dargestellt.

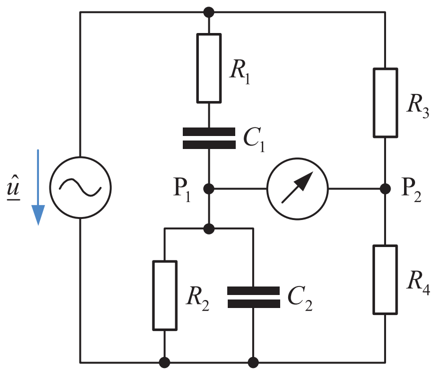


Abbildung 8.45: Die Wien-Brücke

Aus der Abgleichbedingung (8.130) folgt nach einfacher Umstellung die Beziehung

$$\underline{Z}_1 \underline{Y}_2 = \frac{R_3}{R_4} \quad \rightarrow \quad \left(R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}\right)\left(\frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_2\right) = \frac{R_3}{R_4}\,. \tag{8.134}$$

Die getrennte Betrachtung von Real- und Imaginärteil führt auf die beiden Bedingungen

$$\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} = \frac{R_3}{R_4} \tag{8.135a}$$

und

$$\omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 = 1\,. \tag{8.135b}$$

Die Bedingung (8.135a) kann mit dem Verhältnis R_3/R_4 und die Bedingung (8.135b) durch Wahl der Frequenz erfüllt werden. Fasst man die beiden *RC*-Netzwerke als Modelle verlustbehafteter Kondensatoren auf, dann können die Werte für einen verlustbehafteten Kondensator auf diese Weise bestimmt werden, sofern die Werte für den anderen Kondensator bereits bekannt sind.

Andererseits lässt sich die Wien-Brücke wegen der Bedingung (8.135b) auch zur Messung der Frequenz verwenden. Für die praktische Durchführung der Messungen ist es vorteilhaft, wenn die beiden Abgleichbedingungen unabhängig voneinander eingestellt werden können und nicht durch Ändern eines Parameters beide Bedingungen gleichzeitig beeinflusst werden. Legen wir für die Frequenzmessung in den Kondensatorzweigen gleiche Werte $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$ zugrunde, dann folgen aus der Gl. (8.135) die beiden Bedingungen

$$R_3 = 2R_4 \tag{8.136a}$$

und

$$\omega = 2\pi f = \frac{1}{RC}\,. \tag{8.136b}$$

Mit den gleichen Werten C und dem fest eingestellten Verhältnis (8.136a) genügt es also, die beiden Widerstände $R_1 = R_2 = R$ gleichzeitig und in der gleichen Weise zu verändern, um den Abgleich herzustellen. In der Praxis lässt sich das z.B. durch ein Doppelpotentiometer mit gemeinsamer Drehachse auf einfache Weise realisieren.

8.6.2 Die Maxwell-Wien-Brücke

In diesem zweiten Fall sei angenommen, dass zwei diagonal gegenüberliegende Impedanzen ohmsche Widerstände sind, z.B. $\underline{Z}_2 = R_2$ und $\underline{Z}_3 = R_3$. Die Betrachtung der Argumente in Gl. (8.130) führt auf die Beziehung $\varphi_1 + \varphi_4 = 0$, d.h. eine der beiden Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_4$ muss kapazitiv und die andere induktiv sein. Eine mögliche Ausführungsform ist in ▶Abb. 8.46 dargestellt.

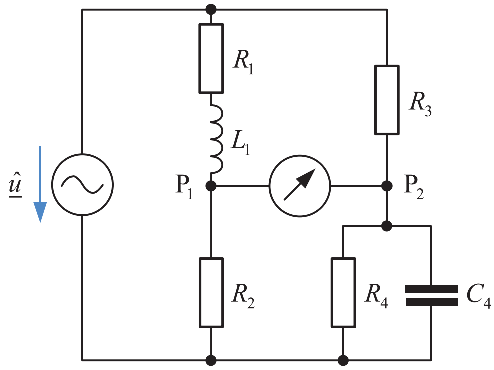


Abbildung 8.46: Die Maxwell-Wien-Brücke

Diese Brückenschaltung wird zur Messung einer verlustbehafteten Induktivität eingesetzt. Nach einer Umstellung der Gl. (8.130) erhalten wir den Zusammenhang

$$\frac{\underline{Z}_1}{R_2} = R_3\underline{Y}_4 \qquad \rightarrow \qquad \frac{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}{R_2} = R_3\left(\frac{1}{R_4} + \mathrm{j}\omega C_4\right). \tag{8.137}$$

Aus dem Vergleich der Real- bzw. Imaginärteile folgen die Ergebnisse

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad L_1 = R_2 R_3 C_4\,, \tag{8.138}$$

die von der Frequenz der Quellenspannung unabhängig sind.

8.7 Ortskurven

In der Netzwerkanalyse steht oft die Frage im Vordergrund, wie die Strom- und Spannungsverläufe und als Konsequenz davon auch die Verluste beeinflusst werden, wenn sich einzelne Schaltungsparameter wie z.B. die Werte der Komponenten oder die Frequenz ändern.

Eine Möglichkeit zur Darstellung derartiger Zusammenhänge haben wir bereits in den vorangegangenen Kapiteln kennen gelernt. In Abb. 8.31 ist z.B. die Impedanz $\underline{Z}$ des Serienschwingkreises in zwei separaten Diagrammen, aufgeteilt nach Betrag und Phase, als Funktion der Frequenz dargestellt. Ebenso kann die komplexe Größe $\underline{Z}$, aufgeteilt nach Real- und Imaginärteil, als Funktion der Frequenz dargestellt werden. Eine weitere Möglichkeit, einen schnellen Überblick über das Verhalten einer Schaltung als Folge von Parametervariationen zu erhalten, bietet die so genannte **Ortskurve**.

Für eine bestimmte Frequenz kann man den komplexen Wert $\underline{Z}$ in der komplexen Ebene durch einen Zeiger darstellen. Dieser enthält sowohl die Information über die Amplitude als auch über die Phase bei dieser Frequenz. Ändert man nun die Frequenz um einen bestimmten Wert, dann werden sich im allgemeinen Fall auch Amplitude und Phase des zugehörigen Zeigers ändern, seine Spitze liegt dann an einer anderen

Stelle in der komplexen Ebene. Bei einer kontinuierlichen Änderung der Frequenz wird sich die Spitze des Zeigers auf einer Kurve in der komplexen Ebene bewegen. Diese Kurve wird als Ortskurve bezeichnet.

Merke

Unter einer Ortskurve in der komplexen Ebene versteht man den geometrischen Ort der Endpunkte aller Zeiger, die von einem reellen Parameter abhängen.

Als Ortskurven lassen sich Impedanzen, Admittanzen, Ströme oder auch Spannungen darstellen. Man kann an ihnen sowohl den Amplitudengang als auch den Phasengang ablesen und zwar als Funktion der Frequenz oder auch eines beliebig gewählten anderen Parameters.

8.7.1 Ortskurve für die Impedanz einer RL-Reihenschaltung

Betrachten wir als erstes Beispiel die Impedanz der Reihenschaltung aus einem veränderbaren Widerstand und einer Induktivität nach ▶Abb. 8.47. Die Impedanz dieses Netzwerks

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\frac{\omega L}{R}} \tag{8.139}$$

ist bereits im Widerstandsdiagramm 8.16 dargestellt. Bei einer Änderung des Widerstandes R ändert sich lediglich der Wirkwiderstand von $\underline{Z}$, der Blindwiderstand bleibt konstant. Als Ortskurve erhalten wir eine Gerade, die parallel zur reellen Achse verläuft.

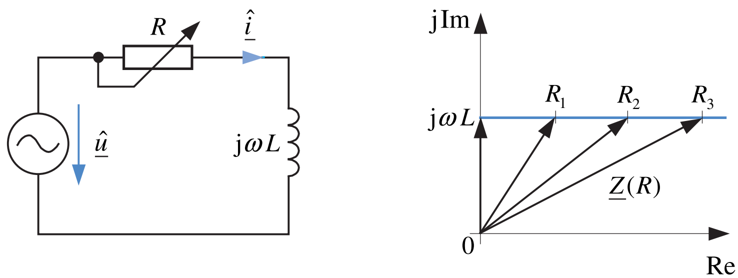


Abbildung 8.47: *RL*-Reihenschaltung mit Ortskurve für variablen Widerstand

Ist dagegen die Induktivität L variabel, dann ändert sich nur der Blindwiderstand und die Ortskurve verläuft entsprechend ▶Abb. 8.48a parallel zur imaginären Achse. Als dritte Möglichkeit lässt sich die Impedanz auch als Funktion der Frequenz darstellen. In diesem Fall ändert sich ebenfalls nur der Blindwiderstand und die zugehörige Ortskurve entspricht dem Teilbild a mit entsprechend geänderter Skalierung (▶Abb. 8.48b).

Da sich in dem betrachteten Beispiel entweder nur der Realteil oder nur der Imaginärteil ändert, erhält man Ortskurven, die parallel zu einer der beiden Achsen verlaufen. Im allgemeinen Fall werden sie jedoch einen wesentlich komplizierteren Verlauf in der komplexen Ebene aufweisen. Die Ortskurve für eine Impedanz oder eine Admittanz kann aber nur im ersten und vierten Quadranten der komplexen Ebene liegen, da der Wirkwiderstand einer passiven Schaltung nicht negativ werden kann.

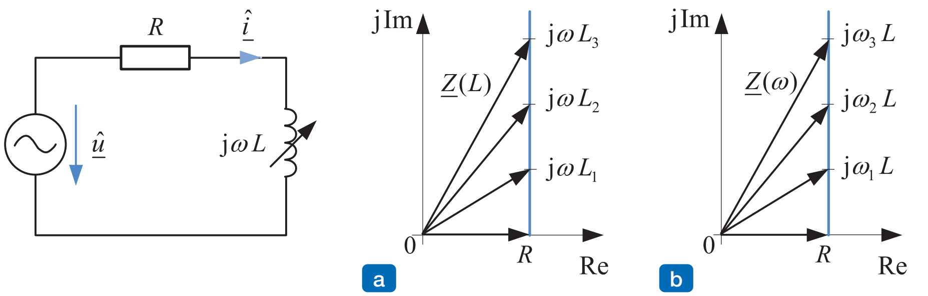


Abbildung 8.48: *RL*-Reihenschaltung mit Ortskurve für variable Reaktanz

Im nächsten Schritt wollen wir uns die Ortskurve für die Spannung $\underline{\hat{u}}$ herleiten, wenn der Strom durch die Schaltung konstant gehalten wird. In diesem Fall wird der Verlauf des Spannungszeigers für die sich ändernde Impedanz $\underline{Z}$ in der komplexen Ebene dargestellt. Legt man den Strom so wie in Abb. 8.16 auf die reelle Achse, dann folgt wegen $\underline{\hat{i}} = \hat{i}$ aus dem Ohm'schen Gesetz der Zusammenhang $\underline{\hat{u}} = \underline{Z}\,\underline{\hat{i}} = \underline{Z}\,\hat{i}$, d.h. die Ortskurve für die Spannung ist bis auf den Faktor $\hat{i}$ identisch mit der Ortskurve für die Impedanz. Die in Kap. 8.2.4 festgestellte Proportionalität zwischen Spannungs- und Widerstandsdiagramm bei einer Reihenschaltung bleibt auch erhalten, wenn die Zeiger *als Funktion einer Variablen* in der komplexen Ebene dargestellt werden, d.h. die Proportionalität gilt auch für die Ortskurven.

Merke

Bei einer Reihenschaltung stimmen bei konstantem Strom die Ortskurven für die Spannung und für die Impedanz bis auf einen Skalierungsfaktor überein.

Analog gilt: Bei einer Parallelschaltung stimmen bei konstanter Spannung die Ortskurven für den Strom und für die Admittanz bis auf einen Skalierungsfaktor überein.

8.7.2 Umrechnung zwischen Impedanz und Admittanz

Bei der Ortskurvenberechnung von Zweipolnetzwerken müssen je nach Zusammenschaltung der Komponenten immer wieder Umrechnungen zwischen Impedanz und Admittanz vorgenommen werden. Dieser Vorgang wird allgemein als **Inversion** bezeichnet und kann rein formelmäßig mit den Beziehungen (8.25) bis (8.27) durchgeführt werden. Wir werden aber zeigen, dass der Kehrwert auch auf sehr einfache

Weise grafisch ermittelt werden kann. Dabei lernen wir zwei Verfahren kennen, mit deren Hilfe die Inversion zunächst für einen festen Zeiger demonstriert werden soll. Mit dieser Vorgehensweise wird dann anschließend die komplette Ortskurve für die Admittanz $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ ermittelt. Wir werden die beiden Verfahren am Beispiel der bisher betrachteten *RL*-Reihenschaltung vorstellen.

Bei der Inversion einer Ortskurve ändert sich notwendigerweise auch deren Dimension. Für die Darstellung wählt man im Allgemeinen zwei unabhängige Diagramme mit den jeweiligen Einheiten, z.B. Ω für die Widerstandsebene und 1/Ω für die Leitwertebene.

Erstes Verfahren:

Ausgangspunkt ist eine Impedanz $\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$, deren Imaginärteil X positiv oder auch negativ sein kann. Zur Bestimmung der Admittanz werden die folgenden in der ▶Abb. 8.49 dargestellten Schritte durchgeführt:

- Die Einzeladmittanzen von Wirkkomponente $1/R$ und Blindkomponente $1/(\mathrm{j}X) = -\mathrm{j}/X$ werden entlang der beiden Achsen aufgetragen und ihre Enden miteinander verbunden.
- Die gesuchte Admittanz entspricht einem Zeiger, der ausgehend vom Ursprung senkrecht auf die eingezeichnete Hypotenuse fällt.

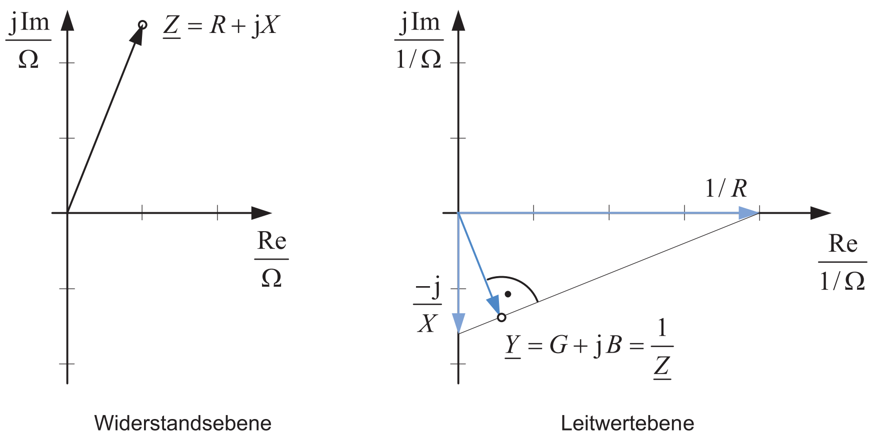


Abbildung 8.49: Erstes Verfahren zur Ermittlung des Kehrwertes einer komplexen Zahl

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Vorgehensweise wird in Anhang F.1 erbracht. Es spielt keine Rolle, ob wir ausgehend von $\underline{Z}$ den Kehrwert $1/\underline{Z} = \underline{Y}$, oder ausgehend von $\underline{Y}$ den Kehrwert $1/\underline{Y} = \underline{Z}$ bestimmen. Die durchzuführenden Schritte sind immer gleich.

Beispiel 8.3: Reihen-Parallel-Umwandlung

Eine *RL*-Reihenschaltung bestehe aus den Komponenten $R_r = 0{,}5\Omega$ und $L_r = 1{,}25\text{mH}$.

Bei der Kreisfrequenz $\omega = 1\,000\text{s}^{-1}$ entspricht die Impedanz $\underline{Z} = 0{,}5\,\Omega + \text{j}\,1{,}25\,\Omega$ dem in Abb. 8.49 dargestellten Wert (Skalierung 0,5/div). Welche Werte besitzen die Komponenten R_p und L_p der äquivalenten Parallelschaltung?

Mit den Gleichungen in Abb. 8.18 ergeben sich auf rechnerischem Wege die Zahlenwerte $R_p = 3{,}625\Omega$ und $L_p = 1{,}45\text{mH}$. Die Admittanz der aus diesen Komponenten aufgebauten Parallelschaltung $\underline{Y} = G + \text{j}B = 0{,}276\,/\,\Omega - \text{j}\,0{,}69\,/\,\Omega$ entspricht dem in der Abb. 8.49 ermittelten Zeiger.

Zweites Verfahren:

Zur Demonstration dieses Verfahrens wählen wir wieder die gleiche Impedanz $\underline{Z}$ aus Abb. 8.49. Im Gegensatz zu dem ersten Verfahren, bei dem zumindest die Kehrwerte von Real- und Imaginärteil der Ausgangsgröße rechnerisch bestimmt werden mussten, handelt es sich bei diesem 2. Verfahren um eine rein grafische Methode, bei der die in der ▶Abb. 8.50a dargestellten Schritte durchzuführen sind:

- Um den Ursprung wird ein Kreis mit dem Radius $r = 1$ geschlagen (die Skalierung ist die gleiche wie bei der Ausgangsgröße $\underline{Z}$).
- Von dem Ausgangspunkt $\underline{Z}$ werden zwei Tangenten an den Einheitskreis gezeichnet und die Berührungspunkte P miteinander verbunden.
- Diese Verbindungslinie schneidet den Zeiger $\underline{Z}$ unter einem rechten Winkel an der Stelle $\underline{Y}^*$. Die Spiegelung dieses Schnittpunktes an der reellen Achse entspricht dem gesuchten Kehrwert $\underline{Y}$.

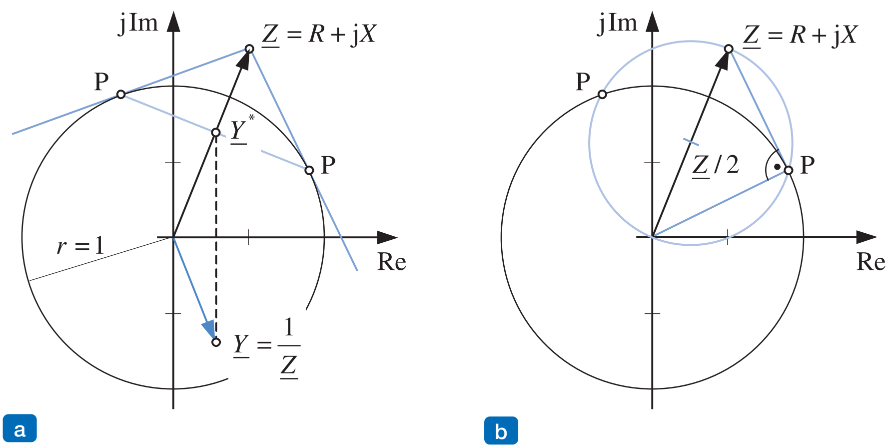


Abbildung 8.50: Zweites Verfahren zur Ermittlung des Kehrwertes einer komplexen Zahl

In dem Sonderfall $|\underline{Z}| = 1$ liegt der Punkt bereits auf dem Einheitskreis und es gilt $\underline{Y}^* = \underline{Z}$. In diesem Fall verbleibt nur die Spiegelung an der reellen Achse.

Liegt der Ausgangspunkt $\underline{Z}$ innerhalb des Einheitskreises, dann können die einzelnen Schritte in der umgekehrten Reihenfolge durchgeführt werden. (Es sei dem Leser überlassen, den Wert $\underline{Y}$ in Abb. 8.50a als Startwert zu nehmen und dessen Kehrwert $\underline{Z}$ zu ermitteln).

Die Bestimmung der Berührungspunkte P zwischen Einheitskreis und Tangenten ist auf zeichnerischem Wege ungenau. Alternativ können diese Punkte, so wie in ▶Abb. 8.50b dargestellt, als Schnittpunkte des Einheitskreises mit einem weiteren Kreis vom Radius $|\underline{Z}|/2$ gefunden werden, der um den Mittelpunkt $\underline{Z}/2$ geschlagen wird. Die Richtigkeit dieser Vorgehensweise wird in Anhang F.2 bewiesen.

8.7.3 Ortskurve für die Admittanz einer RL-Reihenschaltung

Wir wollen jetzt die Ortskurve für die Admittanz $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ der *RL*-Reihenschaltung ermitteln, wobei zunächst wieder der Fall des variablen Widerstandes betrachtet werden soll. Die Aufgabe besteht also darin, die Ortskurve der Abb. 8.47 zu invertieren. Dies kann auf einfache Weise dadurch geschehen, dass die einzelnen Punkte der Ortskurve mit dem ersten Verfahren invertiert und die einzelnen Inversionspunkte miteinander verbunden werden. Das Ergebnis ist in ▶Abb. 8.51 dargestellt und liefert einen Halbkreis mit den beiden Endpunkten $\underline{Y} = 1/\mathrm{j}\omega L$ für $R = 0$ und $\underline{Y} = 0$ für $R \to \infty$.

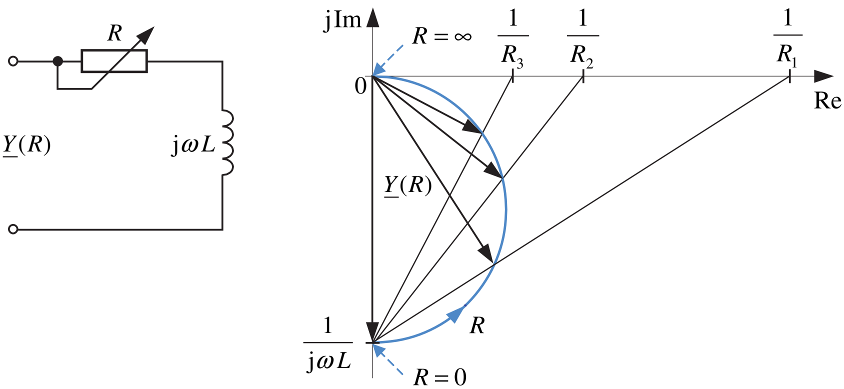


Abbildung 8.51: Ortskurve für die Admittanz der *RL*-Reihenschaltung für variablen Widerstand

Im nächsten Schritt invertieren wir die Ortskurven in Abb. 8.48. Mit der gleichen Vorgehensweise erhalten wir die Ortskurve der Admittanz der *RL*-Reihenschaltung für den Fall einer variablen Reaktanz. Die ▶Abb. 8.52 zeigt die Inversion für die Ortskurve aus dem Teilbild b der Abb. 8.48, bei dem die Frequenz variiert wurde. Auch in diesem Fall erhalten wir einen Halbkreis mit den beiden Endpunkten $\underline{Y} = 1/R$ für $\omega = 0$ und $\underline{Y} = 0$ für $\omega \to \infty$.

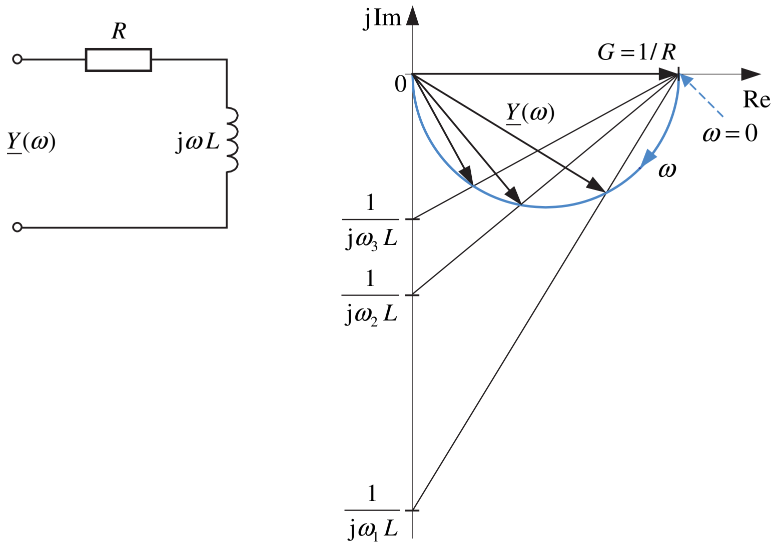


Abbildung 8.52: Ortskurve für die Admittanz der *RL*-Reihenschaltung für variable Frequenz

8.7.4 Allgemeine Gesetzmäßigkeiten bei der Inversion von Ortskurven

Aus den betrachteten Beispielen ist zu erkennen, dass die punktweise Inversion einer Ortskurve unter Umständen sehr mühsam sein kann. Andererseits sind aber bei der Inversion der Geraden neue Ortskurven entstanden, deren geometrische Form (Kreis bzw. Halbkreis) bereits durch wenige Angaben wie z.B. die Lage des Kreismittelpunktes und den Kreisradius (und eventuell noch Anfangs- und Endpunkt bei einem Kreisausschnitt) vollständig beschrieben werden kann. Es stellt sich daher die Frage nach allgemein gültigen Zusammenhängen bei der Inversion von Ortskurven, die diesen Vorgang vereinfachen.

Die folgenden Gesetzmäßigkeiten sind in den Kap. F.3 bis F.5 im Anhang bewiesen:

Merke

1. Eine Gerade, die durch den Ursprung geht, wird wieder in eine Gerade invertiert, die ebenfalls durch den Ursprung geht.

2. Eine Gerade, die sich beidseitig nach Unendlich erstreckt und nicht durch den Ursprung geht, wird in einen Kreis invertiert, der durch den Ursprung geht (und umgekehrt). Erstreckt sich die Gerade nicht beidseitig nach Unendlich, dann liefert die Inversion auch nur den zugehörigen Teil des Kreises.

3. Ein Kreis, der nicht durch den Ursprung geht, wird wieder in einen Kreis invertiert.

8.7.5 Ortskurven bei komplizierteren Netzwerken

Zur Erstellung einer Ortskurve bei komplizierteren Netzwerken geht man üblicherweise so vor, dass die bereits bekannten Ortskurven für Teilnetzwerke punktweise, d.h. bei jeweils gleichen Parametern, addiert werden. Als Beispiel soll die Ortskurve für die Impedanz des Netzwerks in ▶Abb. 8.53 bei veränderlicher Frequenz dargestellt werden.

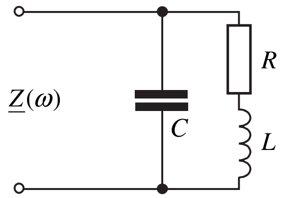


Abbildung 8.53: Resonantes Netzwerk

Wegen der Parallelschaltung der beiden aus der Kapazität C und aus der RL-Reihenschaltung bestehenden Zweipole müssen die beiden Admittanzen addiert werden

$$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}\,. \tag{8.140}$$

Die Ortskurve der Admittanz jωC beginnt im Ursprung und verläuft entlang der positiven, imaginären Achse. Addiert man diese zu dem in der unteren Halbebene liegenden Halbkreis nach Abb. 8.52, dann erhält man beispielsweise den qualitativen Kurvenverlauf auf der rechten Seite der ▶Abb. 8.54. Der exakte Verlauf hängt zwar von den Werten R, L und C ab, an dem prinzipiellen Verlauf kann man aber bereits erkennen, dass eine Resonanzfrequenz ω_0 existiert, bei der der Phasenwinkel Null wird, d.h. der Imaginärteil von Admittanz und Impedanz verschwindet.

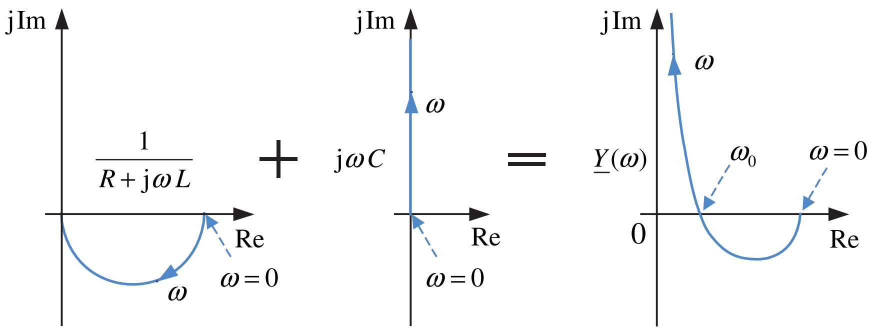


Abbildung 8.54: Konstruktion der Ortskurve für die Admittanz

Bei den Resonanzerscheinungen in Kap. 8.5 haben wir festgestellt, dass die Güte des Schwingkreises großen Einfluss auf das Resonanzverhalten hat. Wird die Güte zu klein, dann verschwindet die Resonanz völlig und es tritt z.B. keine Strom- oder Spannungsüberhöhung an den Komponenten mehr auf. In diesem Fall darf in der resultierenden Ortskurve der Schnittpunkt mit der reellen Achse bei ω_0 ebenfalls nicht mehr auftreten, d.h. an der Ortskurve muss zu erkennen sein, ob das Netzwerk eine Resonanzfrequenz besitzt oder nicht.

Der Schnittpunkt mit der reellen Achse tritt aber genau dann nicht mehr auf, wenn die Ortskurve, die immer für $\omega = 0$ an der Stelle $1/R$ auf der reellen Achse beginnt und sich für $\omega \to \infty$ der positiven imaginären Achse asymptotisch nähert, ausschließlich durch den ersten Quadranten verläuft. Für die beiden Teiladmittanzen bedeutet das, dass bei einer Erhöhung der Frequenz, ausgehend von $\omega = 0$, der Beitrag der Kapazität schneller in Richtung positiver Imaginärteile als die kreisförmige Ortskurve infolge der RL-Reihenschaltung in Richtung negativer Imaginärteile anwächst. In diesem Fall wird die Ortskurve, beginnend bei $1/R$, senkrecht zur reellen Achse direkt in Richtung des ersten Quadranten verlaufen. Der Grenzfall zwischen dieser Situation und dem in Abb. 8.54 dargestellten Fall besteht darin, dass der Zuwachs der beiden Teiladmittanzen in Richtung positiver bzw. negativer Imaginärteile bei wachsendem ω gleich schnell erfolgt. Die Ortskurve für die Gesamtadmittanz wird in diesem Fall zunächst parallel zur reellen Achse verlaufen, bevor sie in den ersten Quadranten eintritt.

Zum leichteren Verständnis wollen wir die Ortskurven für die drei Fälle für ein konkretes Zahlenbeispiel darstellen. Zunächst benötigen wir aber den Widerstandswert für den Grenzfall. Wird die Admittanz (8.140) durch die konjugiert komplexe Erweiterung in der Form

$$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L} = \mathrm{j}\omega C + \frac{R - \mathrm{j}\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + \mathrm{j}\omega \left[C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] \tag{8.141}$$

geschrieben, dann lässt sich die Resonanzfrequenz aus der Forderung nach dem Verschwinden des Imaginärteils berechnen. Es muss also gelten:

$$L = C\left[R^2 + (\omega_0 L)^2\right] \quad \text{bzw.} \quad \omega_0 = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C} - R^2}\,. \tag{8.142}$$

Die Wurzel besitzt nur eine reelle Lösung, falls $L/C > R^2$ ist. Wir erhalten somit die drei möglichen Fälle

1. $L/C > R^2$ Resonanzfrequenz bei ω_0 nach Gl. (8.142),
2. $L/C = R^2$ Grenzfall mit $\omega_0 = 0$,
3. $L/C < R^2$ keine Resonanzerscheinungen.

Die berechneten Ortskurven für Admittanz und Impedanz für das Netzwerk in Abb. 8.53 mit den Komponenten $L = 1\text{mH}$ und $C = 10\mu\text{F}$ sind mit der Frequenz als Parameter in den ▶Abb. 8.55 bis 8.57 gegenübergestellt.

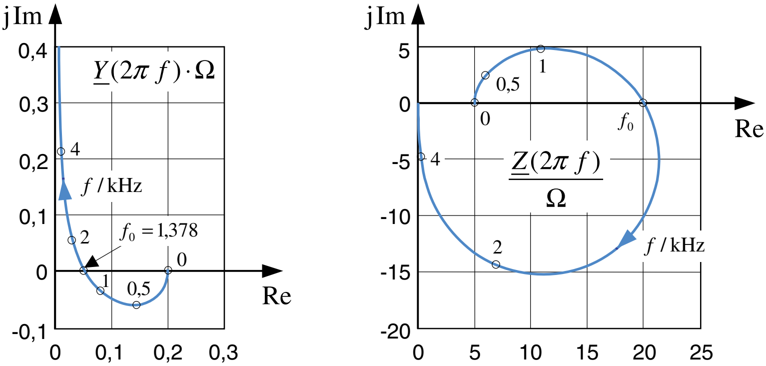


Abbildung 8.55: Ortskurven für Admittanz und Impedanz, Fall 1 mit $R = 5\,\Omega$

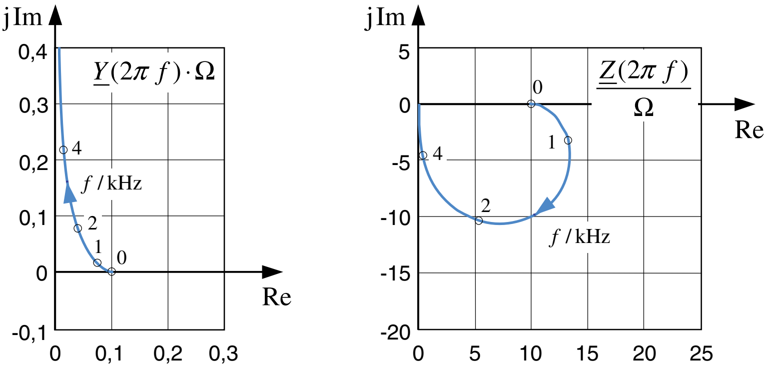


Abbildung 8.56: Ortskurven für Admittanz und Impedanz, Fall 2 mit $R = \sqrt{L/C} = 10\,\Omega$

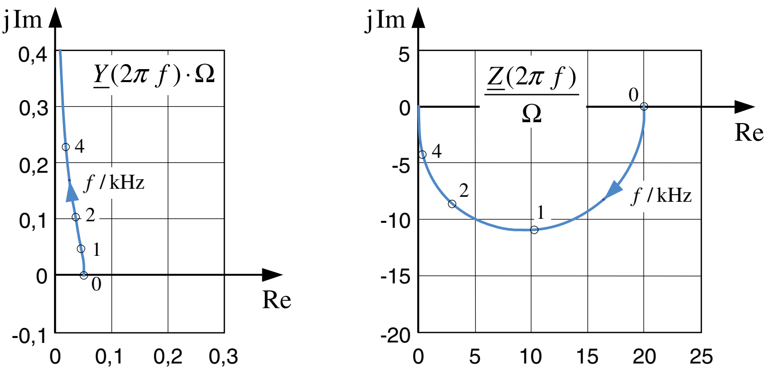


Abbildung 8.57: Ortskurven für Admittanz und Impedanz, Fall 3 mit $R = 20\,\Omega$

8.8 Energie und Leistung bei Wechselspannung

In diesem Kapitel wollen wir die Frage nach der in einem linearen Netzwerk gespeicherten oder verbrauchten Energie untersuchen, wenn das Netzwerk an eine Wechselspannungs- bzw. Wechselstromquelle angeschlossen ist. Dabei soll die Einschränkung gelten, dass das Netzwerk aus einzelnen Zweipolen aufgebaut ist. Da sich die insgesamt in dem Netzwerk gespeicherte oder verbrauchte Energie aus der linearen Überlagerung der Beiträge der einzelnen Zweipole zusammensetzt, kann die Untersuchung auf den in ▶Abb. 8.58 dargestellten linearen Zweipol[5] beschränkt werden. Die an den Anschlussklemmen vorliegenden zeitabhängigen Größen können in der allgemeinen Form

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{und} \quad i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) \tag{8.143}$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und den gegenüber einem beliebigen Bezugswert angenommenen Phasenverschiebungen (*Nullphasenwinkeln*) φ_u der Spannung und φ_i des Stromes dargestellt werden.

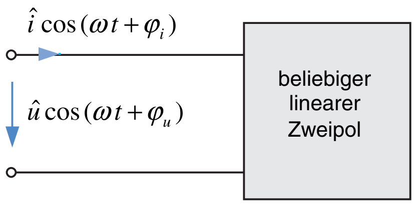


Abbildung 8.58: Zweipol an Wechselspannung

Bei den zeitabhängigen Signalverläufen $u(t)$ und $i(t)$ ist der Momentanwert der Leistung, d.h. die bei Zugrundelegung des Verbraucherzählpfeilsystems augenblicklich an den Zweipol abgegebene Leistung, nach Gl. (7.12) durch das Produkt

$$p(t) = u(t)\, i(t) = \hat{u}\,\hat{i}\, \cos(\omega t + \varphi_u)\, \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{8.144}$$

gegeben. Diese Leistung kann abhängig von dem Zeitpunkt t positiv oder negativ sein. Für $p(t) > 0$ nimmt der Zweipol augenblicklich Leistung auf, er verhält sich wie ein Verbraucher. Bei einem rein ohmschen Zweipol ist diese Bedingung zu jedem Zeitpunkt erfüllt. Gilt dagegen $p(t) < 0$, dann gibt der Zweipol augenblicklich Leistung ab, er verhält sich wie eine Quelle. Dieser Fall tritt während eines Teils der Periodendauer auf, wenn Blindenergie (vgl. Kap. 8.8.2) zwischen der Quelle und dem Zweipol hin- und herpendelt.

Wir untersuchen zunächst die Sonderfälle, bei denen der Zweipol lediglich eine der Komponenten R, L oder C enthält und verallgemeinern dann die Ergebnisse auf einen aus diesen Komponenten beliebig zusammengesetzten Zweipol. Da die hier betrachteten Zweipole keine Strom- oder Spannungsquellen enthalten, werden sie als **passive Zweipole** bezeichnet. Die im zeitlichen Mittel über eine komplette Periode aufgenommene Leistung ist bei den passiven Zweipolen immer größer oder gleich Null.

5 Beim linearen Zweipol sind alle Wirk- und Blindwiderstände unabhängig von dem Strom durch die Komponenten.

8.8.1 Wirkleistung

An einem ohmschen Widerstand sind Strom und Spannung immer in Phase. Wegen $\varphi_i = \varphi_u$ setzt sich die zeitabhängige Leistung aus einem zeitunabhängigen Anteil und einem mit doppelter Frequenz schwingenden Pendelanteil zusammen

$$p(t) = \hat{u}\,\hat{i}\cos^2(\omega t + \varphi_u) \overset{(H.3)}{=} \frac{\hat{u}\,\hat{i}}{2}\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)\right] \overset{(7.14)}{=} U\,I\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)\right]. \quad (8.145)$$

Das Ergebnis (8.145) beschreibt die momentan am Widerstand verbrauchte, d.h. in Wärme umgewandelte Leistung

$$p(t) = U\,I\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)\right] = U\,I\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)\right]. \quad (8.146)$$

Von besonderem Interesse ist die im zeitlichen Mittel an dem Widerstand verbrauchte Leistung. Bei der Integration über eine volle Periodendauer nach Gl. (7.8) verschwindet der Beitrag der Kosinusfunktion und es verbleibt der bereits in Gl. (7.13) angegebene Ausdruck

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = U\,I\,, \quad (8.147)$$

der als **mittlere Wirkleistung** oder kurz **Wirkleistung** P bezeichnet wird[6]

$$\boxed{\overline{P} = P = U\,I = U_{eff}\,I_{eff} = I_{eff}^{\;2}\,R = \frac{1}{R}U_{eff}^{\;2}}\,. \quad (8.148)$$

Merke

An einem ohmschen Widerstand ist die Wirkleistung durch das Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung gegeben.

Der zeitliche Verlauf von Strom und Spannung nach Gl. (8.143) ist in ▶Abb. 8.59 für eine komplette Periodendauer dargestellt. Die mit doppelter Frequenz schwingende, zeitabhängige Leistung $p(t)$ pendelt um den Mittelwert P. Die markierte Fläche unterhalb der Leistungskurve ist ein Maß für die an dem Widerstand in Wärme umgewandelte Energie.

6 **Vorsicht:** Während die Effektivwerte von Strom und Spannung üblicherweise mit Großbuchstaben bezeichnet werden ($U_{eff} = U$, $I_{eff} = I$), bezieht sich der Großbuchstabe P bei der Leistung auf den zeitlichen *Mittelwert*.

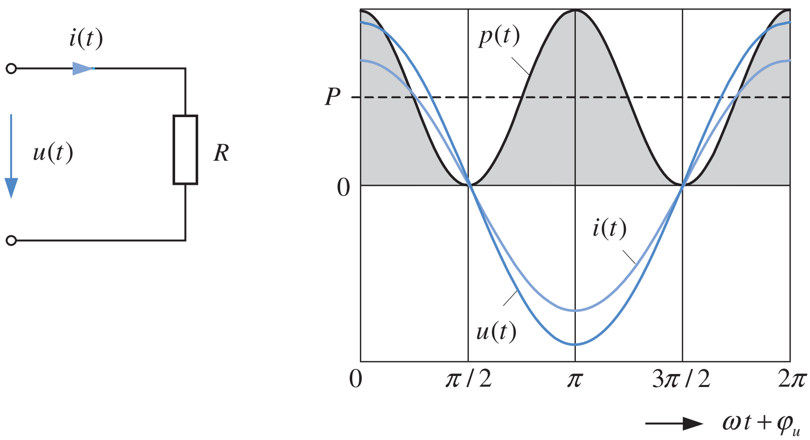


Abbildung 8.59: Signalverläufe am ohmschen Widerstand bei Wechselspannung

8.8.2 Blindleistung

An der Induktivität eilt der Strom der Spannung um $\pi/2$ nach. Mit der jetzt geltenden Phasenbeziehung $\varphi_i = \varphi_u - \pi/2$ lässt sich die zeitabhängige Leistung (8.144) mithilfe von Additionstheoremen auf die Form

$$\begin{aligned} p(t) &= \hat{u}\,\hat{i}\cos(\omega t+\varphi_u)\cos\left(\omega t+\varphi_u-\frac{\pi}{2}\right) \overset{(H.5)}{=} \hat{u}\,\hat{i}\cos(\omega t+\varphi_u)\sin(\omega t+\varphi_u) \\ &\overset{(H.4)}{=} \hat{u}\,\hat{i}\,\frac{1}{2}\sin(2\omega t+2\varphi_u) = U\,I\sin(2\omega t+2\varphi_u) = -U\,I\sin(2\omega t+2\varphi_i) \end{aligned} \tag{8.149}$$

bringen. Diese besteht nur aus einem mit doppelter Frequenz schwingenden Pendelanteil, der Mittelwert verschwindet. Der zeitliche Verlauf von Strom und Spannung nach Gl. (8.143) ist zusammen mit der zeitabhängigen Leistung in ▶Abb. 8.60 für eine komplette Periodendauer dargestellt.

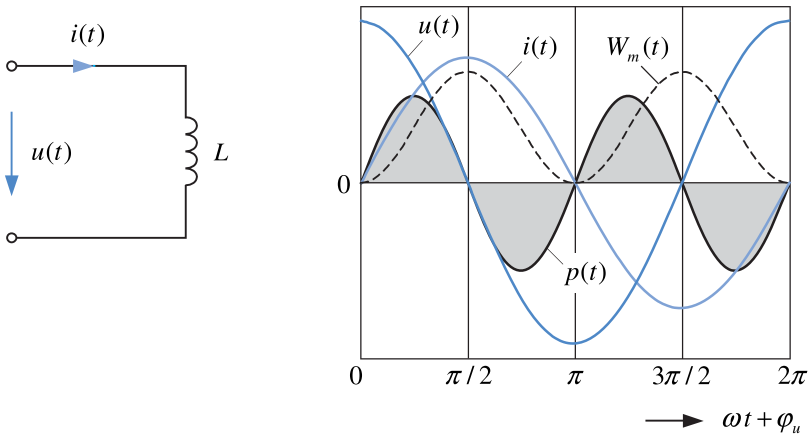


Abbildung 8.60: Signalverläufe an einer Induktivität bei Wechselspannung

In den Zeitbereichen, in denen Strom und Spannung das gleiche Vorzeichen haben, die Momentanleistung also positiv ist, wird aus der Quelle Energie entnommen und an die Induktivität abgegeben. Die ebenfalls in der Abb. 8.60 gestrichelt dargestellte im Magnetfeld gespeicherte Energie

$$W_m(t) \overset{(6.50)}{=} \frac{1}{2} L\, i^2(t) = \frac{1}{2} L\left[\hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i)\right]^2 = \frac{1}{2} L\left[\hat{i}\sin(\omega t + \varphi_u)\right]^2 \tag{8.150}$$

nimmt in diesen Zeitbereichen zu. Haben Strom und Spannung jedoch entgegengesetzte Vorzeichen, wenn die Momentanleistung also negativ ist, dann nimmt die Energie im Magnetfeld wieder ab und wird an die Quelle zurückgeliefert. Die Energie wird nicht verbraucht, sie pendelt lediglich zwischen Induktivität und Quelle hin und her.

Aus der Abb. 8.60 ist deutlich zu erkennen, wie die während der ersten Viertelperiode aus der Quelle entnommene Energie zu einer Erhöhung der im Magnetfeld gespeicherten Energie beiträgt, während in der darauf folgenden Viertelperiode das Magnetfeld wieder abgebaut und die Energie zur Quelle zurückgeliefert wird. Diese hin und her pendelnde Energie wird als **Blindenergie** bezeichnet.

Bei der Kapazität sind die Verhältnisse ähnlich wie bei der Induktivität. Da der Strom jetzt der Spannung um $\pi/2$ voreilt, ändert sich beim Strom und somit auch bei der zeitabhängigen Leistung nur das Vorzeichen

$$p(t) = -UI\sin(2\omega t + 2\varphi_u) = UI\sin(2\omega t + 2\varphi_i)\,. \tag{8.151}$$

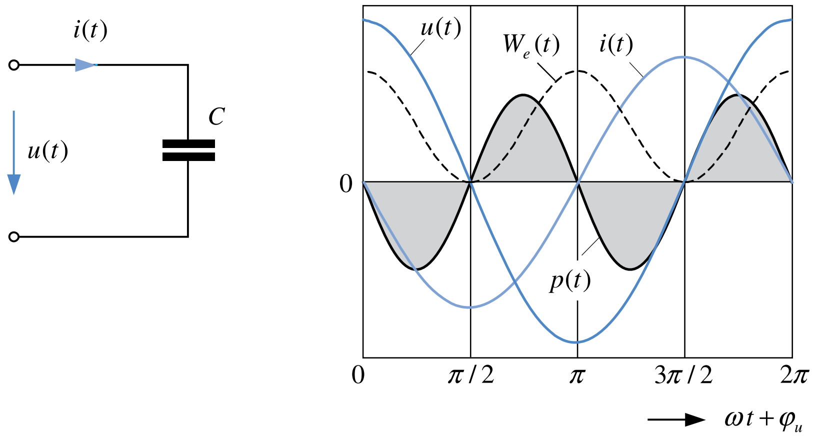


Abbildung 8.61: Signalverläufe an einer Kapazität bei Wechselspannung

Im Unterschied zur Abb. 8.60, in der die maximal gespeicherte Energie zeitgleich mit dem Maximalwert des Stromes auftritt, erreicht die Energie bei der Kapazität ihr Maximum zeitgleich mit dem Maximalwert der Spannung. Die gesamte der Kapazität zugeführte Energie ist identisch mit der im elektrischen Feld gespeicherten Energie

$$W_e(t) = \frac{1}{2} C\, u^2(t) = \frac{1}{2} C\left[\hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)\right]^2 = \frac{1}{2} C\left[\hat{u}\sin(\omega t + \varphi_i)\right]^2. \tag{8.152}$$

Auch hier wird die Energie nicht verbraucht, sie pendelt zwischen Kapazität und Quelle hin und her.

Bei dem Energieaustausch zwischen Wechselspannungsquelle und Induktivität bzw. Kapazität entstehen prinzipiell keine Verluste. Die der Quelle zeitweise entnommene Energie wird zum Aufbau des magnetischen bzw. elektrischen Feldes verwendet, beim Abbau des Feldes wird die Energie an die Quelle zurückgeliefert. In der Praxis existieren jedoch keine idealen Spulen oder Kondensatoren. In allen realen Bauelementen entstehen infolge des Stromes Verluste, sowohl in den Zuleitungen als auch abhängig von den jeweils verwendeten Materialien innerhalb der Komponenten selbst (z.B. Hystereseverluste). Aus diesem Grund ist man in der Praxis oft bestrebt, diese **Blindströme** möglichst klein zu halten bzw. völlig zu vermeiden.

8.8.3 Scheinleistung und Leistungsfaktor

Nachdem wir die Sonderfälle mit nur jeweils einer Komponente untersucht haben, kehren wir noch einmal zur Abb. 8.58 zurück. Der Zweipol soll jetzt aus einem beliebigen, aus den Komponenten R, L und C zusammengesetzten linearen Netzwerk bestehen, d.h. die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung kann einen beliebigen Wert in dem Bereich $-\pi/2 \le \varphi_u - \varphi_i \le +\pi/2$ annehmen. Die zeitabhängige Leistung (8.144) formen wir zunächst mithilfe von Additionstheoremen in der folgenden Weise um

$$\begin{aligned} p(t) &= \hat{u}\,\hat{i}\,\cos(\omega t+\varphi_u)\,\cos(\omega t+\varphi_i) \overset{(H.7)}{=} \hat{u}\,\hat{i}\,\frac{1}{2}\left[\cos(\varphi_u-\varphi_i)+\cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)\right] \\ &= UI\cos(\varphi_u-\varphi_i)+UI\cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)\,. \end{aligned} \tag{8.153}$$

Auch in diesem allgemeinen Fall setzt sich die zeitabhängige Leistung aus einem zeitunabhängigen Anteil und einem mit doppelter Frequenz schwingenden Pendelanteil zusammen. Wir formen den Pendelanteil weiter um

$$\begin{aligned} \cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i) &= \cos\left[(2\omega t+2\varphi_u)-(\varphi_u-\varphi_i)\right] \\ &\overset{(H.5)}{=} \cos(2\omega t+2\varphi_u)\,\cos(\varphi_u-\varphi_i) + \sin(2\omega t+2\varphi_u)\,\sin(\varphi_u-\varphi_i) \end{aligned} \tag{8.154}$$

und gelangen zu einer ersten Darstellung für die Momentanleistung

$$p(t) = UI\cos(\varphi_u-\varphi_i)\left[1+\cos(2\omega t+2\varphi_u)\right] + UI\sin(\varphi_u-\varphi_i)\,\sin(2\omega t+2\varphi_u)\,, \tag{8.155}$$

bei der im Argument der zeitabhängigen Funktionen nur der Phasenwinkel der Spannung φ_u enthalten ist. Mit der gleichen Berechtigung lässt sich der Pendelanteil auch in der folgenden Weise umformen

$$\begin{aligned} \cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i) &= \cos\left[(2\omega t+2\varphi_i)+(\varphi_u-\varphi_i)\right] \\ &\overset{(H.5)}{=} \cos(2\omega t+2\varphi_i)\,\cos(\varphi_u-\varphi_i) - \sin(2\omega t+2\varphi_i)\,\sin(\varphi_u-\varphi_i)\,, \end{aligned} \tag{8.156}$$

aus der eine zweite Darstellung für die Momentanleistung (8.153) resultiert

$$p(t) = UI\cos(\varphi_u - \varphi_i)\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)\right] - UI\sin(\varphi_u - \varphi_i)\sin(2\omega t + 2\varphi_i)\,, \quad (8.157)$$

bei der im Argument der zeitabhängigen Funktionen nur der Phasenwinkel des Stromes φ_i enthalten ist.

Setzen wir die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung zu Null $\varphi_u - \varphi_i = 0$, dann entspricht der erste Summand in den Gln. (8.155) bzw. (8.157) wegen $\cos(0) = 1$ der momentanen Wirkleistung in Gl. (8.146) und der zweite Summand verschwindet jeweils. Sind Strom und Spannung um $\pm\,\pi/2$ in der Phase gegeneinander verschoben, dann verschwindet der erste Summand und der zweite Summand vereinfacht sich auf die in den Gln. (8.149) bzw. (8.151) angegebenen Ausdrücke bei der Induktivität bzw. bei der Kapazität. Offenbar beschreibt der erste Summand in den Gln. (8.155) und (8.157) den momentanen Leistungsanteil, der im Zweipol irreversibel in eine andere Energieform (Wärme) umgewandelt wird und damit einer Wirkleistung entspricht, während der zweite Summand den momentanen Leistungsanteil beschreibt, der für die Änderung der im magnetischen bzw. elektrischen Feld gespeicherten Energie verantwortlich ist und damit einer Blindleistung entspricht.

In dem allgemeinen Fall, bei dem an dem linearen Zweipol Strom und Spannung entsprechend der Beziehung (8.143) gegeben sind und die Phasenverschiebung zwischen diesen beiden Größen in dem Bereich $-\pi/2 \le \varphi_u - \varphi_i \le +\pi/2$ liegt, kann die (mittlere) Wirkleistung entsprechend Gl. (7.8) durch Integration der Ausdrücke (8.155) bzw. (8.157) über eine volle Periode berechnet werden. Wegen $\cos(\varphi) = \cos(-\varphi)$ ist dieser Wert unabhängig davon, ob der Strom vor- oder nacheilt

$$P = UI\cos(\varphi_u - \varphi_i)\,. \quad (8.158)$$

Die Wirkleistung hängt im allgemeinen Fall sowohl von den Amplituden von Strom und Spannung als auch von dem Phasenwinkel zwischen diesen beiden Größen ab. Der üblicherweise mit λ abgekürzte Faktor $\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \lambda$ wird als **Leistungsfaktor** bezeichnet. Besteht der Zweipol nur aus ohmschen Widerständen, dann gilt $\varphi_u = \varphi_i$ und der Leistungsfaktor besitzt den Wert $\lambda = \cos(0) = 1$. Bei einem reinen Blindwiderstand ist der Phasenwinkel $\varphi_u - \varphi_i = \pm\pi/2$ und für den Leistungsfaktor gilt $\lambda = \cos(\pm\pi/2) = 0$.

In Anlehnung an die Definition der Wirkleistung (8.158), diese entspricht der Amplitude der um den Mittelwert schwingenden, momentanen Wirkleistung, bezeichnet man die Amplitude bei dem zweiten Summanden

$$Q = UI\sin(\varphi_u - \varphi_i) \quad (8.159)$$

als **Blindleistung**. Während die Wirkleistung an einem aus den Komponenten R, L und C aufgebauten Zweipol immer positiv ist, kann der Wert der in Gl. (8.159) definierten Blindleistung sowohl positiv als auch negativ werden, je nachdem, ob sich der Zweipol induktiv oder kapazitiv verhält und die Spannung gegenüber dem Strom vor- oder nacheilt.

Bei einer genaueren Analyse der beiden Gln. (8.155) und (8.157) stellt man fest, dass die Aufteilung der Momentanleistung $p(t)$ in die beiden Summanden für die bereits betrachteten Sonderfälle von Widerstand $\varphi_u - \varphi_i = 0$, Induktivität $\varphi_u - \varphi_i = \pi/2$ und Kapazität $\varphi_u - \varphi_i = -\pi/2$ zwar identisch ist, dass aber jeder andere mögliche Phasenunterschied zwischen Strom und Spannung zu einer unterschiedlichen Aufteilung führt. Die beiden zeitabhängigen Summanden in den genannten Gleichungen besitzen zwar gleiche Amplituden, die Phasen sind aber unterschiedlich.

Bevor wir die Frage näher untersuchen, welcher der beiden Ausdrücke die an einem Widerstand in Wärme umgesetzte Leistung zu jedem Zeitpunkt richtig beschreibt, stellen wir die beiden Gleichungen noch einmal gemeinsam dar. Mit den in den Gln. (8.158) und (8.159) definierten Begriffen gelten die Beziehungen

$$p(t) = P\begin{matrix}\left[1+\cos\left(2\omega t + 2\varphi_u\right)\right] \\ \left[1+\cos\left(2\omega t + 2\varphi_i\right)\right]\end{matrix} \pm Q \begin{matrix}\sin\left(2\omega t + 2\varphi_u\right) \\ \sin\left(2\omega t + 2\varphi_i\right)\end{matrix} . \tag{8.160}$$

Die weitere Untersuchung führen wir an einem konkreten Beispiel durch. Für die in ▶Abb. 8.62 dargestellte Reihenschaltung aus einem Widerstand R und einer Induktivität L sind bereits alle benötigten Zusammenhänge in Beispiel 8.2 abgeleitet. Wir wählen das Impedanzverhältnis $\omega L / R = \sqrt{3}$ und erhalten mit Gl. (8.53) eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung von $\varphi_u - \varphi_i = \arctan\sqrt{3} = \pi/3$ bzw. 60°. Mit einer angenommenen Spannungsamplitude $\hat{u} = 2\,\mathrm{V}$ und einem Widerstand $R = 1\,\Omega$ stellt sich nach Gl. (8.53) eine Stromamplitude $\hat{i} = 1\,\mathrm{A}$ ein. Die zugehörigen zeitabhängigen Verläufe sind in Abb. 8.62 dargestellt.

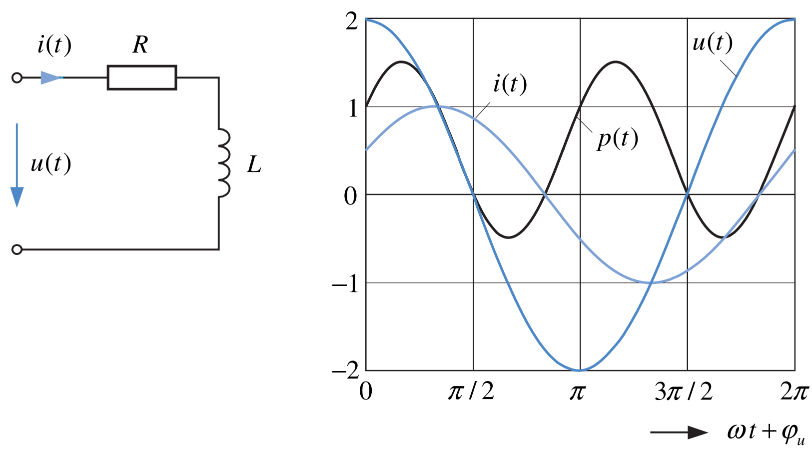


Abbildung 8.62: Signalverläufe an einer *RL*-Reihenschaltung bei Wechselspannung

Für die zeitabhängige Leistung am Widerstand muss gelten

$$p_R(t) = i^2(t)\cdot R = 1\,\mathrm{W}\cdot\cos^2\left(\omega t + \varphi_i\right) \overset{(\mathrm{H.3})}{=} \frac{1}{2}\mathrm{W}\left[1+\cos\left(2\omega t + 2\varphi_i\right)\right] . \tag{8.161}$$

Mit $P = (2\,\mathrm{V}/\sqrt{2})\cdot(1\,\mathrm{A}/\sqrt{2})\cos(\pi/3) = 1/2\,\mathrm{W}$ ist der erste Ausdruck in der unteren Zeile der Gl. (8.160) identisch zur Gl. (8.161). Dieser beschreibt somit richtig die zeitabhängigen Verluste im Widerstand. Der entsprechende Ausdruck in der oberen Zeile ist demgegenüber um $2(\varphi_\mathrm{u} - \varphi_\mathrm{i}) = 2\pi/3$ in der Phase verschoben. Wie lässt sich dieser Sachverhalt nun verstehen? Betrachten wir dazu das Zeigerdiagramm in ▶Abb. 8.63, in dem der Strom zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einem beliebigen Phasenwinkel φ_i und die Spannung zum gleichen Zeitpunkt um $\pi/3$ voreilend dargestellt sind. In der betrachteten Reihenschaltung werden beide Komponenten vom gleichen Strom durchflossen. Am Widerstand ist die Spannung u_R in Phase mit dem Strom und an der Induktivität ist die Spannung u_L um $\pi/2$ voreilend. Wir müssen also die Spannung $u(t)$ zerlegen in die beiden senkrecht aufeinander stehenden Komponenten u_R mit der Zeigerlänge $\hat{u}\cos(\varphi_u - \varphi_i)$ und u_L mit der Zeigerlänge $\hat{u}\sin(\varphi_u - \varphi_i)$

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) = \hat{u}\cos(\varphi_u - \varphi_i)\cos(\omega t + \varphi_i) + \hat{u}\sin(\varphi_u - \varphi_i)\cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \hat{u}\cos(\varphi_u - \varphi_i)\cos(\omega t + \varphi_i) - \hat{u}\sin(\varphi_u - \varphi_i)\sin(\omega t + \varphi_i) = u_R(t) + u_L(t)\,. \qquad (8.162)
\end{aligned}
$$

Das Produkt dieser beiden Komponenten mit dem Strom (8.143) ist identisch zu der unteren Zeile in Gl. (8.160). Wir können also feststellen, dass die Zerlegung der Momentanleistung in die beiden Anteile, in denen die zeitabhängigen Funktionen die Phasenverschiebung des Stromes φ_i im Argument enthalten, auch die Aufteilung der Eingangsleistung auf die beiden Komponenten Widerstand und Induktivität bei der Reihenschaltung zu jedem Zeitpunkt richtig wiedergibt. Diese Aufteilung der Momentanleistung ist ebenfalls in der Abb. 8.63 dargestellt. Ein Vergleich der Abb. 8.62 und 8.63 zeigt, dass der Maximalwert der am Widerstand entstehenden Verluste $p_R(t)$ zeitgleich mit dem Maximalwert des Stromes auftritt.

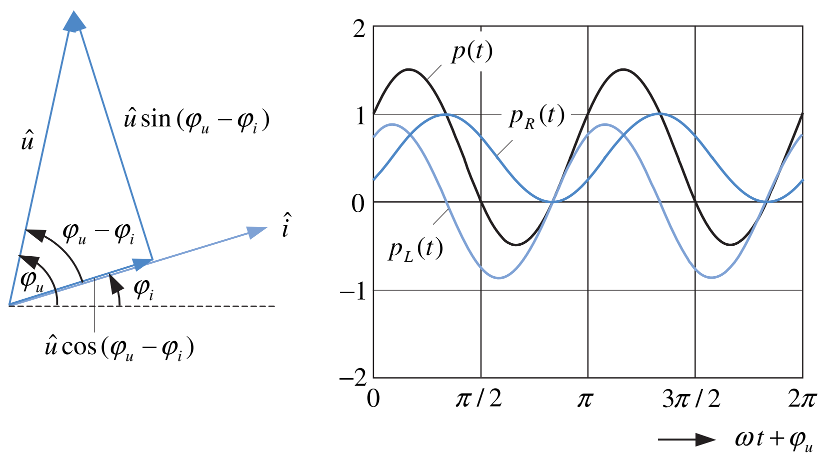


Abbildung 8.63: Zeigerdiagramm und Aufteilung der Momentanleistung für die *RL*-Reihenschaltung

Damit ist es auch naheliegend zu vermuten, dass die obere Zeile in Gl. (8.160) die Verhältnisse bei der Parallelschaltung richtig beschreibt. Wir überprüfen das, indem wir die bisherige Reihenschaltung bei der gleichen Frequenz durch eine äquivalente Parallelschaltung aus einem Widerstand und einer Induktivität entsprechend den Beziehungen in Abb. 8.18 ersetzen. Strom und Spannung an den Eingangsklemmen nach Gl. (8.143) und auch die Leistung $p(t)$ sind damit unverändert gegenüber dem bisher betrachteten Fall. Da jetzt die Spannung an beiden Komponenten gleich ist, muss der Strom in einen Anteil i_R in Phase zur Spannung und in einen um $\pi/2$ nacheilenden Anteil i_L zerlegt werden. Mit den in ▶Abb. 8.64 bereits angegebenen Zeigerlängen $\hat{i}\cos(\varphi_u - \varphi_i)$ für i_R und $\hat{i}\sin(\varphi_u - \varphi_i)$ für i_L gilt die Zerlegung

$$\begin{aligned} i(t) &= \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) = \hat{i}\cos(\varphi_u - \varphi_i)\cos(\omega t + \varphi_u) + \hat{i}\sin(\varphi_u - \varphi_i)\cos\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \hat{i}\cos(\varphi_u - \varphi_i)\cos(\omega t + \varphi_u) + \hat{i}\sin(\varphi_u - \varphi_i)\sin(\omega t + \varphi_u) = i_R(t) + i_L(t)\,, \end{aligned} \tag{8.163}$$

die mit der Spannung (8.143) multipliziert der oberen Zeile der Gl. (8.160) entspricht. Diese Aufteilung der Momentanleistung für die Parallelschaltung ist ebenfalls in der Abb. 8.64 dargestellt. In diesem Fall tritt der Maximalwert der am Widerstand entstehenden Verluste $p_R(t)$ zeitgleich mit dem Maximalwert der Spannung auf.

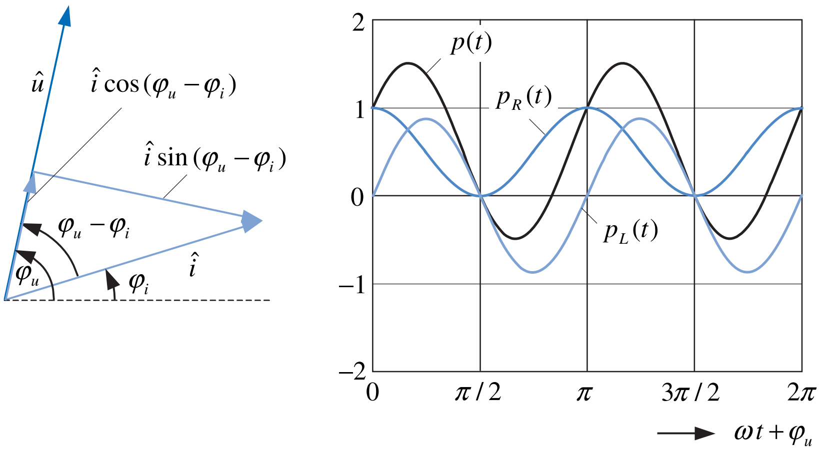


Abbildung 8.64: Zeigerdiagramm und Aufteilung der Momentanleistung für die *RL*-Parallelschaltung

Merke

Besteht der Zweipol aus der Reihenschaltung eines Widerstandes mit einer Reaktanz, dann sind die zeitabhängigen Verluste im Widerstand in Phase mit dem Quadrat des Stromes. Bei der Parallelschaltung aus einem Widerstand und einer Reaktanz sind die zeitabhängigen Verluste im Widerstand in Phase mit dem Quadrat der Spannung.

Betrachten wir noch einmal die beiden Zeigerdiagramme in den Abb. 8.63 und 8.64. Werden alle drei Seiten des aus den Spannungen gebildeten Dreiecks in Abb. 8.63 mit dem Faktor $\hat{i}/2$ oder aber alle drei Seiten des aus den Strömen gebildeten Dreiecks in Abb. 8.64 mit dem Faktor $\hat{u}/2$ multipliziert, dann entsprechen die beiden Katheten des jeweils neu entstehenden Dreiecks der Wirkleistung und der Blindleistung. Die Hypotenuse

$$S = U\,I = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{8.164}$$

wird als **Scheinleistung** S bezeichnet. Sie entspricht dem Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom ohne Berücksichtigung des Leistungsfaktors. Die Bezeichnung Scheinleistung hängt damit zusammen, dass sie keine Leistung im physikalischen Sinne darstellt, da Strom und Spannung zu verschiedenen Zeitpunkten auftreten.

Mit dieser Definition kann der Leistungsfaktor auch aus dem Verhältnis von Wirkleistung zu Scheinleistung berechnet werden

$$\lambda = \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{P}{S}\ . \tag{8.165}$$

Die Einheiten für die Leistungen P, Q und S ergeben sich immer aus dem Produkt von $[U]\cdot[I] = \mathrm{V}\cdot\mathrm{A}$. Um Verwechslungen bei der Leistungsangabe auf elektrischen Geräten zu vermeiden, werden daher vereinbarungsgemäß die folgenden Einheiten verwendet:

Tabelle 8.5

Leistungseinheiten

	Formel	Einheit
Wirkleistung	$P = U\,I\cos(\varphi_u - \varphi_i)$	W (Watt)
Blindleistung	$Q = U\,I\sin(\varphi_u - \varphi_i)$	VAr (Voltampere, reaktiv)
Scheinleistung	$S = U\,I = \frac{1}{2}\hat{u}\,\hat{i}$	VA (Voltampere)

8.8.4 Komplexe Leistung

In den bisherigen Formeln wurden die verschiedenen Leistungen aus den zeitabhängigen Strom- und Spannungsverläufen berechnet. Da bei den Wechselgrößen üblicherweise mit komplexen Amplituden gerechnet wird, sei hier der Begriff der komplexen Leistung eingeführt. Sind die komplexen Amplituden von Strom $\underline{\hat{i}}$ und Spannung $\underline{\hat{u}}$ nach Gl. (8.18) bekannt und kennzeichnet $\underline{\hat{i}}^*$ den konjugiert komplexen Wert von $\underline{\hat{i}}$, dann wird die komplexe Leistung definiert durch den Ausdruck

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \frac{1}{2}\underline{\hat{u}}\,\underline{\hat{i}}^* \overset{(8.18)}{=} \frac{1}{2}\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\left(\hat{i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\right)^* = \frac{1}{2}\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\,\hat{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_i} = U\,I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= U\,I\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \mathrm{j}\,U\,I\sin(\varphi_u - \varphi_i) = P + \mathrm{j}Q\ .\end{aligned} \tag{8.166}$$

Der Realteil der komplexen Leistung[7] entspricht der Wirkleistung, der Imaginärteil entspricht der Blindleistung. Nach Gl. (8.164) ist der Betrag der komplexen Leistung gleich der Scheinleistung

$$\left|\underline{S}\right| = \left|P + \mathrm{j}Q\right| = \sqrt{P^2 + Q^2} = S\,. \tag{8.167}$$

Die komplexe Leistung stellt offenbar eine Rechengröße dar, aus der sowohl Wirk-, Blind- als auch Scheinleistung berechnet werden können.

Beispiel 8.4: Komplexe Leistung am Widerstand

Ein Strom mit der komplexen Amplitude $\hat{\underline{i}}$ fließt durch einen ohmschen Widerstand R. Welche Leistung wird an dem Widerstand in Wärme umgewandelt?

Die Wirkleistung an R kann nach Gl. (8.166) in der folgenden Weise berechnet werden

$$P = \mathrm{Re}\left\{\underline{S}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\hat{\underline{u}}\,\hat{\underline{i}}^*\right\} \overset{(8.28)}{=} \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}R\,\hat{\underline{i}}\,\hat{\underline{i}}^*\right\} \overset{(\mathrm{E}.14)}{=} \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}R\left|\hat{\underline{i}}\right|^2\right\} = \frac{1}{2}R\left|\hat{\underline{i}}\right|^2. \tag{8.168}$$

Die Realteilbildung entfällt, da am Widerstand keine Blindleistung entsteht und das Argument bereits reell ist. Zur Berechnung der Verluste stehen somit die beiden Möglichkeiten

$$P = \frac{1}{2}R\left|\hat{\underline{i}}\right|^2 = R\,I^2 \quad \text{bzw.} \quad P = \frac{1}{2}\frac{\left|\hat{\underline{u}}\right|^2}{R} = \frac{1}{R}U^2 \tag{8.169}$$

zur Verfügung, in Übereinstimmung mit der Gl. (7.13).

Allgemein lässt sich die komplexe Leistung an einer Impedanz $\underline{Z}$ bzw. an einer Admittanz $\underline{Y}$ durch die folgenden Zusammenhänge darstellen

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \frac{1}{2}\hat{\underline{u}}\,\hat{\underline{i}}^* \overset{(8.22)}{=} \frac{1}{2}\underline{Z}\,\hat{\underline{i}}\,\hat{\underline{i}}^* \overset{(\mathrm{E}.14)}{=} \frac{1}{2}\underline{Z}\left|\hat{\underline{i}}\right|^2 = \underline{Z}\,I^2 = \frac{1}{\underline{Y}}I^2 \\ &= \frac{1}{2}\hat{\underline{u}}\frac{\hat{\underline{u}}^*}{\underline{Z}^*} = \frac{1}{\underline{Z}^*}U^2 = \underline{Y}^*\,U^2\,.\end{aligned} \tag{8.170}$$

7 Die komplexe Leistung könnte ebenso als das Produkt von der komplexen Amplitude des Stromes mit dem konjugiert komplexen Wert der Spannungsamplitude definiert werden. Bei der oben gewählten Definition ergibt die induktive Blindleistung einen positiven, die kapazitive Blindleistung einen negativen Imaginärteil.

8.9 Leistungsanpassung

In Kap. 3.7.2 haben wir die Frage nach der maximalen Leistungsabgabe an einen ohmschen Verbraucher (Lastwiderstand R_L) in einem Gleichstromnetzwerk untersucht. Wir wollen jetzt die gleiche Frage für den verallgemeinerten Fall beantworten, bei dem der Verbraucher mit einer Impedanz $\underline{Z}_L = R_L + \mathrm{j}X_L$ an eine Wechselspannungsquelle $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t)$ mit einer Innenimpedanz $\underline{Z}_i = R_i + \mathrm{j}X_i$ angeschlossen ist. Das zugrunde liegende Schaltbild mit den komplexen Amplituden ist in ▶Abb. 8.65 dargestellt.

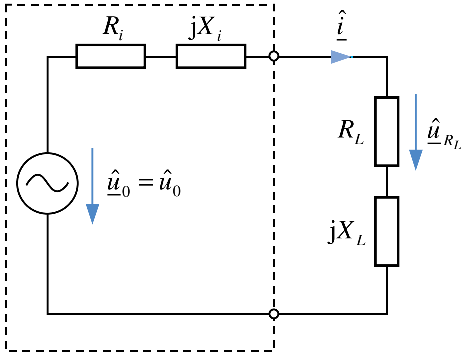


Abbildung 8.65: Zur Berechnung der maximalen Wirkleistung am Lastwiderstand

Wir wollen dabei zwei unterschiedliche Fälle betrachten, bei denen sich jeweils maximale Wirkleistung an R_L einstellen soll. Im ersten Fall wird angenommen, dass bei der Lastimpedanz sowohl R_L als auch X_L einstellbar sind, beim zweiten Fall besteht der Verbraucher nur aus einem veränderbaren Wirkwiderstand R_L und es gilt $X_L = 0$.

Mit der komplexen Amplitude für den Strom

$$\hat{\underline{i}} = \frac{\hat{u}_0}{R_i + R_L + \mathrm{j}(X_i + X_L)} \tag{8.171}$$

kann die Wirkleistung an R_L nach Gl. (8.169) berechnet werden

$$P = \frac{1}{2} R_L \left|\hat{\underline{i}}\right|^2 = \frac{\hat{u}_0^{\ 2}}{2} \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2} \,. \tag{8.172}$$

Diese Leistung soll für die beiden zu betrachtenden Fälle einen Maximalwert annehmen.

8.9.1 Lastimpedanz mit einstellbarem Wirk- und Blindwiderstand

Die Bedingung für X_L ist ohne Rechnung aus der Gleichung ablesbar. Die Leistung wird maximal, wenn der Nenner in Gl. (8.172) minimal wird, d.h. es muss gelten[8]

$$X_L = -X_i \,. \tag{8.173}$$

Die beiden Blindwiderstände müssen sich gegenseitig kompensieren. Wir haben hier die gleiche Situation wie bei dem Serienschwingkreis in Kap. 8.5.1, der bei seiner Resonanzfrequenz betrieben wird (Vorsicht: An der Innenimpedanz der Quelle und am Verbraucher kann Spannungsüberhöhung auftreten).

Für die weitere Betrachtung reduziert sich das Netzwerk auf die ohmschen Widerstände. Die Forderung, dass der verbleibende Ausdruck

$$P = \frac{\hat{u}_0^{\,2}}{2}\frac{R_L}{\left(R_i + R_L\right)^2} \tag{8.174}$$

abhängig von R_L maximal werden soll, führt in Übereinstimmung mit der Ableitung bei den Gleichstromnetzwerken wieder auf die Bedingung

$$R_L = R_i \,. \tag{8.175}$$

Aus der Zusammenfassung der beiden Gleichungen (8.173) und (8.175) folgt

$$\boxed{\underline{Z}_L = \underline{Z}_i^{\,*}} \,. \tag{8.176}$$

Merke

Eine Wechselspannungsquelle mit der Innenimpedanz $\underline{Z}_i = R_i + \mathrm{j}X_i$ gibt die maximale Wirkleistung an einen Verbraucher ab, wenn dessen Impedanz $\underline{Z}_L$ dem konjugiert komplexen Wert der Innenimpedanz $\underline{Z}_L = \underline{Z}_i^{\,*}$ entspricht.

Die am Ausgang **verfügbare Wirkleistung** beträgt dann mit Gl. (8.172)

$$\boxed{P_{\max} = \frac{\hat{u}_0^{\,2}}{2}\frac{1}{4R_i} = \frac{U_0^{\,2}}{4R_i}} \,. \tag{8.177}$$

Diese Beziehung hat den gleichen Aufbau wie bei den Gleichstromnetzwerken, wobei jetzt allerdings U_0 den Effektivwert der Quellenspannung bezeichnet. Der Wirkungsgrad beträgt in diesem Arbeitspunkt wieder 50 %, d.h. die verbrauchte Leistung am Innenwiderstand R_i ist genauso groß wie die abgegebene Leistung am Lastwiderstand R_L.

Wird der Lastwiderstand in dem möglichen Wertebereich $0 \le R_L < \infty$ variiert, dann ändern sich auch die Ausgangsleistung und der Wirkungsgrad und zwar auf die gleiche Weise, wie es bei den Gleichstromnetzwerken in den Abb. 3.26 und 3.27 dargestellt ist.

8 Der mathematisch exakte Beweis lässt sich erbringen, wenn aus der Forderung $\mathrm{d}P/\mathrm{d}X_L = 0$ der Wert X_L bestimmt wird und die zweite Ableitung für diesen Wert kleiner Null wird $\mathrm{d}^2P/\mathrm{d}X_L^{\,2} < 0$.

8.9.2 Reiner Wirkwiderstand als Verbraucher

Der bisherigen Rechnung soll jetzt der Fall gegenübergestellt werden, dass der Verbraucher ausschließlich aus einem Wirkwiderstand besteht. Die maximale Wirkleistung in Abhängigkeit von dem Lastwiderstand $\underline{Z}_L = R_L$ erhält man aus der Forderung nach dem Verschwinden der ersten Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,R_L} \overset{(8.172)}{=} \frac{\hat{u}_0^{\,2}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,R_L}\frac{R_L}{\left(R_i+R_L\right)^2+X_i^{\,2}} \overset{!}{=} 0\,. \tag{8.178}$$

Die Ausführung der Differentiation liefert die Beziehung

$$\frac{\left(R_i+R_L\right)^2+X_i^{\,2}-2R_L\left(R_i+R_L\right)}{\left[\left(R_i+R_L\right)^2+X_i^{\,2}\right]^2} \overset{!}{=} 0\,, \tag{8.179}$$

in der der Zähler verschwinden muss

$$\left(R_i+R_L\right)^2+X_i^{\,2}-2R_L\left(R_i+R_L\right)=R_i^2-R_L^{\,2}+X_i^{\,2}\overset{!}{=}0\,. \tag{8.180}$$

Für den hier betrachteten Fall $X_L = 0$ erhalten wir aus der Forderung (8.180) das Ergebnis[9]

$$\underline{Z}_L = R_L = \sqrt{R_i^2+X_i^{\,2}} = \left|\underline{Z}_i\right|\,. \tag{8.181}$$

Merke

Eine Wechselspannungsquelle mit der Innenimpedanz $\underline{Z}_i = R_i + \mathrm{j}X_i$ gibt die maximale Leistung an einen ohmschen Widerstand R_L ab, wenn dieser einen Wert aufweist, der dem Betrag der Quellenimpedanz $\left|\underline{Z}_i\right|$ gleich ist.

Die am Lastwiderstand **verfügbare Wirkleistung** erhält man, wenn der Wert (8.181) in die Gl. (8.172) eingesetzt wird

$$P_{\max} = \frac{\hat{u}_0^{\,2}}{4}\frac{1}{R_i+\sqrt{R_i^2+X_i^{\,2}}} = \frac{U_0^{\,2}}{2}\frac{1}{R_i+\sqrt{R_i^2+X_i^{\,2}}}\,. \tag{8.182}$$

Dieser Wert ist geringer als bei der konjugiert komplexen Anpassung und zwar umso mehr, je größer der Blindwiderstand X_i wird. Bei $X_i = 0$ sind die beiden Ergebnisse (8.176) und (8.181) identisch.

9 Um zu überprüfen, ob es sich bei dem Ergebnis wirklich um ein Maximum handelt, muss die nochmalige Ableitung der Gl. (8.179) für den berechneten Lastwiderstand negativ sein. Diese Kontrolle sei dem Leser überlassen.

Beispiel 8.5: Wirkleistungsanpassung

Eine Wechselspannungsquelle besitzt bei der eingestellten Frequenz eine Impedanz $\underline{Z}_i = 50\,\Omega + \mathrm{j}20\,\Omega$. Welche Impedanz muss der Verbraucher haben, um aus der Quelle maximale Wirkleistung entnehmen zu können?

Bei einer Anpassung mit konjugiert komplexer Quellenimpedanz muss die positive Reaktanz der Quelle nach Gl. (8.173) mit einer negativen Reaktanz des Verbrauchers kompensiert werden. Die Last besteht also aus der Reihenschaltung von einem ohmschen Widerstand $R_L = 50\Omega$ nach Gl. (8.175) und einer Kapazität, die bei der gleichen Frequenz den betragsmäßig gleichen Blindwiderstand aufweist.

Besteht die Last lediglich aus einem angepassten ohmschen Widerstand, dann muss dieser nach Gl. (8.181) den Wert $R_L = |\underline{Z}_i|$ aufweisen. Die beiden unterschiedlichen Verbraucher sind in der ▶Abb. 8.66 eingetragen.

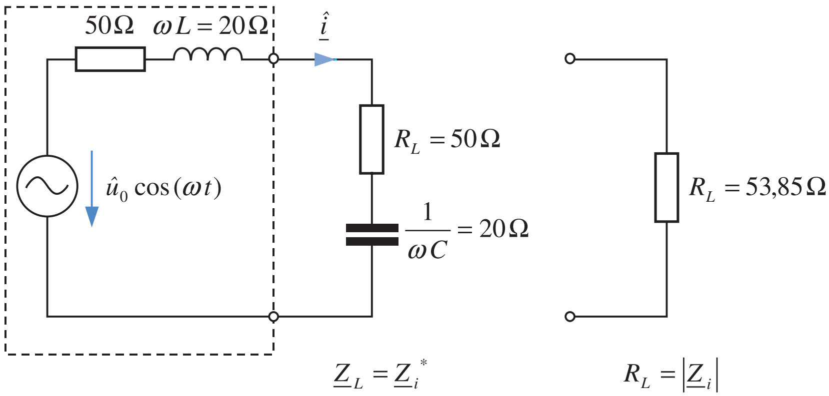


Abbildung 8.66: Zahlenbeispiel zur Wirkleistungsanpassung

8.10 Blindstromkompensation

Eine zur Leistungsanpassung vergleichbare Situation liegt vor, wenn ein Verbraucher mit einer fest vorgegebenen Impedanz an eine Quelle wie z.B. das 50-Hz-Versorgungsnetz angeschlossen werden soll. Wir wählen als Beispiel einen Motor, dessen Impedanz aus einem ohmschen und einem induktiven Anteil besteht. Zur Vereinfachung soll die Impedanz der Quelle, die in der Praxis klein ist gegenüber der Lastimpedanz, bei der Betrachtung vernachlässigt werden. Das Netzwerk ist mit dem zugehörigen Zeigerdiagramm in ▶Abb. 8.67 dargestellt. Der Strom eilt bei der *RL*-Reihenschaltung der Spannung nach (vgl. Abb. 8.16).

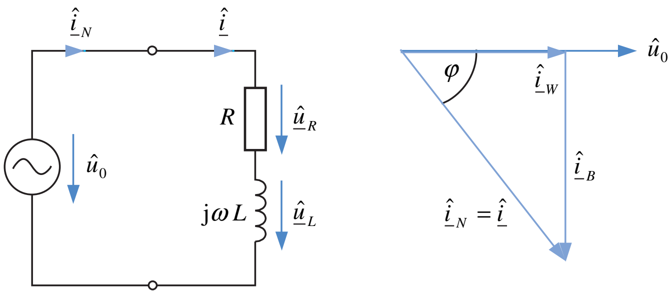


Abbildung 8.67: Beispiel zur Blindstromkompensation

Die Zerlegung des von der Quelle gelieferten Stromes $\underline{\hat{i}}$ in einen Wirkanteil $\underline{\hat{i}}_W = \hat{i}_W$, der sich in Phase mit der Quellenspannung befindet, und in einen Blindanteil $\underline{\hat{i}}_B = -\mathrm{j}\left|\underline{\hat{i}}_B\right|$, der der Quellenspannung um $\pi/2$ nacheilt, entspricht unmittelbar der Zerlegung der von der Quelle abgegebenen komplexen Leistung in ihren Wirkanteil und ihren Blindanteil

$$\underline{S} = P + \mathrm{j}Q = \frac{1}{2}\hat{u}_0\,\underline{\hat{i}}^* = \frac{1}{2}\hat{u}_0\left(\hat{i}_W + \mathrm{j}\left|\underline{\hat{i}}_B\right|\right) = \frac{1}{2}\hat{u}_0\left|\underline{\hat{i}}\right|(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)\,. \tag{8.183}$$

Zur Übertragung der gleichen Wirkleistung von der Quelle zum Verbraucher wäre ein Strom mit der Amplitude $\hat{i}_W$ ausreichend. Infolge des geringen Leistungsfaktors muss die Quelle aber zusätzliche Blindenergie zur Verfügung stellen und die deutlich größere Stromamplitude $\left|\underline{\hat{i}}\right|$ belastet in erhöhtem Maße die Leitungen und Transformatoren in den Verteilungsnetzen.

Das Ziel besteht also darin, den Winkel φ in Abb. 8.67 durch weitestgehende Kompensation der Blindströme möglichst klein zu halten, so dass für den Leistungsfaktor näherungsweise $\cos\varphi \approx \cos 0 = 1$ gilt. Dies lässt sich bei dem betrachteten Beispiel durch eine parallel geschaltete Kapazität erreichen, deren Strom der Quellenspannung um $\pi/2$ voreilt. Das erweiterte Netzwerk ist mit dem dazugehörigen Zeigerdiagramm in ▶Abb. 8.68 dargestellt.

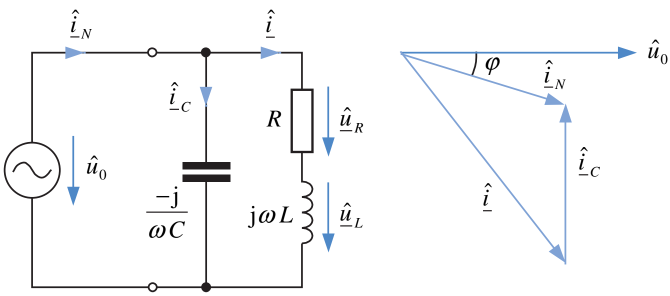


Abbildung 8.68: Teilkompensiertes Netzwerk

Der Netzstrom $\underline{\hat{i}}_N$ wird jetzt bei gleicher Leistung am Widerstand wesentlich geringer. Zur vollständigen Kompensation der Blindströme werden in der Praxis oft sehr große Kapazitäten benötigt. Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit wird daher in den meisten Fällen nur eine Teilkompensation, wie in der Abb. 8.68 dargestellt, durchgeführt.

Merke

Durch gegenseitige Kompensation induktiver und kapazitiver Blindleistung kann der Leistungsfaktor cos φ vergrößert werden. Die geringeren Blindströme auf den Versorgungsleitungen erlauben eine bessere Ausnutzung der Transformatoren und führen zu geringeren Verlusten in den Leitungen.

8.11 Leistung beim Drehstromsystem

In diesem Kapitel wollen wir die Fragen im Zusammenhang mit der Leistungsübertragung im Drehstromsystem untersuchen. Die drei um jeweils 120° phasenverschobenen Spannungen auf der Generatorseite[10] werden durch die Beziehungen

$$u_1(t) = \hat{u}\,\sin\omega t\,,\quad u_2(t) = \hat{u}\,\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right),\quad u_3(t) = \hat{u}\,\sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \tag{8.184}$$

beschrieben. Die dem Verbraucher insgesamt zugeführte Leistung entspricht der Summe der Leistungen an den drei Impedanzen. Mit den Effektivwerten für Strom I_V und Spannung U_V am Verbraucher und der Phasenverschiebung $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ erhalten wir mit Gl. (8.158) die allgemeine Darstellung

$$P = U_{V1} I_{V1}\cos\varphi_1 + U_{V2} I_{V2}\cos\varphi_2 + U_{V3} I_{V3}\cos\varphi_3 \tag{8.185}$$

für die gesamte Wirkleistung am Verbraucher.

8.11.1 Sternschaltung mit Sternpunktleiter

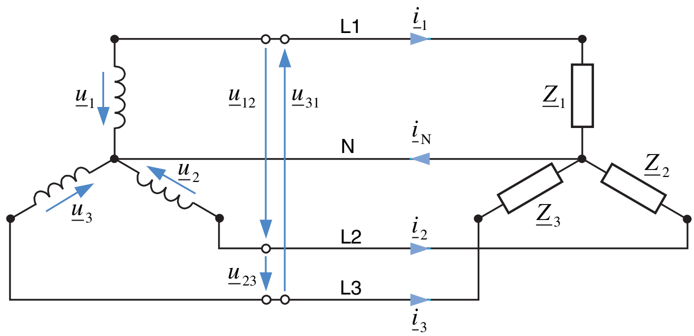


Abbildung 8.69: Leistungsübertragung bei der Vierleiter-Sternschaltung

Beim Drehstrom-Vierleitersystem nach ▶Abb. 8.69 liegen die Strangspannungen (8.184) unmittelbar an den Impedanzen des Verbrauchers, so dass wir mit den jeweils gleichen Effektivwerten für die Spannungen $U = \hat{u}/\sqrt{2}$ den Ausdruck

10 Wir werden in dem folgenden Abschnitt die Generatorspannungen nicht durch die Symbole für die Spannungsquellen darstellen, sondern der in der Literatur üblichen Vorgehensweise folgend weiterhin die Symbole für die spannungserzeugenden Transformatorwicklungen verwenden.

$$P = U\left(I_{V1}\cos\varphi_1 + I_{V2}\cos\varphi_2 + I_{V3}\cos\varphi_3\right) \tag{8.186}$$

für die Verbraucherleistung erhalten. Für den Sonderfall gleicher Impedanzen, man spricht von **symmetrischer Belastung**, sind sowohl die Amplituden der Ströme als auch die Phasenwinkel gleich und das Ergebnis nimmt eine sehr einfache Form an

$$P = 3U\,I\cos\varphi\,. \tag{8.187}$$

Bevor wir zur Sternschaltung ohne Sternpunktleiter übergehen, wollen wir uns zunächst noch die komplexen Amplituden der Ströme und Spannungen für die Schaltung in Abb. 8.69 ansehen. Die zeitabhängigen Spannungen (8.184) besitzen nach Tab. 8.1 die komplexen Amplituden

$$\underline{\hat{u}}_1 = \hat{u}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}, \quad \underline{\hat{u}}_2 = \hat{u}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad \underline{\hat{u}}_3 = \hat{u}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)}. \tag{8.188}$$

Diese sind in dem Teilbild a der ▶Abb. 8.70 dargestellt. Mithilfe des markierten Dreiecks lässt sich aus diesem Diagramm unmittelbar die bereits in (6.77) abgeleitete Beziehung

$$\left|\underline{\hat{u}}_{12}\right| = 2\left|\underline{\hat{u}}_2\right|\cos\alpha = 2\hat{u}\cos 30° = \sqrt{3}\,\hat{u} \tag{8.189}$$

zwischen den Amplituden der Außenleiterspannungen und den Strangspannungen ablesen. Auch das Voreilen der Spannung $\underline{\hat{u}}_{12}$ gegenüber der Spannung $\underline{\hat{u}}_1$ um $\pi/6$ bzw. 30° lässt sich der Abbildung entnehmen. Wegen der in Abb. 8.69 vorgegebenen Zusammenschaltung der Strangspannungen wählt man üblicherweise die in Abb. 8.70b angegebene Darstellung, die durch einfache Parallelverschiebung der einzelnen Zeiger aus dem Teilbild a entsteht. Die Amplituden und Phasenbeziehungen werden dabei nicht verändert.

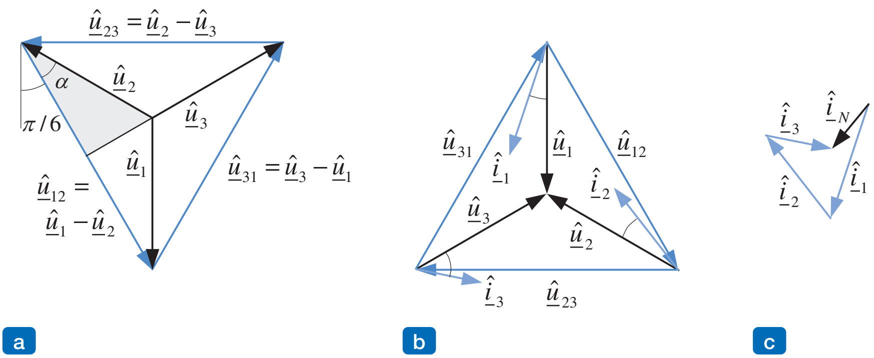


Abbildung 8.70: Komplexe Amplituden der Ströme und Spannungen

Bestehen die Impedanzen des Verbrauchers aus ohmschen Widerständen und Induktivitäten, dann sind die Ströme gegenüber den Spannungen nacheilend und die Stromzeiger haben je nach Amplitude und Phasenverschiebung z.B. die in Abb. 8.70b eingetragenen Werte. Im allgemeinen Fall sind die Stromamplituden unterschiedlich groß und die Phasenverschiebungen zwischen den Strömen betragen nicht mehr zwangsläufig 120°. Aus dem Kirchhoff'schen Knotensatz $\underline{\hat{i}}_1 + \underline{\hat{i}}_2 + \underline{\hat{i}}_3 = \underline{\hat{i}}_N$ kann der Strom $\underline{\hat{i}}_N$ im Neutralleiter entsprechend Abb. 8.70c direkt angegeben werden. Bei symmetrischer Belastung bilden die drei Außenleiterströme ein gleichseitiges Dreieck und der Strom $\underline{\hat{i}}_N$ verschwindet.

8.11.2 Sternschaltung ohne Sternpunktleiter

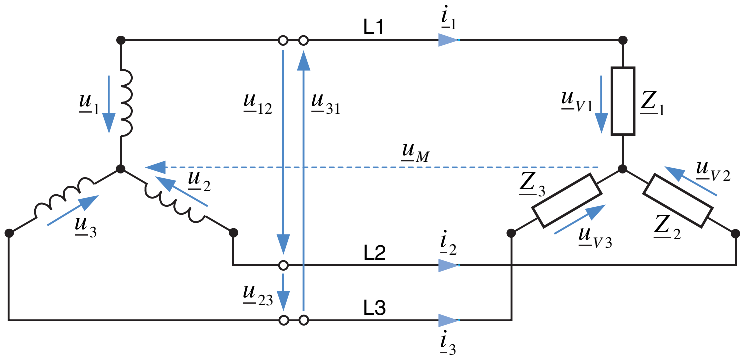


Abbildung 8.71: Leistungsübertragung bei der Dreileiter-Sternschaltung

Bei symmetrischer Belastung gibt es keinen Unterschied zu der Schaltungsanordnung mit Sternpunktleiter. Bei verschwindendem Strom $\underline{\hat{i}}_N$ kann auf den Neutralleiter verzichtet werden, ohne Konsequenzen für das Verhalten der Schaltung. Wir können uns also auf den Fall einer unsymmetrischen Belastung beschränken. Die Strangspannungen auf der Generatorseite werden durch den Wegfall des Sternpunktleiters nicht beeinflusst. Da wir die Innenwiderstände der Spannungsquellen und auch die Impedanzen der Zuleitungen vernachlässigen, sind die Außenleiterspannungen beim Verbraucher unverändert gegenüber der Schaltung in Abb. 8.69. Zur Berechnung der Ströme und Spannungen an den drei Zweipolen werden insgesamt sechs Gleichungen benötigt. Mit den Beziehungen an den Impedanzen

$$\underline{\hat{i}}_1 = \frac{\underline{\hat{u}}_{V1}}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{\hat{i}}_2 = \frac{\underline{\hat{u}}_{V2}}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{\hat{i}}_3 = \frac{\underline{\hat{u}}_{V3}}{\underline{Z}_3} \tag{8.190}$$

können die Ströme durch die Spannungen ausgedrückt werden. Für die verbleibenden drei Unbekannten stehen die Knotenregel

$$\underline{\hat{i}}_1 + \underline{\hat{i}}_2 + \underline{\hat{i}}_3 = 0 \tag{8.191}$$

und zwei der folgenden drei Maschenumläufe

$$\underline{\hat{u}}_{12} = \underline{\hat{u}}_{V1} - \underline{\hat{u}}_{V2}, \quad \underline{\hat{u}}_{23} = \underline{\hat{u}}_{V2} - \underline{\hat{u}}_{V3}, \quad \underline{\hat{u}}_{31} = \underline{\hat{u}}_{V3} - \underline{\hat{u}}_{V1} \tag{8.192}$$

zur Verfügung (da die Summe der drei Außenleiterspannungen verschwindet, sind nur zwei der in Gl. (8.192) angegebenen Gleichungen linear unabhängig, vgl. Kap. 3.9).

Infolge der ungleichen Verbraucherspannungen verschiebt sich das Potential im Sternpunkt des Verbrauchers, d.h. es tritt eine Spannung $\underline{\hat{u}}_M$ von dem Sternpunkt des

Verbrauchers zu dem Sternpunkt des Generators auf (▶Abb. 8.71). Wegen der verschwindenden Stromsumme (8.191) kann die Gl. (8.190) zunächst in der Form

$$\frac{\underline{\hat{u}}_{V1}}{\underline{Z}_1}+\frac{\underline{\hat{u}}_{V2}}{\underline{Z}_2}+\frac{\underline{\hat{u}}_{V3}}{\underline{Z}_3}=\frac{\underline{\hat{u}}_1-\underline{\hat{u}}_M}{\underline{Z}_1}+\frac{\underline{\hat{u}}_2-\underline{\hat{u}}_M}{\underline{Z}_2}+\frac{\underline{\hat{u}}_3-\underline{\hat{u}}_M}{\underline{Z}_3}=0 \tag{8.193}$$

geschrieben werden, deren Auflösung nach $\underline{\hat{u}}_M$ das folgende Ergebnis liefert

$$\underline{\hat{u}}_M=\frac{\underline{\hat{u}}_1\underline{Y}_1+\underline{\hat{u}}_2\underline{Y}_2+\underline{\hat{u}}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}\,. \tag{8.194}$$

Die in dieser Gleichung auftretenden komplexen Amplituden der Strangspannungen sind aus Gl. (8.188) bekannt.

Beispiel 8.6: Unsymmetrischer Verbraucher in Sternschaltung

Zur Verdeutlichung der Unterschiede bei den Sternschaltungen mit bzw. ohne Sternpunktleiter betrachten wir ein einfaches Zahlenbeispiel. Drei Heizwiderstände $R_1=1\text{k}\Omega$, $R_2=0{,}75\text{k}\Omega$ und $R_3=0{,}5\text{k}\Omega$ sollen an das Drehstromnetz mit der Strangspannung $\hat{u}=\sqrt{2}\cdot 230\,\text{V}$ angeschlossen werden. Zu bestimmen sind die Leistungen an den Heizwiderständen für die beiden Fälle mit bzw. ohne Sternpunktleiter.

a) *Mit Sternpunktleiter*:

In diesem Fall sind die Spannungen an den Widerständen bekannt und die Gesamtleistung ergibt sich zu

$$\begin{aligned}P&=\frac{U^2}{R_1}+\frac{U^2}{R_2}+\frac{U^2}{R_3}=\frac{(230\,\text{V})^2}{1000\,\Omega}+\frac{(230\,\text{V})^2}{750\,\Omega}+\frac{(230\,\text{V})^2}{500\,\Omega}\\&=52{,}9\,\text{W}+70{,}5\,\text{W}+105{,}8\,\text{W}=229{,}2\,\text{W}\,.\end{aligned} \tag{8.195}$$

Für die komplexe Amplitude des Stromes im Neutralleiter erhalten wir nach Zusammenfassung der Summanden das Ergebnis

$$\begin{aligned}\underline{\hat{i}}_N&=\underline{\hat{i}}_1+\underline{\hat{i}}_2+\underline{\hat{i}}_3=\frac{\underline{\hat{u}}_1}{R_1}+\frac{\underline{\hat{u}}_2}{R_2}+\frac{\underline{\hat{u}}_3}{R_3}\overset{(8.188)}{=}\frac{\hat{u}}{R_1}e^{-j\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{4}{3}e^{-j\frac{2\pi}{3}}+2e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)\\&=\frac{\hat{u}}{R_1}e^{-j\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{2-j\sqrt{3}}{3}\right)=0{,}287\,\text{A}\,e^{+j\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\,.\end{aligned} \tag{8.196}$$

Die komplexen Zeiger für die Ströme und Spannungen sind in ▶Abb. 8.72 für den betrachteten Fall dargestellt. Die Ströme in den Widerständen sind in Phase zu den Strangspannungen und somit gegeneinander um jeweils 120° phasenverschoben. Der Strom im Sternpunktleiter wird in diesem Beispiel allein durch die unterschiedlichen Amplituden der Teilströme verursacht.

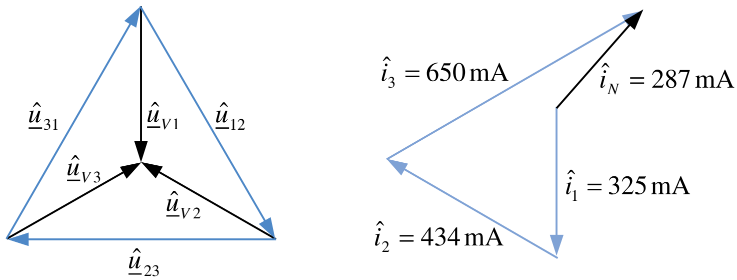


Abbildung 8.72: Komplexe Amplituden der Ströme und Spannungen

b) *Ohne Sternpunktleiter*:

Im ersten Schritt wird die Spannung $\hat{\underline{u}}_M$ zwischen den beiden Sternpunkten berechnet. Mit den Strangspannungen aus Gl. (8.188) und den angegebenen Widerstandswerten liefert die Gl. (8.194) das Ergebnis

$$\hat{\underline{u}}_M = 230\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} \frac{1/R_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}/R_2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{3}}/R_3}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}\,\mathrm{V} = (43{,}3 + \mathrm{j}50)\,\mathrm{V}\,, \tag{8.197}$$

mit dessen Hilfe die Effektivwerte der einzelnen Verbraucherspannungen bestimmt werden können

$$\begin{matrix} \hat{\underline{u}}_{V1} = \hat{\underline{u}}_1 - \hat{\underline{u}}_M & & U_{V1} = |\hat{\underline{u}}_{V1}|/\sqrt{2} = 267{,}1\,\mathrm{V} \\ \hat{\underline{u}}_{V2} = \hat{\underline{u}}_2 - \hat{\underline{u}}_M & \rightarrow & U_{V2} = |\hat{\underline{u}}_{V2}|/\sqrt{2} = 243{,}2\,\mathrm{V} \\ \hat{\underline{u}}_{V3} = \hat{\underline{u}}_3 - \hat{\underline{u}}_M & & U_{V3} = |\hat{\underline{u}}_{V3}|/\sqrt{2} = 186{,}4\,\mathrm{V} \end{matrix} \tag{8.198}$$

Die Gesamtleistung

$$\begin{aligned} P = \frac{U_{V1}^2}{R_1} + \frac{U_{V2}^2}{R_2} + \frac{U_{V3}^2}{R_3} &= \frac{(267{,}1\,\mathrm{V})^2}{1000\,\Omega} + \frac{(243{,}2\,\mathrm{V})^2}{750\,\Omega} + \frac{(186{,}4\,\mathrm{V})^2}{500\,\Omega} \\ &= 71{,}4\,\mathrm{W} + 78{,}9\,\mathrm{W} + 69{,}5\,\mathrm{W} = 219{,}8\,\mathrm{W}\,. \end{aligned} \tag{8.199}$$

unterscheidet sich um weniger als 5 % von dem Ergebnis in Gl. (8.195). Allerdings haben sich die Leistungen an den einzelnen Heizwiderständen sehr deutlich gegenüber der Situation mit dem Sternpunktleiter geändert. Die Ursache liegt in den unterschiedlichen Spannungen (8.198) an den einzelnen Widerständen (▶Abb. 8.73a) infolge der Potentialverschiebung im Sternpunkt des Verbrauchers (▶Abb. 8.73b). Die komplexen Zeiger der Ströme sind in ▶Abb. 8.73c dargestellt.

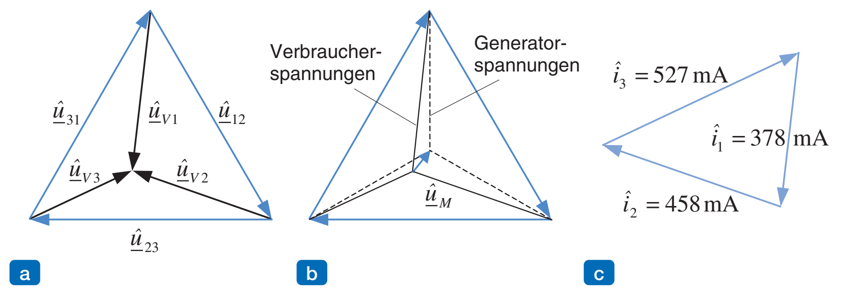


Abbildung 8.73: Komplexe Amplituden der Ströme und Spannungen

Merke

Bei der Sternschaltung ohne Neutralleiter sind die Spannungen an den einzelnen Verbrauchern abhängig von den Impedanzen aller drei Verbraucher. Bei unsymmetrischer Belastung werden die einzelnen Verbraucherspannungen unterschiedlich groß. Sie können kleiner oder größer werden als die Strangspannungen bei angeschlossenem Sternpunktleiter. Um einen sicheren Betrieb zu gewährleisten, wird die Schaltungsvariante ohne Neutralleiter nur bei symmetrischen Verbrauchern verwendet.

8.11.3 Dreieckschaltung

Bei der Dreieckschaltung in ▶Abb. 8.74 sind die Spannungen an den Impedanzen des Verbrauchers identisch zu den Strangspannungen, so dass wir für die Gesamtleistung am Verbraucher wieder die Gl. (8.186) erhalten

$$P = U\left(I_{V1}\cos\varphi_1 + I_{V2}\cos\varphi_2 + I_{V3}\cos\varphi_3\right). \tag{8.200}$$

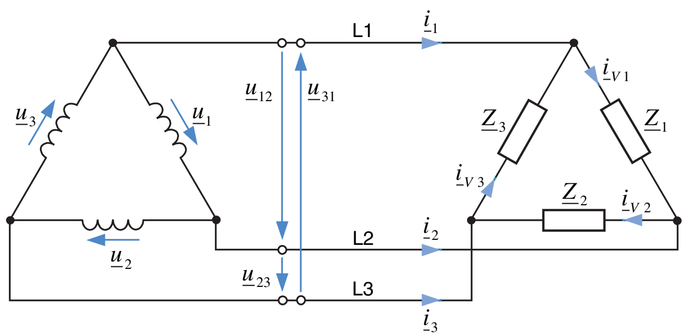


Abbildung 8.74: Leistungsübertragung bei der Dreieckschaltung

Für den Sonderfall symmetrischer Belastung nimmt das Ergebnis wieder die einfache Form

$$P = 3U\,I\cos\varphi \tag{8.201}$$

an. Im allgemeinen Fall unsymmetrischer Belastung können die Ströme in den Impedanzen des Verbrauchers unmittelbar berechnet werden. Für die komplexen Amplituden gilt mit den Generatorspannungen nach Gl. (8.188)

$$\underline{\hat{i}}_{V1}=\frac{\underline{\hat{u}}_1}{\underline{Z}_1}=\frac{\hat{u}}{\underline{Z}_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\,,\quad \underline{\hat{i}}_{V2}=\frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{Z}_2}=\frac{\hat{u}}{\underline{Z}_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}\,,\quad \underline{\hat{i}}_{V3}=\frac{\underline{\hat{u}}_3}{\underline{Z}_3}=\frac{\hat{u}}{\underline{Z}_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)}. \tag{8.202}$$

Mit diesen Ergebnissen sind dann auch die Außenleiterströme bekannt

$$\underline{\hat{i}}_1=\underline{\hat{i}}_{V1}-\underline{\hat{i}}_{V3}\,,\quad \underline{\hat{i}}_2=\underline{\hat{i}}_{V2}-\underline{\hat{i}}_{V1}\,,\quad \underline{\hat{i}}_3=\underline{\hat{i}}_{V3}-\underline{\hat{i}}_{V2}\,. \tag{8.203}$$

Beispiel 8.7: Vergleich der Verbraucherleistung bei Stern- bzw. Dreieckschaltung

Wir betrachten die ▶Abb. 8.75, in der zwei Verbraucher mit den jeweils gleichen Impedanzen $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_3=R$ einmal in Sternschaltung und einmal in Dreieckschaltung an ein Drehstromnetz angeschlossen sind. In welchem Verhältnis stehen die in beiden Fällen aufgenommenen Leistungen?

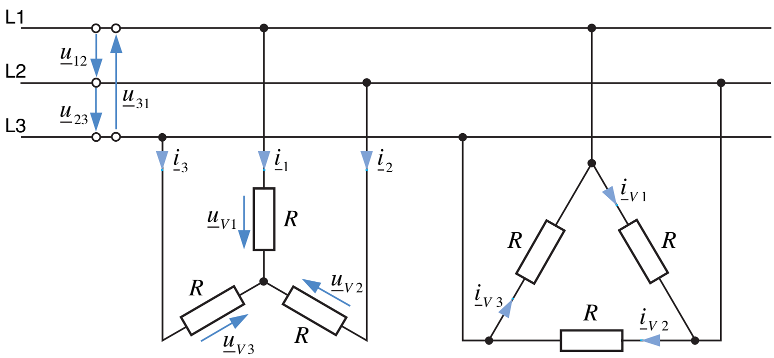


Abbildung 8.75: Vergleich der aufgenommenen Leistung bei Stern- bzw. Dreieckschaltung

Bezeichnen wir mit $U_L=\hat{u}_{12}/\sqrt{2}$ die Effektivwerte der Außenleiterspannungen, dann ist die Gesamtleistung bei der Dreieckschaltung durch die Beziehung

$$P_\Delta=3\frac{U_L^{\,2}}{R} \tag{8.204}$$

gegeben. Die Spannung an den Widerständen ist bei der Sternschaltung um den Faktor $\sqrt{3}$ geringer, so dass die Gesamtleistung

$$P_*=3\frac{\left(U_L/\sqrt{3}\right)^2}{R}=\frac{U_L^{\,2}}{R}=\frac{1}{3}P_\Delta \tag{8.205}$$

um einen Faktor 3 kleiner wird.

8.11.4 Besondere Eigenschaften des Drehstromsystems

Aus den Ergebnissen der vorangegangenen Abschnitte lässt sich zunächst die folgende Feststellung treffen:

Merke

Bei symmetrischer Belastung kann die Verbraucherleistung im Drehstromsystem, unabhängig davon, ob es sich um eine Dreileiter- oder Vierleiter-Sternschaltung oder um die Dreieckschaltung handelt, mit der Gleichung

$$P = 3 U I \cos\varphi \tag{8.206}$$

berechnet werden.

Mit den Bezeichnungen U_L für die Außenleiterspannung und I_L für den Außenleiterstrom gelten die in Tab. 8.6 angegebenen Zusammenhänge zwischen den Außenleitergrößen und den Stranggrößen bei Dreieck- bzw. Sternschaltung.

Tabelle 8.6

Zusammenhang zwischen Strang- und Außenleitergrößen

	Dreieckschaltung	Sternschaltung
Außenleiterstrom I_L	$\sqrt{3}\,I$	I
Außenleiterspannung U_L	U	$\sqrt{3}\,U$

Da entweder U_L oder I_L um den Faktor $\sqrt{3}$ größer ist als die zugehörige Stranggröße, können wir die Gesamtleistung bei allen bisher betrachteten Schaltungen durch eine Beziehung beschreiben, in der die Leistung bei symmetrischer Belastung durch die Außenleitergrößen ausgedrückt ist

$$P = 3 U I \cos\varphi = \sqrt{3}\, U_L I_L \cos\varphi\,. \tag{8.207}$$

Sind die Stranggrößen bei einem Verbraucher für eine Messung nicht zugänglich, dann kann die Leistung auch mit den an den Anschlussklemmen vorliegenden Leitergrößen bestimmt werden. Allerdings ist zu beachten, dass der Winkel φ noch immer die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung an der Impedanz eines Verbrauchers bezeichnet.

Konstante Ausgangsleistung:

An dieser Stelle wollen wir die Behauptung aus Kap. 6.6.2 beweisen, dass im Drehstromsystem eine zeitlich konstante Leistungsabgabe an den Verbraucher erfolgen kann. Unter der Voraussetzung einer symmetrischen Belastung sind bei allen Verbrauchern die Amplitude der Spannung, die Amplitude des Stromes und die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ gleich. Die Phasenverschiebungen zwischen den drei Verbraucherspannungen betragen jeweils 120°, die gleichen Phasenverschiebungen bestehen zwischen den Verbraucherströmen.

Mit den zeitabhängigen Spannungen in Gl. (8.184) kann die gesamte dem Verbraucher zugeführte Leistung in der Form

$$\begin{aligned} p(t) &= \hat{u}\,\hat{i}\left[\sin\omega t\sin(\omega t+\varphi)+\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)\right.\\ &\qquad\left.+\sin\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)\sin\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)\right] \\ &\overset{(H.6)}{=} U I\left[3\cos\varphi\underbrace{-\cos(2\omega t+\varphi)-\cos\left(2\omega t-\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)-\cos\left(2\omega t-\frac{8\pi}{3}+\varphi\right)}_{0}\right] \end{aligned} \tag{8.208}$$

dargestellt werden. Mithilfe des Additionstheorems (H.5) kann leicht nachgewiesen werden, dass die Zusammenfassung der zeitabhängigen Kosinusfunktionen verschwindet. Der verbleibende Ausdruck für die an den Verbraucher gelieferte Leistung ist von der Zeit unabhängig und entspricht dem in Gl. (8.206) angegebenen Wert für die Wirkleistung.

Merke

Bei symmetrischer Belastung liefert der Drehstromgenerator eine zeitlich konstante Leistung an den Verbraucher.

Als Folge der Gl. (8.208) könnte die Vermutung aufkommen, dass keine Blindenergie zwischen Generator und Verbraucher ausgetauscht wird. Betrachten wir dazu noch einmal die Sternschaltung in Abb. 8.69, in der wir jeden Strang zunächst unabhängig von den anderen beiden Strängen betrachten können. Besteht jeder Verbraucher aus der Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes mit einer Induktivität, dann wird im Magnetfeld der Induktivität Energie gespeichert, die auch anschließend wieder an die zugehörige Generatorwicklung zurückgegeben wird. Dies geschieht in allen drei Strängen, jedoch mit einer Phasenverschiebung von $2\pi/3$. Das Ergebnis (8.208) besagt also lediglich, dass die vom Generator über einen Teil der Stränge an die Impedanzen des Verbrauchers abgegebene Blindenergie zeitgleich über die anderen Stränge vom Verbraucher an den Generator zurückgeliefert wird.

Erzeugung eines Drehfelds:

Als weiteren Vorteil bietet das Drehstromsystem die Möglichkeit, ein mit konstanter Geschwindigkeit umlaufendes Drehfeld zu erzeugen. Zu diesem Zweck wird ein Verbraucher mit drei gleichen Wicklungen an die drei Phasen des Drehstromsystems angeschlossen, so dass die Ströme durch die Wicklungen jeweils um $2\pi/3$ *zeitlich* gegeneinander phasenverschoben sind. Die drei Verbraucherwicklungen werden außerdem *räumlich* um $2\pi/3$ gegeneinander versetzt angeordnet (▶Abb. 8.76). Für die Betrachtung wählen wir den Zeitpunkt $t = 0$ derart, dass die Ströme durch die Beziehungen

$$i_1(t) = \hat{i}\cos\omega t\,,\quad i_2(t) = \hat{i}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right),\quad i_3(t) = \hat{i}\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \tag{8.209}$$

beschrieben werden können.

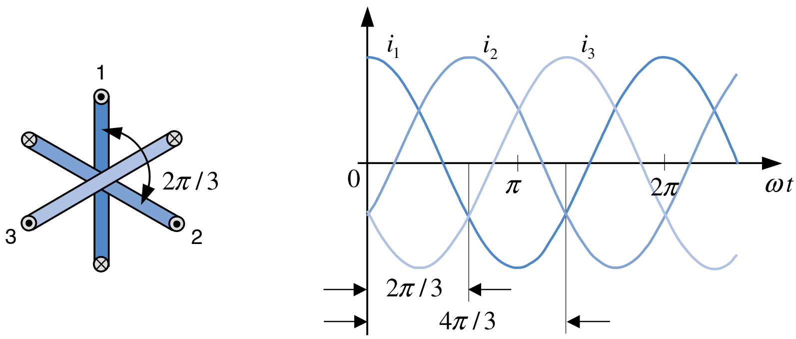


Abbildung 8.76: Räumlich versetzte Wicklungen und zugehörige phasenverschobene Ströme

Die Wicklung 1 wird von dem Strom i_1 durchflossen und das von ihr erzeugte Magnetfeld muss den gleichen zeitlichen Verlauf aufweisen wie der verursachende Strom. Die zugehörige magnetische Flussdichte kann also in der Form

$$\vec{\mathbf{B}}_1(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{B}}_1(\vec{\mathbf{r}})\cos(\omega t) \tag{8.210}$$

geschrieben werden, wobei der Vektor $\vec{\mathbf{B}}_1(\vec{\mathbf{r}})$ im allgemeinen Fall drei Komponenten aufweist, die von allen drei Koordinaten abhängen können. Für eine senkrecht zur Zeichenebene langgestreckte Anordnung können wir uns das Magnetfeld dieser Wicklung ähnlich wie bei einer Doppelleitung vorstellen (▶Abb. 8.77). Zum leichteren Verständnis betrachten wir nur den Bereich innerhalb der Leiterschleife, für den wir vereinfachend ein homogenes Feld annehmen wollen. Dieses steht, wie in dem rechten Teilbild angedeutet, senkrecht auf der von der Leiterschleife umfassten Fläche und besitzt bei der Schleife 1 nur eine x-Komponente.

Werden die ortsabhängigen Feldverteilungen der beiden anderen Schleifen in ähnlicher Weise durch einfache Vektoren beschrieben, dann setzt sich das gesamte Magnetfeld aus drei Anteilen zusammen, die aufgrund der räumlich versetzt angeordneten Leiterschleifen jeweils um $2\pi/3$ gegeneinander verschoben sind.

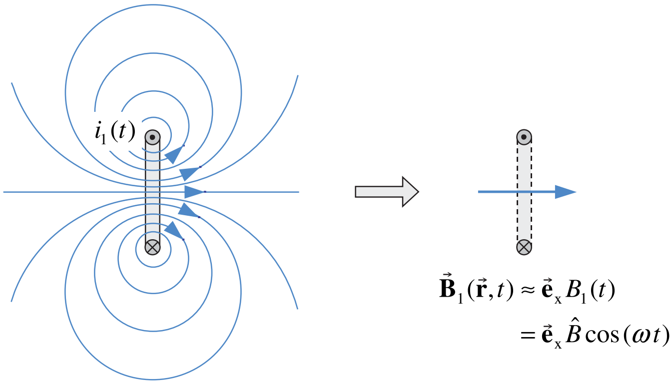


Abbildung 8.77: Annahme einer vereinfachten Feldverteilung

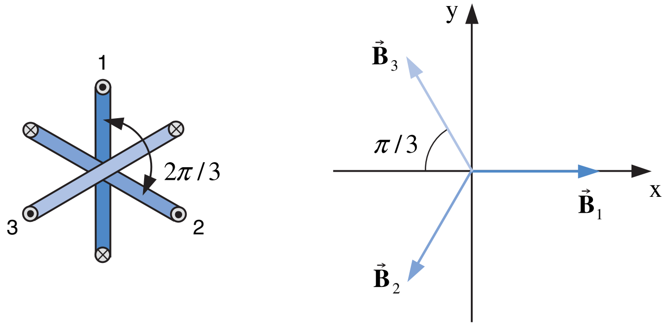


Abbildung 8.78: Vereinfachte Darstellung der Feldverteilung

Mit dem in ▶Abb. 8.78 angegebenen Winkel lassen sich diese Vektoren in ihre x- und y-Komponenten zerlegen. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{B}}_1(\vec{\mathbf{r}},t) &= \vec{\mathbf{e}}_x B_1(t), \\
\vec{\mathbf{B}}_2(\vec{\mathbf{r}},t) &= \left(-\vec{\mathbf{e}}_x \cos\frac{\pi}{3} - \vec{\mathbf{e}}_y \sin\frac{\pi}{3}\right) B_2(t) = -\frac{1}{2}\left(\vec{\mathbf{e}}_x + \sqrt{3}\,\vec{\mathbf{e}}_y\right) B_2(t), \\
\vec{\mathbf{B}}_3(\vec{\mathbf{r}},t) &= \left(-\vec{\mathbf{e}}_x \cos\frac{\pi}{3} + \vec{\mathbf{e}}_y \sin\frac{\pi}{3}\right) B_3(t) = -\frac{1}{2}\left(\vec{\mathbf{e}}_x - \sqrt{3}\,\vec{\mathbf{e}}_y\right) B_3(t).
\end{aligned}
\tag{8.211}
$$

Bei der Überlagerung der drei Teilfelder ist zu beachten, dass die Längen der Vektoren zeitabhängig sind. Mit den Strömen nach Gl. (8.209) erhalten wir die Amplituden der Flussdichtevektoren

$$
\begin{aligned}
B_1(t) &= \hat{B}\cos(\omega t), \\
B_2(t) &= \hat{B}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \overset{(H.5)}{=} \frac{1}{2}\hat{B}\left(-\cos\omega t + \sqrt{3}\sin\omega t\right), \\
B_3(t) &= \hat{B}\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \overset{(H.5)}{=} \frac{1}{2}\hat{B}\left(-\cos\omega t - \sqrt{3}\sin\omega t\right).
\end{aligned}
\tag{8.212}
$$

Die Zusammenfassung dieser Ergebnisse liefert den einfachen Ausdruck

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\vec{\mathbf{B}}_1(\vec{\mathbf{r}},t)+\vec{\mathbf{B}}_2(\vec{\mathbf{r}},t)+\vec{\mathbf{B}}_3(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{3}{2}\hat{B}\left[\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x}\cos(\omega t)-\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}\sin(\omega t)\right] \tag{8.213}$$

für die gesamte Flussdichte. Die Länge dieses Vektors ist wegen Gl. (H.1) unabhängig von der Zeit und beträgt $1{,}5\hat{B}$. Der Ausdruck in der eckigen Klammer beschreibt eine mit der Zeit linear fortschreitende Drehbewegung in Richtung des Uhrzeigers. Eine Vertauschung von zwei Strängen in Abb. 8.76, z.B. der Stränge 2 und 3, liefert eine Drehbewegung in entgegengesetzter Richtung. Die einzelnen Flussdichtekomponenten mit den Richtungen nach Gl. (8.211) und den Längen nach Gl. (8.212) sowie die Richtung des Gesamtfelds (8.213) sind für einige ausgewählte Zeitpunkte in ▶Abb. 8.79 dargestellt.

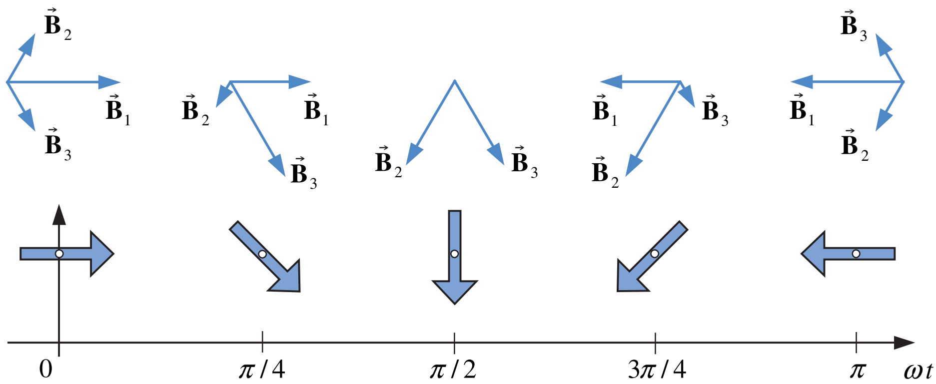


Abbildung 8.79: Felddarstellung zu verschiedenen Zeitpunkten

ZUSAMMENFASSUNG

- **Sinusförmige Ströme und Spannungen** können in der zweidimensionalen Ebene entweder in der bekannten Weise als sinusförmiger Kurvenverlauf $u(t)$ bzw. $i(t)$ grafisch dargestellt werden oder aber als rotierende Zeiger, deren Länge die Amplitude der darzustellenden Größe beschreibt und deren Phasenlage sich gegenüber einem Bezugswert linear mit der Zeit ändert.
- Die **Addition und Subtraktion von Zeigern** (entsprechend der Addition und Subtraktion von Strömen und Spannungen bei den Kirchhoff'schen Gleichungen) können auf elegante Weise mit der komplexen Rechnung durchgeführt werden.
- Die im Zeitbereich auftretenden **Netzwerkgleichungen** enthalten neben den Strömen und Spannungen auch deren zeitliche Ableitungen. Mithilfe der symbolischen Methode werden diese Differentialgleichungen zurückgeführt auf einfache lineare, jetzt aber komplexe Gleichungen. Zeitliche Ableitungen werden durch eine Multiplikation mit dem Faktor $\mathrm{j}\omega$ ersetzt, die Integration über die Zeit durch eine Division durch $\mathrm{j}\omega$.
- Da alle **Ströme und Spannungen im Netzwerk** die gleiche Frequenz aufweisen, die Zeiger also mit der gleichen Geschwindigkeit rotieren, bleiben die Phasenlagen der einzelnen Größen zueinander zeitlich konstant. Zur Lösung der Netzwerkgleichungen kann die Drehbewegung (Faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$) daher unberücksichtigt bleiben.
- Die Kombination der Komponenten R, L und C ermöglicht den Aufbau **frequenzabhängiger Spannungsteiler**.
- In Netzwerken, die gleichzeitig Induktivitäten und Kapazitäten enthalten, können **Resonanzerscheinungen** auftreten. Wie stark diese Resonanzen ausgeprägt sind, hängt vor allem von der Güte bzw. deren Kehrwert, dem Verlustfaktor ab. Diese Güten werden wesentlich durch die im Netzwerk enthaltenen Widerstände bestimmt.
- Während der Strom durch einen Widerstand immer mit der Umwandlung elektrischer Energie in **Wärme** einhergeht, findet bei den reinen Blindelementen L und C aufgrund der Phasenverschiebung von 90° zwischen Strom und Spannung lediglich ein **Energieaustausch** statt. Kapazitäten speichern elektrische Energie, Induktivitäten magnetische Energie. Diese Energie wird bei einer Abnahme der Spannung an der Kapazität bzw. einer Abnahme des Stromes durch die Induktivität wieder an die Schaltung abgegeben.
- Die von einer Wechselspannungsquelle abgegebene Leistung ist zeitabhängig. Die Zusammenschaltung von drei Quellen mit jeweils 120° Phasenverschiebung zu einem Drehstromsystem ermöglicht bei symmetrischer Belastung eine zeitlich konstante Leistungsabgabe an den Verbraucher.

COMPANION WEBSITE
Lösungen

Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1 Zeigerdiagramm

Gegeben ist das Netzwerk in ▶Abb. 8.80 mit den folgenden Daten:

$R_1 = 45\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, $\omega L_2 = 30\ \Omega$ und $\hat{u} = 90$ V.

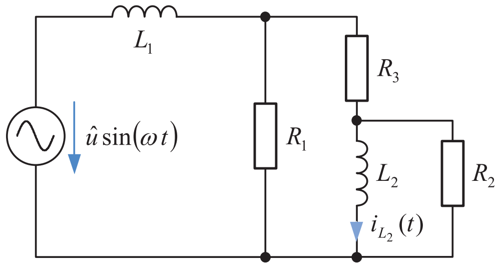


Abbildung 8.80: Netzwerk mit zwei Induktivitäten

1. Bestimmen Sie mithilfe des Zeigerdiagramms auf grafischem Wege das Verhältnis L_1/L_2 so, dass die Spannung an dem Widerstand R_2 in Phase mit der Quellenspannung ist.
2. Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe 1 den Strom $i_{L_2}(t)$ durch L_2.
3. Bestimmen Sie mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung das Verhältnis L_1/L_2 so, dass die Spannung an dem Widerstand R_2 in Phase mit der Quellenspannung ist.

Aufgabe 8.2 Frequenzweiche

Das Ausgangssignal eines Audioverstärkers soll mithilfe einer Lautsprecherweiche an drei unterschiedliche Lautsprecher, einen Hochtöner, einen Mitteltöner und einen Tieftöner verteilt werden. Die Lautsprecher werden jeweils durch einen Widerstand von $R = 8\ \Omega$ charakterisiert.

1. Berechnen Sie die komplexen Amplituden der Ströme i_1, i_2 und i_3.

   Für die Netzwerkelemente gilt jetzt: $C_1 = 8{,}2\ \mu\text{F}$, $C_2 = 27\ \mu\text{F}$, $L_2 = 0{,}25$ mH und $L_3 = 0{,}75$ mH.
2. Welche Eckfrequenz gilt für den Zweig mit Tiefpasscharakter?

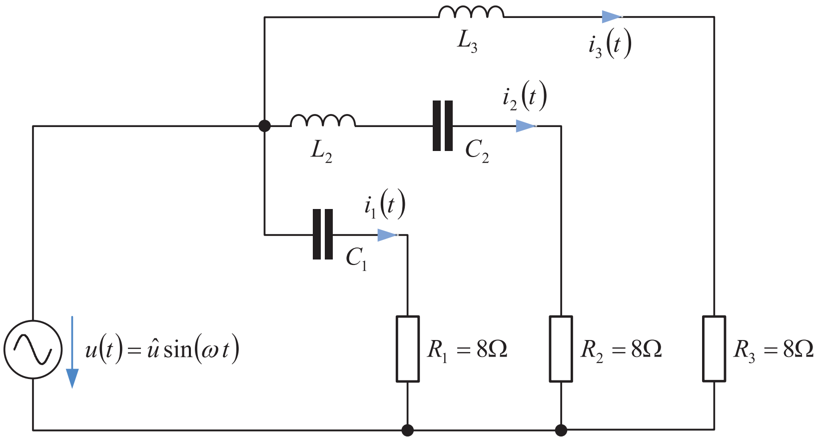


Abbildung 8.81: Schaltung zur Trennung verschiedener Frequenzbereiche

3. Welche Eckfrequenz gilt für den Zweig mit Hochpasscharakter?
4. Welche Resonanzfrequenz besitzt der Zweig für den Mitteltöner?

Aufgabe 8.3 Impedanztransformation

Die Schaltung in ▶Abb. 8.82 zeigt einen idealen Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = N_p/N_s$ und mit einer auf der Sekundärseite angeschlossenen Impedanz $\underline{Z}$.

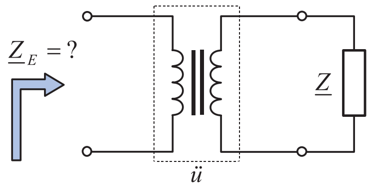


Abbildung 8.82: Schaltung zur Impedanztransformation

1. Bestimmen Sie die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_E$ des Netzwerks.
2. Welche Eingangsimpedanz stellt sich ein, wenn für die Impedanz $\underline{Z}$ ein ohmscher Widerstand R, eine Spule mit der Induktivität L oder ein Kondensator mit der Kapazität C verwendet wird?
3. Welche Resonanzfrequenz weist die Eingangsimpedanz auf, wenn am Ausgang ein Serienschwingkreis mit den Komponenten R, L, C angeschlossen wird?

Aufgabe 8.4 Phasenbrücke, (Ortskurvenberechnung)

Eine aus zwei gleichen Widerständen und zwei gleichen Kondensatoren bestehende Brückenschaltung soll durch das Netzwerk in ▶Abb. 8.83 mit idealen Komponenten modelliert werden.

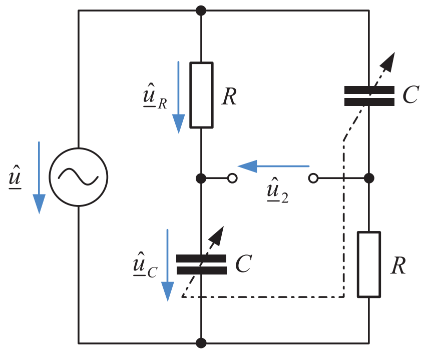


Abbildung 8.83: Phasenschiebernetzwerk

Wie ändert sich das Verhältnis von Brückenspannung zu Quellenspannung $\hat{\underline{u}}_2 / \hat{\underline{u}}$, wenn die Kapazität C der beiden Kondensatoren den Wertebereich $0 \leq C < \infty$ durchläuft? Das Ergebnis ist als Ortskurve darzustellen.

Zeitlich periodische Vorgänge beliebiger Kurvenform

9

ÜBERBLICK

Einführung

» In diesem Kapitel werden wir die Harmonische Analyse, auch als Fourier-Entwicklung bekannt, verwenden, um einen beliebigen periodischen Signalverlauf in eine Summe einzelner sinus- bzw. cosinusförmiger Schwingungen zu zerlegen. Die Grundschwingung oder erste Harmonische besitzt die gleiche Periodendauer T wie das Ausgangssignal. Die Frequenz der Grundschwingung ist also durch den Kehrwert $f = 1/T$ festgelegt. Prinzipiell treten unendlich viele Harmonische auf, wobei allgemein die n-te Harmonische die Frequenz $f_\mathrm{n} = nf$, also ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz, aufweist. In der Praxis tritt häufig der Fall auf, dass bestimmte Harmonische je nach vorgegebenem Kurvenverlauf den Wert Null annehmen. Die Frage, mit welcher Anzahl von Harmonischen welche Genauigkeit bei der Übereinstimmung mit der Ausgangskurve erreicht wird, wird durch die Konvergenzbetrachtungen in Kapitel G im Anhang beantwortet.

Bei den voraussetzungsgemäß linearen Netzwerken darf die Berechnung für jede einzelne Harmonische separat durchgeführt werden. Die Gesamtlösung ist dann durch einfache Überlagerung der Teillösungen gegeben. Da die Schaltungsanalyse für eine einzelne Harmonische mit der komplexen Wechselstromrechnung durchgeführt werden kann, eröffnet die Harmonische Analyse jetzt auch die Möglichkeit, lineare Schaltungen zu analysieren, bei denen die Strom- und Spannungsformen einen beliebigen, zeitlich periodischen Verlauf aufweisen. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- beliebige periodische Strom- und Spannungsformen in eine Summe von Schwingungen mit diskreten Frequenzen zu zerlegen,
- bestimmte Symmetrieeigenschaften der Signalformen auszunutzen, um die Berechnung der einzelnen Summanden zu vereinfachen,
- Strom- und Spannungsverläufe in den Netzwerken zu berechnen, auch für die Fälle, bei denen die Quellen periodische, aber nicht mehr unbedingt sinusförmige Zeitverläufe aufweisen,
- die Ergebnisse in Spektraldarstellung anzugeben,
- Leistungsbetrachtungen anzustellen und
- weitere Kenngrößen wie Klirrfaktor, Formfaktor oder Welligkeit zu berechnen.

In Kap. 8 haben wir uns auf zeitlich periodische sinusförmige Signalverläufe beschränkt. Die Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung setzte außerdem eine einheitliche Frequenz bei allen Strom- und Spannungsverläufen im Netzwerk voraus. Durch Anwendung des Überlagerungsprinzips sind wir aber bereits in der Lage, Netzwerke zu behandeln, in denen sich Gleichspannungs- und Wechselspannungsquellen und ebenso Stromquellen unterschiedlicher Frequenzen befinden, indem wir jeweils nur eine Quelle betrachten und die übrigen Quellen zu Null setzen, d.h. Spannungsquellen durch Kurzschluss und Stromquellen durch Leerlauf ersetzen. Die Überlagerung der so berechneten Teillösungen stellt die Gesamtlösung für das betrachtete Netzwerk dar.

Im folgenden Kapitel werden wir zunächst zeigen, dass durch geeignete Überlagerung von Wechselgrößen, deren unterschiedliche Frequenzen zueinander in einem bestimmten Verhältnis stehen, andere periodische Signalformen erzeugt werden können, die innerhalb der Periodendauer T einen beliebigen, nicht mehr sinusförmigen Verlauf annehmen.

Mit der anschließend zu behandelnden harmonischen Analyse werden wir dann ein mathematisches Verfahren kennen lernen, mit dessen Hilfe der umgekehrte Weg beschritten werden kann, nämlich die Zerlegung einer beliebigen periodischen Funktion in eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen. Die bereits erwähnte Vorgehensweise, nämlich die separate Berechnung des Netzwerks für jede einzelne Frequenz mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung und die anschließende Überlagerung der Teillösungen, wird uns in die Lage versetzen, Ströme und Spannungen in den Netzwerken auch dann zu berechnen, wenn die Quellen beliebige, zeitlich periodische Kurvenformen aufweisen.

9.1 Grundlegende Betrachtungen

Zum leichteren Einstieg in diese Thematik betrachten wir als Beispiel die *RL*-Reihenschaltung in ▶Abb. 9.1, die an eine Quelle mit der zeitabhängigen Spannung

$$u(t) = U_0 + \hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{u}_2 \cos(\omega_2 t) \tag{9.1}$$

angeschlossen ist. Dieses Netzwerk lässt sich auf einfache Weise behandeln, indem wir uns die Spannungsquelle, wie auf der rechten Seite der Abbildung dargestellt, in drei einzelne in Reihe liegende Quellen zerlegt denken. Auf ähnliche Weise kann man sich Stromquellen in parallel liegende Einzelquellen zerlegt denken.

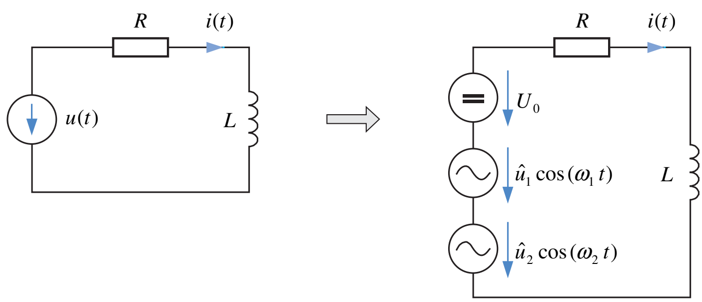


Abbildung 9.1: Überlagerung von Quellen mit unterschiedlichen Frequenzen

Betrachten wir nur die Gleichspannungsquelle, dann erhalten wir als erste Teillösung den zeitlich konstanten Strom $I = U_0/R$ (die Induktivität stellt bei der Frequenz Null einen Kurzschluss dar). Die Teillösungen infolge der beiden Wechselspannungsquellen können ebenfalls unabhängig voneinander berechnet werden. Wir übernehmen diese Lösungen aus Gl. (8.55) und erhalten den Gesamtstrom

$$\begin{aligned} i(t) = \frac{U_0}{R} &+ \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{R^2 + (\omega_1 L)^2}} \cos\left(\omega_1 t - \arctan\frac{\omega_1 L}{R}\right) \\ &+ \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{R^2 + (\omega_2 L)^2}} \cos\left(\omega_2 t - \arctan\frac{\omega_2 L}{R}\right). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Damit haben wir den allgemeinen Stromverlauf im Netzwerk auf der linken Seite der Abb. 9.1 mit der dort angegebenen zeitabhängigen Spannung berechnet. Wenn es also gelingt, einen beliebig vorgegebenen zeitlichen Verlauf der Quellenspannung bzw. des Quellenstromes durch eine Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen mit eventuell noch einem zusätzlichen Gleichanteil darzustellen, dann können wir jedes lineare Netzwerk mit den bereits bekannten Methoden berechnen.

Im Folgenden soll an drei charakteristischen Beispielen die additive Überlagerung zweier Kosinusfunktionen mit unterschiedlicher Frequenz gezeigt werden. Dabei werden wir feststellen, dass die Summensignale sehr unterschiedliche Eigenschaften aufweisen können. Die Überlagerung zweier Frequenzen, die in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen, wird uns den Weg zeigen zu einer Behandlung allgemeiner periodischer Signalformen.

1. Fall: $\omega_1 << \omega_2$

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, dass die Kreisfrequenz $\omega_1 = 2\pi f_1$ in Gl. (9.1) wesentlich kleiner als die Kreisfrequenz ω_2 ist. Die ▶Abb. 9.2 zeigt eine Auswertung für $U_0 = 0$, $\hat{u}_1 = 0{,}5\,\hat{u}$, $\hat{u}_2 = \hat{u}$ sowie $f_1 = 10\text{Hz}$ und $f_2 = 100\text{Hz}$.

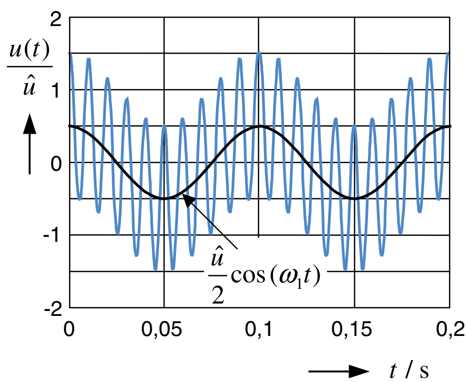


Abbildung 9.2: Überlagerung zweier Wechselspannungen mit sehr unterschiedlichen Frequenzen

Das Summensignal besteht aus der höherfrequenten Schwingung, die im Rhythmus und mit der Amplitude der kleineren Frequenz in Richtung der Ordinate ausgelenkt ist.

2. Fall (Schwebung): $\omega_1 \approx \omega_2$

Ein weiterer, interessanter Fall liegt vor, wenn sich die beiden Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 nur geringfügig voneinander unterscheiden. Wir setzen den Gleichanteil wieder zu Null und formen die Quellenspannung (9.1) zunächst in der folgenden Weise um

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{u}_2 \cos(\omega_2 t) \\ &= \hat{u}_1 \left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right] + (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \cos(\omega_2 t) \\ &\overset{(H.10)}{=} 2\hat{u}_1 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) + (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \cos(\omega_2 t) \, . \end{aligned} \tag{9.3}$$

Für den Sonderfall gleicher Amplituden $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$ besteht die Summenspannung aus einer Schwingung der mittleren Frequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$, deren Amplitude von der halben Differenzfrequenz $(\omega_1 - \omega_2)/2$ beeinflusst ist. Bei ungleichen Ausgangsamplituden tritt noch eine weitere Kosinusfunktion im Summensignal (9.3) auf. In ▶Abb. 9.3 sind zwei Auswertungen mit den Frequenzen $f_1 = 90\text{Hz}$ und $f_2 = 100\text{Hz}$ dargestellt. In Teilbild a sind die Amplituden der beiden Ausgangsspannungen gleich $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \hat{u}$, in Teilbild b sind die Amplituden $\hat{u}_1 = \hat{u}/2$ und $\hat{u}_2 = 3\hat{u}/2$ zugrunde gelegt. Eine derartige Signalform wird allgemein als **Schwebung** bezeichnet. Die Einhüllende der hochfrequenten Schwingung schwankt zwischen der Summe $\hat{u}_1 + \hat{u}_2$ und der Differenz $\left|\hat{u}_1 - \hat{u}_2\right|$ der beiden Amplituden. Für $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$ geht die Einhüllende bis auf Null zurück, die Schwebung ist in diesem Fall am stärksten ausgeprägt.

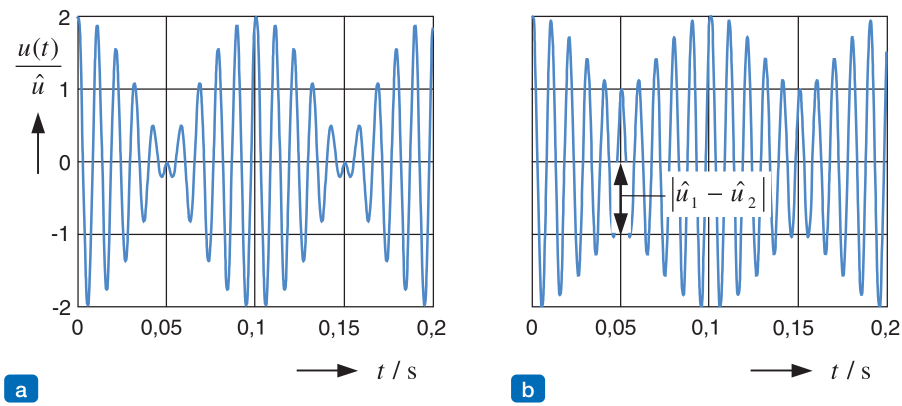


Abbildung 9.3: Überlagerung zweier Wechselspannungen mit annähernd gleicher Frequenz

Da die Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 in den beiden bisher betrachteten Fällen in einem beliebigen Verhältnis zueinander stehen können, lässt sich im Allgemeinen keine Periodendauer T finden, nach deren Ablauf sich das Summensignal entsprechend der Gl. (7.6) exakt wiederholt. Diese Fälle werden wir im Folgenden nicht weiter betrachten.

3. Fall (Grund- und Oberschwingung): $\omega_2 = n\omega_1$ mit $n = 2,3, \ldots$

Wesentlich wichtiger für unsere weiteren Betrachtungen ist der Fall, bei dem die Kreisfrequenz ω_2 ein ganzzahliges Vielfaches der Kreisfrequenz ω_1 ist. Die Schwingung mit der kleineren Frequenz f_1 wird als **Grundschwingung** oder **1. Harmonische** bezeichnet, die Schwingung mit der Frequenz nf_1 als ***n*-te Harmonische**. Häufig werden auch die Bezeichnungen **Grund-** und **Oberschwingungen** verwendet. Die 2. Harmonische entspricht dann der 1. Oberschwingung, die 3. Harmonische entspricht der 2. Oberschwingung usw.

Als Beispiel betrachten wir die in ▶Abb. 9.4 dargestellte Auswertung für den Spannungsverlauf

$$u(t) = \frac{1}{2}U_0 - U_0 \frac{4}{\pi^2}\left[\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega_1 t)\right]. \tag{9.4}$$

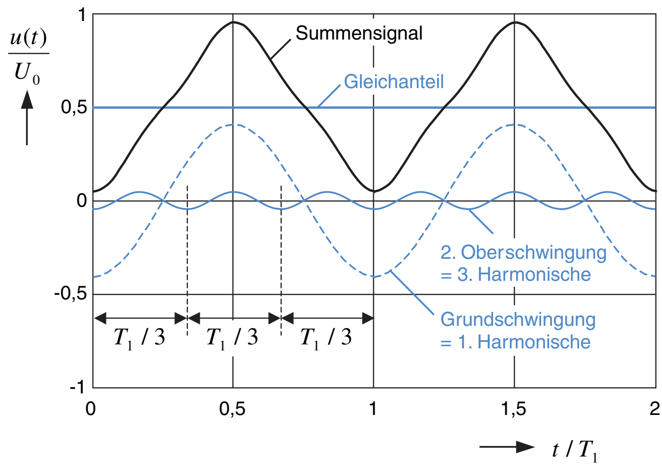


Abbildung 9.4: Überlagerung zweier Harmonischer mit einem Gleichanteil

Die Periodendauer der 1. Harmonischen ist durch die Grundfrequenz $T_1 = 1/f_1$ gegeben. Die 3. Harmonische besitzt die Frequenz $3f_1$ und daher gilt für ihre Periodendauer $T_3 = T_1/3$. Aus der Abbildung ist unmittelbar zu erkennen, dass das aus einer Grundschwingung und ihren Harmonischen gebildete Summensignal die gleiche Periodendauer wie die Grundschwingung aufweist. Die zusätzliche Überlagerung eines Gleichanteils verschiebt das Summensignal lediglich entlang der vertikalen Achse.

Aus der Abbildung ist weiterhin zu erkennen, dass es uns offenbar gelungen ist, durch die Überlagerung von drei Anteilen mit geeignet gewählten Amplituden eine nicht sinusförmige periodische Summenspannung mit näherungsweise dreieckförmigem Verlauf zusammenzusetzen. Die *Synthese* gegebener periodischer Spannungsverläufe durch *Ausprobieren* verschiedener Werte bei den Amplituden und Phasen der einzelnen Harmonischen ist natürlich mühsam. In den folgenden Kapiteln werden wir uns daher mit der als **Harmonische Analyse** bzw. **Fourier-Analyse** (nach Jean Baptiste Fourier, 1768 – 1830) bezeichneten Methode beschäftigen, mit deren Hilfe wir die Amplituden und Phasen der einzelnen Harmonischen für eine gegebene, zeitabhängige periodische Funktion gezielt berechnen können.

9.2 Die Harmonische Analyse

Der französische Mathematiker J. B. Fourier hat gezeigt, dass eine mit 2π periodische Funktion $f(x)$, die die **Dirichlet'schen Bedingungen** erfüllt, d.h.

- die Funktion ist endlich und
- das Intervall $0 \le x \le 2\pi$ lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen $f(x)$ stetig und monoton ist,

durch eine Summe von trigonometrischen Funktionen dargestellt werden kann

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 &+ \hat{a}_1 \cos(x) + \hat{a}_2 \cos(2x) + \hat{a}_3 \cos(3x) + \ldots \\ &+ \hat{b}_1 \sin(x) + \hat{b}_2 \sin(2x) + \hat{b}_3 \sin(3x) + \ldots \quad . \end{aligned} \tag{9.5}$$

Wir können davon ausgehen, dass die genannten Bedingungen bei den in der Praxis auftretenden Problemen immer erfüllt sind. Da wir fast ausschließlich mit zeitabhängigen Strömen $i(t)$ und Spannungen $u(t)$ rechnen, deren Periodizität durch die Gl. (7.6), d.h. durch die Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ beschrieben wird, werden wir für die folgenden Betrachtungen die Reihenentwicklung (9.5) mit den entsprechend angepassten Bezeichnungen verwenden. Die Darstellung mit den beiden trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} u(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{a}_n \cos(n\omega t) + \hat{b}_n \sin(n\omega t) \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{a}_n \cos\left(n 2\pi \frac{t}{T} \right) + \hat{b}_n \sin\left(n 2\pi \frac{t}{T} \right) \right] \end{aligned} \tag{9.6}$$

wird als **Normalform** der Fourier-Entwicklung bezeichnet. Durchläuft die Zeit t den Bereich $0 \le t \le T$, dann durchläuft das Argument $x = \omega t$ den Bereich $0 \le \omega t \le 2\pi$. Die beiden Darstellungen (9.5) und (9.6) sind also äquivalent.

Liegt die Funktion $u(t)$ nur in einem abgeschlossenen Intervall der Länge T vor, ohne aber periodisch zu sein, dann kann man sich die Funktion außerhalb des Intervalls nach beiden Seiten periodisch fortgesetzt denken und genauso durch die Summe (9.6) darstellen. Die Reihendarstellung erlaubt dann zwar auch die Berechnung von Funktionswerten außerhalb des Intervalls, diese sind aber nicht von Interesse.

Die vorgegebene Funktion $u(t)$ wird nach Gl. (9.6) in einen von der Zeit unabhängigen Gleichanteil (Mittelwert) a_0 und in eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt. Die Frequenz der Grundschwingung $f = 1/T = \omega/2\pi$ wird durch die Länge des Zeitintervalls T festgelegt. Glieder mit der Ordnungszahl n (n-te Harmonische) besitzen die Periodendauer T/n und damit die Frequenz nf.

Wir wollen zunächst die Gleichwertigkeit der Normalform (9.6) mit der als **Spektralform** der Fourier-Entwicklung bezeichneten Beziehung

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \cos(n\omega t - \psi_n) \tag{9.7}$$

nachweisen, indem wir die Umrechnungsformeln von den Koeffizienten der Normalform zu den Koeffizienten der Spektralform angeben. Aus der geforderten Übereinstimmung der phasenverschobenen Sinusfunktion in Gl. (9.7)

$$\hat{c}_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \overset{\text{(H.4)}}{=} \hat{c}_n \cos(\varphi_n) \sin(n\omega t) + \hat{c}_n \sin(\varphi_n) \cos(n\omega t) \tag{9.8}$$

mit den beiden Funktionen in Gl. (9.6) folgen unmittelbar die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\hat{c}_n \sin(\varphi_n) = \hat{a}_n \quad \text{und} \quad \hat{c}_n \cos(\varphi_n) = \hat{b}_n \tag{9.9}$$

für die Werte $\hat{c}_n$ und φ_n. Mit elementarer Rechnung erhalten wir die Zusammenhänge

$$\hat{a}_n{}^2 + \hat{b}_n{}^2 = \hat{c}_n{}^2 \sin^2(\varphi_n) + \hat{c}_n{}^2 \cos^2(\varphi_n) \overset{\text{(H.1)}}{=} \hat{c}_n{}^2 \quad \to \quad \boxed{\hat{c}_n = \sqrt{\hat{a}_n{}^2 + \hat{b}_n{}^2}} \tag{9.10}$$

und

$$\frac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n} = \frac{\hat{c}_n \sin(\varphi_n)}{\hat{c}_n \cos(\varphi_n)} \quad \to \quad \boxed{\tan(\varphi_n) = \frac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n}}. \tag{9.11}$$

Auf die gleiche Weise lässt sich mit dem Additionstheorem (H.5) nachweisen, dass die Amplitude bei den phasenverschobenen Kosinusfunktionen ebenfalls durch die Gl. (9.10) gegeben ist, während für den mit negativem Vorzeichen im Argument eingeführten Phasenwinkel ψ_n die folgende Beziehung gilt

$$\boxed{\tan(\psi_n) = \frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_n}}. \tag{9.12}$$

Bei der Auflösung der beiden Gleichungen (9.11) und (9.12) nach den Winkeln φ_n und ψ_n ist die Periodizität der tan-Funktion zu beachten (siehe Gl. (E.4)).

Die Entwicklung der zeitlich periodischen Funktion $u(t)$ in die Fourier-Reihe (9.6) erfordert die Berechnung der Koeffizienten a_0, $\hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$. Bei der Ableitung der dazu benötigten Bestimmungsgleichungen machen wir von einer besonderen Eigenschaft der in Gl. (9.6) enthaltenen trigonometrischen Funktionen Gebrauch[1]. Integriert man nämlich das Produkt zweier beliebiger Funktionen über die komplette Periodendauer, dann verschwindet das Integral immer dann, wenn es sich entweder um verschiedene Funktionen (Konstante oder Sinus- oder Kosinusfunktion) oder um gleiche Funktionen, aber mit unterschiedlichen Ordnungszahlen n handelt. Bezeichnen wir mit $g_1(t)$ und $g_2(t)$ zwei beliebige Funktionen aus der Fourier-Reihe (9.6), dann lässt sich der Zusammenhang formelmäßig folgendermaßen darstellen

$$\boxed{\int_0^T g_1(t)\, g_2(t)\, \mathrm{d}\,t = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad g_1 \neq g_2 \\ > 0 & \phantom{\text{für}} \quad g_1 = g_2 \end{cases}}. \tag{9.13}$$

Diese für die folgenden Betrachtungen außerordentlich wichtige Beziehung wird als **Orthogonalitätsrelation** bezeichnet. Zur Veranschaulichung betrachten wir das Produkt der beiden Kosinusfunktionen mit den Ordnungszahlen 1 und 2. Es ist offensichtlich, dass das Integral über die Funktion in ▶Abb. 9.5 wegen der gleichen Flächen oberhalb und unterhalb der t-Achse verschwinden muss.

1 Das konstante Glied vor der Summe ist in die Aussagen einbezogen, da es wegen cos(0) = 1 als Kosinusfunktion mit der Ordnungszahl $n = 0$ angesehen werden kann.

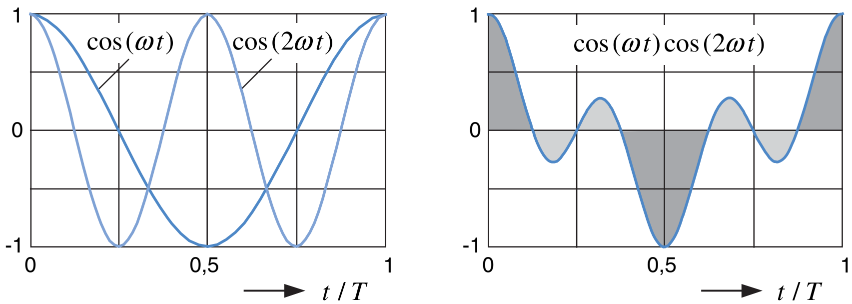


Abbildung 9.5: Zur Veranschaulichung der Orthogonalitätsrelation an einem Beispiel

Diese Situation trifft in den genannten Fällen immer zu. Handelt es sich dagegen um das Produkt zweier gleicher Funktionen mit der gleichen Ordnungszahl, also um das *Quadrat* einer Funktion, dann ist der Integrand immer positiv und liefert im Ergebnis einen positiven Wert. Alle möglichen, durch Gl. (9.13) erfassten Kombinationen sind in den Gleichungen (H.19) bis (H.25) zusammengestellt und ausgewertet. Die Integrale über die Quadrate der Funktionen liefern unterschiedliche Ergebnisse, je nachdem, ob über die Konstante oder über die trigonometrischen Funktionen integriert wird

$$\int_0^T 1^2 \mathrm{d}\,t = T \qquad \text{und} \qquad \int_0^T \sin^2(n\omega t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^T \cos^2(n\omega t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{T}{2}\,. \tag{9.14}$$

Nach diesen Vorüberlegungen sollen jetzt die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten abgeleitet werden. Dabei können wir folgendermaßen vorgehen:

- Wir wählen eine Funktion $g(t)$ aus der Reihendarstellung (9.6) aus und multiplizieren damit beide Seiten der Gl. (9.6).
- Wir integrieren diesen Ausdruck über die komplette Periodendauer $0 \le t \le T$.
- Auf der linken Gleichungsseite erhalten wir ein Integral über das Produkt der gewählten Funktion $g(t)$ mit der zu entwickelnden Funktion $u(t)$.
- Auf der rechten Gleichungsseite verschwinden alle Integrale mit einer einzigen Ausnahme. Lediglich das Integral über das Quadrat der gewählten Funktion liefert einen von Null verschiedenen Wert. Damit verbleibt auf der rechten Gleichungsseite nur ein einziger Koeffizient, nämlich genau derjenige, der vor der gewählten Funktion $g(t)$ steht. Mit der Auswahl von $g(t)$ erhalten wir also die Bestimmungsgleichung für den betreffenden Koeffizienten.

Zur Bestimmung des Mittelwertes a_0 multiplizieren wir die Gl. (9.6) mit der Konstanten $g(t) = 1$ und integrieren über die komplette Periodendauer

$$\begin{aligned}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}\,t &= \int_0^T a_0\,\mathrm{d}\,t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left[\hat{a}_n\cos(n\omega t) + \hat{b}_n\sin(n\omega t)\right]\mathrm{d}\,t \\ &= a_0\,T + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{a}_n\int_0^T\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}\,t + \hat{b}_n\int_0^T\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}\,t\right].\end{aligned} \tag{9.15}$$

Da die über die Periode T berechneten Integrale der trigonometrischen Funktionen nach Gl. (H.20) verschwinden, liefert die Summe auf der rechten Seite der Gl. (9.15) keinen Beitrag und für den Mittelwert a_0 verbleibt in Übereinstimmung mit Gl. (7.8) die Bestimmungsgleichung

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{9.16}$$

Im nächsten Schritt soll der Koeffizient $\hat{a}_m$ bestimmt werden. Der Index m steht stellvertretend für einen Wert aus der Reihe $n = 1,2,\ldots$. Zu diesem Zweck wird die Gl. (9.6) zunächst mit der Funktion $\cos(m\omega t)$ multipliziert und anschließend über die komplette Periodendauer integriert

$$\begin{aligned}\int_0^T u(t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T a_0\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{a}_n\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t + \hat{b}_n\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t\right].\end{aligned} \tag{9.17}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite verschwindet wegen Gl. (9.13) bzw. (H.20). In der Summe verschwinden nach Gl. (9.13) ebenfalls alle Integrale, bei denen der Integrand aus dem Produkt einer Sinus- und einer Kosinusfunktion besteht. Das Integral über das Produkt der beiden Kosinusfunktionen liefert nur für den Sonderfall $n = m$ einen von Null verschiedenen Wert, so dass auf der rechten Gleichungsseite nur der Ausdruck mit $\hat{a}_m$ verbleibt

$$\int_0^T u(t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t = \hat{a}_m\int_0^T \cos^2(m\omega t)\,\mathrm{d}t \overset{(9.14)}{=} \hat{a}_m\frac{T}{2}\,. \tag{9.18}$$

Lassen wir den Wert m jetzt der Reihe nach alle Werte 1,2, ... durchlaufen, dann erhalten wir nacheinander die Bestimmungsgleichungen für alle Koeffizienten $\hat{a}_n$. Diese Gleichung hat immer denselben Aufbau und kann durch Umstellung der Beziehung (9.18) auf die folgende Form gebracht werden

$$\hat{a}_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{9.19}$$

Damit verbleibt noch die Frage nach der Bestimmung der Koeffizienten $\hat{b}_n$. Der einzige Unterschied zu bisher besteht darin, dass wir die Ausgangsgleichung (9.6) jetzt mit der entsprechenden Sinusfunktion multiplizieren. Mit den gleichen Rechenschritten erhalten wir die völlig analog aufgebaute Beziehung

$$\hat{b}_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{9.20}$$

Wir fassen die Ergebnisse nochmals übersichtlich zusammen: Abhängig von der Wahl der Integrationsvariablen t bzw. ωt können die Fourier-Koeffizienten durch Auswertung der folgenden Integrale bestimmt werden

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t \\
\hat{a}_n &= \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\
\hat{b}_n &= \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\quad \text{bzw.} \quad
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega t)\,\mathrm{d}(\omega t) \\
\hat{a}_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}(\omega t) \\
\hat{b}_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}(\omega t)\,.
\end{aligned}
\tag{9.21}
$$

Handelt es sich bei der Funktion $u(t)$ nicht nur um eine im Intervall $0 \le t \le T$ vorgegebene, sondern um eine mit der Periodendauer T periodische Funktion, dann können die Integrale (9.21) auch in dem Bereich $t_0 \le t \le t_0 + T$ bzw. $\varphi_0 \le \omega t \le \varphi_0 + 2\pi$ mit beliebigen Anfangswerten t_0 und φ_0 berechnet werden. Der Integrationsbereich wird dann meistens im Hinblick auf einfacher auszuwertende Integrale festgelegt.

Beispiel 9.1: Reihenentwicklung einer Dreiecksfunktion

Der in ▶Abb. 9.6 dargestellte dreieckförmige periodische Spannungsverlauf, der in dem Bereich $0 \le t \le T$ durch die Beziehung

$$
u(t) = 2\hat{u}\cdot\begin{cases} t/T & \text{für} \quad 0 \le t \le T/2 \\ 1 - t/T & \quad\quad\;\; T/2 \le t \le T \end{cases}
\tag{9.22}
$$

beschrieben wird, soll in eine Fourier-Reihe nach Gl. (9.6) entwickelt werden.

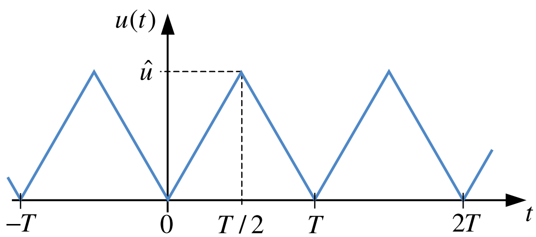


Abbildung 9.6: Dreieckförmiger periodischer Spannungsverlauf

Für den Gleichanteil erhalten wir mit der Fläche unter dem Dreieck das Ergebnis

$$
a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\frac{\hat{u}T}{2} = \frac{1}{2}\hat{u}\,.
\tag{9.23}
$$

Bei der Berechnung der übrigen Koeffizienten muss das jeweilige Integral entsprechend der abschnittsweise unterschiedlich definierten Funktion (9.22) in zwei Teilintegrale aufgespalten werden. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_n &\overset{(9.21)}{=} \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(9.22)}{=} \frac{4\hat{u}}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t + \frac{4\hat{u}}{T}\underbrace{\int_{T/2}^{T}\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t}_{0} - \frac{4\hat{u}}{T^2}\int_{T/2}^{T} t\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(H.18)}{=} \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[\frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} + \frac{t\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]\Bigg|_0^{T/2} - \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[\frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} + \frac{t\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]\Bigg|_{T/2}^{T} \\
&= \frac{4\hat{u}}{T^2(n\omega)^2}\left[2\cos(n\pi) - 2\right] = \frac{2\hat{u}}{(n\pi)^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right]
\end{aligned}
\tag{9.24}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\hat{b}_n &\overset{(9.21)}{=} \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(9.22)}{=} \frac{4\hat{u}}{T^2}\int_0^{T/2} t\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t + \frac{4\hat{u}}{T}\int_{T/2}^{T}\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t - \frac{4\hat{u}}{T^2}\int_{T/2}^{T} t\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(H.17)}{=} \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[-\frac{T\cos(n\pi)}{2n\omega}\right] + \frac{4\hat{u}}{T}\,\frac{\cos(n\pi)-1}{n\omega} - \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[-\frac{T\cos(n2\pi)}{n\omega} + \frac{T\cos(n\pi)}{2n\omega}\right] \\
&= \frac{4\hat{u}}{n\omega T}\left[-\frac{\cos(n\pi)}{2} + \cos(n\pi) - 1 + \cos(n2\pi) - \frac{\cos(n\pi)}{2}\right] = 0\,.
\end{aligned}
\tag{9.25}
$$

Berücksichtigt man noch, dass der Ausdruck $\cos(n\pi)-1$ für gerade n verschwindet und für ungerade n den Wert –2 annimmt, dann ist die Dreiecksfunktion in Abb. 9.6 resultierend durch die nachstehende Fourier-Reihe gegeben

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + \ldots\right] \\
&= \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2}\sum_{n=1,3,..}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n\omega t)\,.
\end{aligned}
\tag{9.26}
$$

Ein Vergleich dieser Beziehung mit der Gl. (9.4) zeigt, dass das Summensignal in Abb. 9.4 nicht zufällig die Form eines Dreiecks annimmt. Es wurde nämlich aus dem Gleichanteil und den beiden ersten Harmonischen der exakten Reihenentwicklung nach Gl. (9.26) berechnet. Die bereits gute Übereinstimmung zwischen dem Summensignal und der Dreiecksfunktion in Abb. 9.6 resultiert aus dem schnellen Abklingen der Amplituden der Oberschwingungen, die im vorliegenden Beispiel mit dem Quadrat der Ordnungszahl n abnehmen. Im Allgemeinen hängt die Konvergenz von dem Verlauf der Ausgangsfunktion ab. Auch wenn eine exakte Übereinstimmung zwischen der ursprünglichen Funktion und der Fourier-Darstellung erst bei unendlich vielen Gliedern erreicht wird, ist für die Praxis die Verwendung einer geringen Anzahl von Summanden hinreichend genau.

9.2.1 Die komplexe Form der Fourier-Reihe

Ausgehend von der Euler'schen Formel (E.6) können die trigonometrischen Funktionen in der Form

$$\cos(n\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}\right) \quad \text{und} \quad \sin(n\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}\right) \tag{9.27}$$

geschrieben werden. Damit lässt sich die trigonometrische Fourier-Reihe (9.6) auf die komplexe Form

$$\begin{aligned} u(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{a}_n \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}\right) - \hat{b}_n \frac{j}{2}\left(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}\right)\right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\hat{a}_n - j\hat{b}_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{\hat{a}_n + j\hat{b}_n}{2} e^{-jn\omega t}\right] \end{aligned} \tag{9.28}$$

bringen, die mit den Abkürzungen

$$c_0 = a_0, \qquad \underline{\hat{c}}_n = \frac{\hat{a}_n - j\hat{b}_n}{2} \qquad \text{und} \qquad \underline{\hat{c}}_{-n} = \frac{\hat{a}_n + j\hat{b}_n}{2} = \underline{\hat{c}}_n^{\,*} \tag{9.29}$$

folgendermaßen geschrieben werden kann

$$u(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\underline{\hat{c}}_n e^{jn\omega t} + \underline{\hat{c}}_{-n} e^{-jn\omega t}\right]. \tag{9.30}$$

Lässt man die Summation nicht von 1 bis ∞, sondern von –∞ bis ∞ laufen, dann ergibt sich mit $c_0 = \underline{\hat{c}}_0$ die kompakte Schreibweise

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\hat{c}}_n e^{jn\omega t}. \tag{9.31}$$

Die komplexen Koeffizienten $\underline{\hat{c}}_n$ werden aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \underline{\hat{c}}_{\pm n} &\overset{(9.29)}{=} \frac{\hat{a}_n \mp j\hat{b}_n}{2} \overset{(9.21)}{=} \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)\,dt \mp j\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, e^{\mp jn\omega t}\,dt \end{aligned} \tag{9.32}$$

bzw. mit der vereinfachten Darstellung

$$\underline{\hat{c}}_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, e^{-jn\omega t}\,dt \tag{9.33}$$

bestimmt. Der Index n durchläuft jetzt den Wertebereich der ganzen Zahlen $n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Die Gl. (9.33) hat gegenüber den Bestimmungsgleichungen (9.21) den Vorteil, dass nur ein Integral auszuwerten ist. Die reellen Koeffizienten können aus diesem Ergebnis mithilfe der Gl. (9.29) auf einfache Weise ermittelt werden

$$a_0 = c_0, \quad \hat{a}_n = \underline{\hat{c}}_n + \underline{\hat{c}}_{-n} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{c}}_n\right\} \quad \text{und} \quad \hat{b}_n = j\left(\underline{\hat{c}}_n - \underline{\hat{c}}_{-n}\right) = -2\,\mathrm{Im}\left\{\underline{\hat{c}}_n\right\}. \tag{9.34}$$

Beispiel 9.2: Reihenentwicklung einer Rechteckfunktion

Für die in ▶Abb. 9.7 dargestellte Rechteckfunktion sollen die komplexen Koeffizienten $\underline{\hat{c}}_n$ und daraus die reellen Koeffizienten $\hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ der Fourier-Reihen (9.31) bzw. (9.6) bestimmt werden.

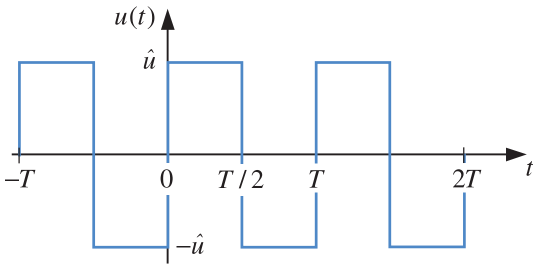


Abbildung 9.7: Rechteckförmiger periodischer Spannungsverlauf

Aus Gl. (9.33) erhalten wir das Integral

$$\begin{aligned}\underline{\hat{c}}_n &= \frac{\hat{u}}{T}\int_0^{T/2} e^{-jn\omega t}\,dt - \frac{\hat{u}}{T}\int_{T/2}^{T} e^{-jn\omega t}\,dt \\ &= \frac{\hat{u}}{-jn\omega T}\left[e^{-jn\omega T/2} - e^0 - e^{-jn\omega T} + e^{-jn\omega T/2}\right] = \frac{j\hat{u}}{n2\pi}\left[e^{-jn\pi} - 1 - 1 + e^{-jn\pi}\right].\end{aligned} \tag{9.35}$$

Die eckige Klammer verschwindet für gerade Werte n und liefert –4 für ungerade n. Die resultierenden komplexen Koeffizienten

$$\underline{\hat{c}}_n = -\frac{j2\hat{u}}{n\pi} \quad \text{mit} \quad n = \ldots -3, -1, 1, 3, \ldots \tag{9.36}$$

sind rein imaginär. Mit Gl. (9.34) erhalten wir die reellen Koeffizienten

$$a_0 = 0, \quad \hat{a}_n = 2\,\mathrm{Re}\{\underline{\hat{c}}_n\} = 0 \quad \text{und} \quad \hat{b}_n = -2\,\mathrm{Im}\{\underline{\hat{c}}_n\} = \frac{4\hat{u}}{n\pi} \tag{9.37}$$

und daraus die Reihenentwicklung in Normalform

$$u(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \ldots\right]. \tag{9.38}$$

Im Zusammenhang mit den Fourier-Entwicklungen in den beiden vorangegangenen Beispielen fallen einige Besonderheiten auf, auf die wir etwas detaillierter eingehen wollen:

- Die Berechnung der Koeffizienten (9.21) ist unter Umständen recht aufwändig. Da aber nicht immer alle Koeffizienten benötigt werden (siehe Gl. (9.25)), werden wir uns im nächsten Kapitel mit den Kriterien beschäftigen, unter denen eine vereinfachte Berechnung möglich ist.
- Zur exakten Darstellung der Ausgangsfunktion werden theoretisch unendlich viele Oberschwingungen benötigt. Für eine Auswertung können aber immer nur endlich viele Glieder der Summe berücksichtigt werden. Je schneller die Amplituden der Oberschwingungen abklingen, desto weniger Glieder aus der Summe müssen zur Unterschreitung einer gegebenen Fehlerschranke tatsächlich berücksichtigt werden. Diese Konvergenzfragen stehen insbesondere für die Praxis nicht so sehr im Vordergrund und sind auch für das Verständnis der weiteren Kapitel nicht unbedingt erforderlich. Die Frage, wie der Verlauf der zeitabhängigen Ausgangsfunktion die Konvergenz der Reihenentwicklung und damit den Fehler beeinflusst, der bei einem Abbruch der Summation nach n_{max} Gliedern entsteht, ist daher für den interessierten Leser in Kap. G im Anhang beantwortet.

9.2.2 Vereinfachungen bei der Bestimmung der Fourier-Koeffizienten

In Gl. (9.25) haben wir mit großem Aufwand das triviale Ergebnis $\hat{b}_n = 0$ berechnet. Hätten wir das nicht einfacher haben können? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns die Bedeutung der einzelnen Funktionen in der Fourier-Entwicklung (9.6) etwas näher ansehen.

Beginnen wir mit dem Gleichanteil a_0. Die Bestimmungsgleichung für diesen Koeffizienten ist identisch mit der Gl. (7.8) zur Berechnung des Mittelwertes der gegebenen Funktion. Das zu bildende Integral entspricht der Fläche, die zwischen der Funktion und der horizontalen Achse eingeschlossen ist (vgl. ▶Abb. 9.8). Das Rechteck mit der festen Seitenlänge T und der zu bestimmenden Seitenlänge a_0 besitzt den gleichen Flächeninhalt. Sind also gleich große Flächen oberhalb und unterhalb der horizontalen Achse zwischen der Funktion und der Achse eingeschlossen, dann verschwindet das Integral und es gilt $a_0 = 0$. Diese Situation ist in vielen Fällen unmittelbar an dem Verlauf der gegebenen Funktion zu erkennen, wenn diese z.B. symmetrisch zur horizontalen Achse verläuft (vgl. z.B. die Rechteckfunktion in Abb. 9.7).

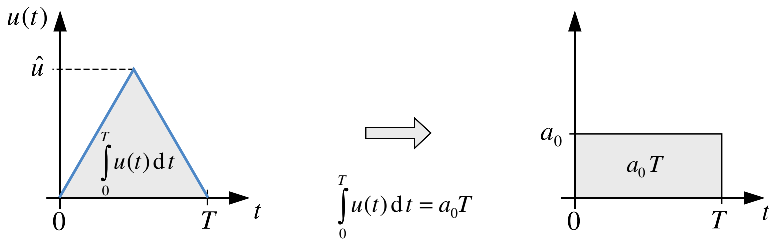


Abbildung 9.8: Zur Berechnung des Mittelwertes

Symmetrieeigenschaften

Subtrahieren wir von der Ausgangsfunktion den Gleichanteil, dann muss die verbleibende Kurvenform allein durch die Sinus- und Kosinusfunktionen beschrieben werden. Die Frage, welche der Koeffizienten $\hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ in der Fourier-Reihe benötigt werden, hängt entscheidend von den Symmetrieeigenschaften der gegebenen Funktion ab. Betrachten wir unter diesem Aspekt zunächst die trigonometrischen Funktionen.

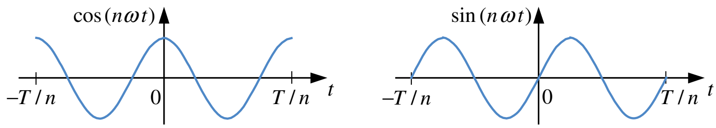


Abbildung 9.9: Gerade und ungerade Funktion

Aus der Abbildung ist unschwer zu erkennen, dass die Kosinusfunktionen **symmetrisch** bezüglich der vertikalen Achse sind, d.h. es gilt

$$\cos(n\omega t) = \cos(-n\omega t)\,. \tag{9.39}$$

Allgemein wird eine Funktion mit der Eigenschaft $u(t) = u(-t)$ als **gerade Funktion** bezeichnet. Diese Namensgebung hängt damit zusammen, dass ganze rationale Funktionen mit ausschließlich geraden Exponenten diese Eigenschaft aufweisen. Die Konstante a_0 ist in diesem Sinne auch eine gerade Funktion, man könnte sie wegen $a_0 \cos(0\,\omega t) = a_0$ auch als ein Glied der Summe mit dem Zählindex $n = 0$ auffassen. Die in Gl. (9.39) beschriebene Eigenschaft heißt **Symmetrie erster Art**.

Demgegenüber sind die Sinusfunktionen **schiefsymmetrisch** bezüglich der vertikalen Achse, d.h. es gilt

$$\sin(n\omega t) = -\sin(-n\omega t)\,. \tag{9.40}$$

Funktionen mit der Eigenschaft $u(t) = -u(-t)$ werden als **ungerade Funktionen** bezeichnet, da ganze rationale Funktionen mit ausschließlich ungeraden Exponenten genau dieses Verhalten aufweisen. In diesem Fall spricht man von der **Symmetrie zweiter Art**.

In welcher Weise können uns diese unterschiedlichen Eigenschaften der beiden Funktionen jetzt weiterhelfen? Zunächst gilt die für die einzelne Kosinusfunktion geltende Eigenschaft (9.39) auch für die Summe aller Kosinusfunktionen in der Fourier-Entwicklung (9.6), einschließlich des Gleichanteils. Es ist leicht einzusehen, dass durch diese Summe gerader Funktionen auch nur eine andere gerade Funktion dargestellt werden kann. Ebenso kann durch die Summe aller Sinusfunktionen mit der Eigenschaft (9.40) auch nur eine andere ungerade Funktion dargestellt werden. Daraus lässt sich folgender Umkehrschluss ziehen:

Merke

Bei der Entwicklung einer *geraden* Funktion in eine Fourier-Reihe verschwinden alle Koeffizienten $\hat{b}_n$, bei der Entwicklung einer *ungeraden* Funktion in eine Fourier-Reihe verschwinden die Koeffizienten a_0 und $\hat{a}_n$.

Außerdem lässt sich in beiden Fällen der Integrationsbereich halbieren. Das Produkt aus einer geraden Funktion $u(t)$ mit der geraden Kosinusfunktion in Gl. (9.21) ist wieder eine gerade Funktion. Ebenso ist das Produkt aus einer ungeraden Funktion mit der ungeraden Sinusfunktion eine gerade Funktion. Berechnen wir also das Integral nicht über den Bereich $0 \le t \le T$, sondern über den Bereich $-T/2 \le t \le T/2$, dann ist in beiden Fällen wegen der Integration einer jeweils geraden Funktion unmittelbar zu erkennen, dass die beiden Teilbereiche $-T/2 \le t \le 0$ und $0 \le t \le T/2$ den gleichen Beitrag zum Integral liefern. Bei der Berechnung der Koeffizienten kann also der doppelte Wert der Integrale über den Bereich $0 \le t \le T/2$ genommen werden (vgl. Tab. 9.1).

Betrachten wir jetzt noch einmal die Abb. 9.6. Da es sich hier um eine gerade Funktion handelt, hätten wir uns die Berechnung der Koeffizienten $\hat{b}_n$ in Gl. (9.25) mit den Kenntnissen aus diesem Abschnitt ersparen können und bei der Berechnung der Koeffizienten $\hat{a}_n$ in Gl. (9.24) hätten wir nur das erste Integral berechnen müssen.

Eine weitere Symmetrieeigenschaft liegt vor, wenn eine Funktion die Bedingung $u(t) = -u(t + T/2)$ erfüllt. In diesem Fall spricht man von **Halbwellensymmetrie** oder von der **Symmetrie dritter Art**. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft kann auch nur durch trigonometrische Funktionen dargestellt werden, die die gleiche Eigenschaft aufweisen, d.h. für die Funktionen in der Fourier-Reihe muss gelten

$$\cos(n\omega t) = -\cos\left[n\omega\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] \quad \text{und} \quad \sin(n\omega t) = -\sin\left[n\omega\left(t + \frac{T}{2}\right)\right]. \tag{9.41}$$

Mithilfe der Additionstheoreme (H.4) und (H.5) lässt sich zeigen, dass diese Bedingungen nur für ungerade n erfüllt sind, d.h. bei Halbwellensymmetrie verschwinden die Koeffizienten a_0 sowie $\hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ für $n = 2,4, \ldots$. Auch in diesem Fall kann der doppelte Wert der Integrale über den Bereich $0 \le t \le T/2$ genommen werden.

Tritt bei einer geraden oder ungeraden Funktion gleichzeitig Halbwellensymmetrie auf, dann liegt eine **Symmetrie vierter Art** vor. In diesen Fällen verschwinden die entsprechenden Koeffizienten infolge der Eigenschaft gerade oder ungerade und zusätzlich alle Koeffizienten mit gerader Ordnungszahl. Das Integrationsintervall kann auf den Bereich $0 \le t \le T/4$ beschränkt werden, wenn das Integral mit dem Faktor 4 multipliziert wird.

Die verschiedenen Möglichkeiten sind für beispielhafte Kurvenverläufe und mit den dazugehörigen Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten in Tab. 9.1 zusammengestellt[2].

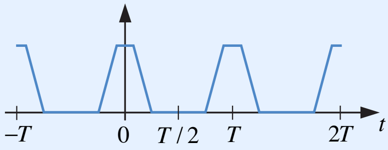
2 Bei den in Tab. 9.1 betrachteten Symmetrien tritt kein Fall auf, bei dem die Koeffizienten ausschließlich gerade Ordnungszahlen aufweisen, im Gegensatz zu der Fourier-Entwicklung Nr. 13 in Tab. H.1. Eigentlich handelt es sich in diesem Fall auch nicht um eine Symmetrie, sondern die Bezeichnung T wurde in Abwandlung der üblichen Vorgehensweise für zwei komplette Periodendauern verwendet. Die Ursache ist darin begründet, dass diese Funktion durch Gleichrichtung, z.B. aus der 50-Hz-Netzwechselspannung, entsteht. Da gleichzeitig Netzspannung und gleichgerichtete Spannung in einer Schaltung existieren, bezieht man üblicherweise alle Signale auf die gleiche Periodendauer. Mit der Beibehaltung von $T = 20\text{ms}$ besteht die Fourier-Reihe dann aus den geradzahligen Oberschwingungen der Netzfrequenz. In der gleichen Weise wird bei dem gleichgerichteten Dreiphasenstrom (Nr. 16 in Tab. H.1) die Periodendauer der Netzfrequenz beibehalten, obwohl die Frequenz der Grundschwingung bei dieser Kurvenform um den Faktor 3 größer ist und die Periodendauer nur $T/3$ beträgt.

Tabelle 9.1

Symmetrieeigenschaften von Funktionen

Symmetrieeigenschaft | **Eigenschaften der Koeffizienten**

Gerade Funktion

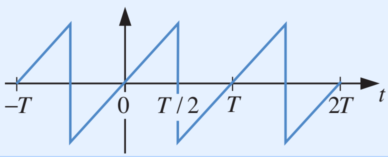


$$u(t) = u(-t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\hat{a}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \hat{b}_n = 0$$

Ungerade Funktion

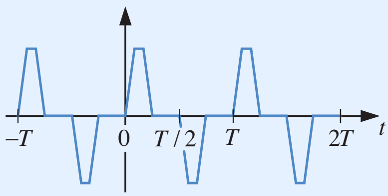


$$u(t) = -u(-t)$$

$$a_0 = 0\,, \quad \hat{a}_n = 0$$

$$\hat{b}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Halbwellensymmetrie



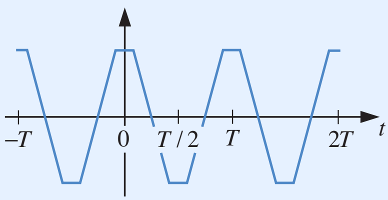
$$u(t) = -u(t + T/2)$$

$$a_0 = 0\,, \quad \hat{a}_{2n} = 0\,, \quad \hat{b}_{2n} = 0$$

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos\left[(2n-1)\omega t\right]\mathrm{d}t$$

$$\hat{b}_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin\left[(2n-1)\omega t\right]\mathrm{d}t$$

Gerade Funktion mit Halbwellensymmetrie



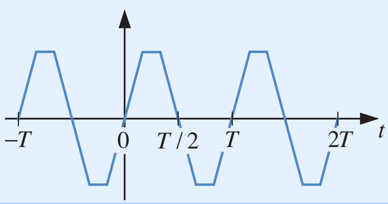
$$u(t) = u(-t) = -u(t + T/2)$$

$$a_0 = 0\,, \quad \hat{a}_{2n} = 0$$

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} u(t)\cos\left[(2n-1)\omega t\right]\mathrm{d}t$$

$$\hat{b}_n = 0$$

Ungerade Funktion mit Halbwellensymmetrie



$$u(t) = -u(-t) = -u(t + T/2)$$

$$a_0 = 0\,, \quad \hat{a}_n = 0\,, \quad \hat{b}_{2n} = 0$$

$$\hat{b}_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} u(t)\sin\left[(2n-1)\omega t\right]\mathrm{d}t$$

Bei manchen Funktionen sind die Symmetrieeigenschaften zunächst nicht unmittelbar zu erkennen, da sie infolge eines Gleichanteils entlang der vertikalen Achse verschoben sind. Betrachten wir die Sägezahnkurve in ▶Abb. 9.10, dann trifft auf diese Kurve keine der genannten Symmetrien zu. Zieht man aber den auf der rechten Seite der Abbildung gestrichelt dargestellten Gleichanteil ab, dann verbleibt eine ungerade Funktion. In der Fourier-Darstellung treten bei dieser Funktion keine Kosinusfunktionen auf und die Koeffizienten $\hat{a}_n$ verschwinden (vgl. Beispiel Nr. 3 in Tab. H.1). Die Entscheidung, ob es sich um eine gerade oder ungerade Funktion handelt, sollte also erst getroffen werden, nachdem der Gleichanteil abgespalten wurde.

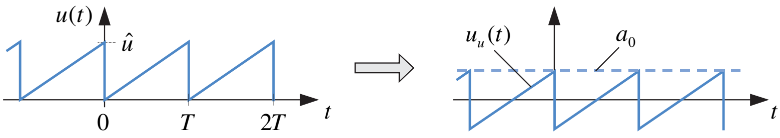


Abbildung 9.10: Ungerade Funktion mit überlagertem Gleichanteil

Erzeugung gerader und ungerader Funktionen durch Achsenverschiebung

Der Aufwand bei der Berechnung der Koeffizienten kann in vielen Fällen durch einfache Verschiebung der Funktion entlang der horizontalen Achse reduziert werden. Betrachten wir als Beispiel die Rechteckfunktion mit verschwindendem Mittelwert in ▶Abb. 9.11a. Bei dieser Festlegung des Nullpunktes treten sowohl gerade als auch ungerade Anteile auf, d.h. es müssen beide Integrale zur Bestimmung von $\hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ berechnet werden.

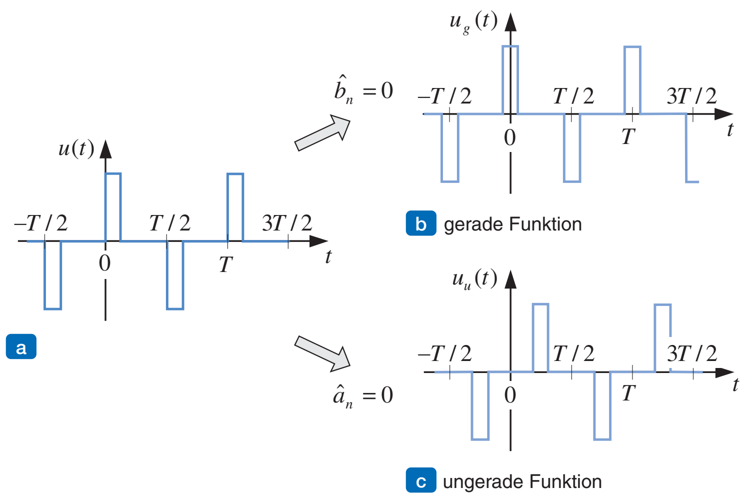


Abbildung 9.11: Vereinfachte Koeffizientenberechnung durch geänderte Festlegung des Nullpunktes

Wird der Nullpunkt jedoch so wie in Teilbild b gewählt, dann erhalten wir eine gerade Funktion und die Koeffizienten $\hat{b}_n$ verschwinden. Mit der Wahl des Nullpunktes entsprechend Teilbild c wird die Ausgangsfunktion zur ungeraden Funktion und die Berechnung der Koeffizienten $\hat{a}_n$ entfällt.

Zerlegung einer Funktion in ihren geraden und ungeraden Anteil

Im allgemeinen Fall lässt sich eine periodische Funktion jedoch nicht allein durch gerade oder ungerade Anteile beschreiben (vgl. ▶Abb. 9.12). Bei der Entwicklung in eine Fourier-Reihe werden dann sowohl die Kosinusfunktionen als auch die Sinusfunktionen benötigt. In manchen Fällen wird die Berechnung der Koeffizienten aber dadurch erleichtert, dass die Ausgangsfunktion $u(t)$ vorab in ihren geraden $u_g(t)$ und ihren ungeraden Anteil $u_u(t)$ zerlegt wird, insbesondere dann, wenn die Fourier-Entwicklungen der Funktionen $u_g(t)$ bzw. $u_u(t)$ bereits tabellarisch erfasst sind. Eine erneute Berechnung der betreffenden Koeffizienten ist dann nicht mehr erforderlich.

Zur Aufspaltung einer Funktion in die beiden Anteile können die folgenden Beziehungen verwendet werden

$$u(t) = u_g(t) + u_u(t) \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} u_g(t) &= \frac{1}{2}\left[u(t) + u(-t)\right] \\ u_u(t) &= \frac{1}{2}\left[u(t) - u(-t)\right] \end{aligned} . \tag{9.42}$$

Zur Überprüfung dieser Aussage bilden wir zunächst die Summe der beiden Funktionen $u_g(t)$ und $u_u(t)$ und erhalten richtig die Ausgangsfunktion $u(t)$. Da die beiden angegebenen Funktionen auf der rechten Seite der Gleichung außerdem die Bedingungen $u_g(t) = u_g(-t)$ und $u_u(t) = -u_u(-t)$ erfüllen, handelt es sich dabei tatsächlich um die Zerlegung in eine gerade und eine ungerade Funktion.

Beispiel 9.3: Zerlegung in geraden und ungeraden Anteil

Die in Abb. 9.12 dargestellte Funktion

$$u(t) = 2\hat{u} \cdot \begin{cases} t/T & \text{für} \quad 0 \le t \le T/2 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad T/2 < t \le T \end{cases} \tag{9.43}$$

soll in die beiden Teilfunktionen $u_g(t)$ und $u_u(t)$ zerlegt werden.

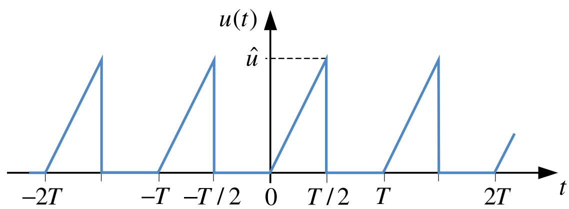


Abbildung 9.12: Ausgangsfunktion für die Zerlegung in geraden und ungeraden Anteil

Nach Gl. (9.42) werden dazu die Funktionen $u(t)/2$ und $u(-t)/2$ benötigt. Diese sind in den beiden oberen Diagrammen der ▶Abb. 9.13 dargestellt. Die Funktion $u(-t)/2$ erhält man auf anschauliche Weise aus der Funktion $u(t)/2$, indem die Variable t durch $-t$ ersetzt, d.h. die Funktion $u(t)/2$ an der vertikalen Achse gespiegelt wird.

Jetzt muss nur noch die Summe bzw. die Differenz dieser beiden Funktionen gebildet werden, um $u_g(t)$ bzw. $u_u(t)$ zu erhalten.

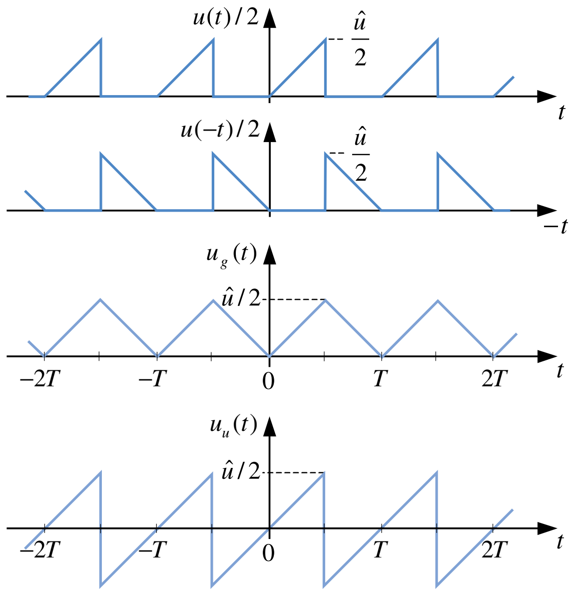


Abbildung 9.13: Beispiel für die Zerlegung einer periodischen Funktion in ihren geraden und ungeraden Anteil

Die Funktion $u_g(t)$ entspricht der bereits bekannten Dreiecksfunktion, jetzt allerdings mit halber Amplitude, deren Koeffizienten a_0 und $\hat{a}_n$ bereits in Gl. (9.26) angegeben sind. Für die noch durchzuführende Berechnung der Koeffizienten $\hat{b}_n$ integrieren wir die Sägezahnkurve $u_u(t) = \hat{u}\,t/T$ in Abb. 9.13 über den Bereich $0 \le t \le T/2$ entsprechend Tab. 9.1

$$\begin{aligned}\hat{b}_n &= \frac{4\,\hat{u}}{T^2}\int_0^{T/2} t\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{(H.17)}}{=} \frac{4\,\hat{u}}{T^2}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2} - \frac{t\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2} \\ &= \frac{4\,\hat{u}}{T^2}\left[-\frac{T\cos(n\pi)}{2n\omega}\right] = -\frac{\hat{u}}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{\hat{u}}{n\pi}(-1)^{n+1}\,.\end{aligned} \tag{9.44}$$

Zusammenfassend erhalten wir die Fourier-Entwicklung der Funktion (9.43) durch Überlagerung der Ergebnisse (9.26) unter Berücksichtigung des Faktors 1/2 und der Sinusfunktionen mit den Amplituden aus Gl. (9.44)

$$\begin{aligned}u(t) &= \frac{\hat{u}}{4} - \frac{2\hat{u}}{\pi^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + \ldots\right] \\ &\quad + \frac{\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\sin(\omega t)}{1} - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} - \frac{\sin(4\omega t)}{4} + - \ldots\right].\end{aligned} \tag{9.45}$$

9.2.3 Tabellarische Zusammenstellung wichtiger Fourier-Reihen

Für einige in der Elektrotechnik häufig vorkommende Funktionen ist die Fourier-Entwicklung in Kap. H.3 im Anhang angegeben.

Einfache Herleitung weiterer Fourier-Reihen

Zur Herleitung weiterer Reihen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Es ist nicht unbedingt erforderlich, die Koeffizienten nach Gl. (9.21) jeweils neu zu berechnen. Oft lassen sich die Kurvenformen aus den bereits tabellarisch erfassten Funktionen erzeugen. Sehr vielfältige Möglichkeiten ergeben sich z.B. durch lineare Überlagerung. Die Entwicklung der durch Einweggleichrichtung entstandenen Funktion Nr. 15 (vgl. Tab. H.1) erhält man z.B. aus der Addition der Reihe Nr. 13 mit einer Sinusfunktion (linke Seite der ▶Abb. 9.14) und anschließender Halbierung des Ergebnisses (vgl. auch die Koeffizienten bei den genannten Beispielen in der Tab. H.1).

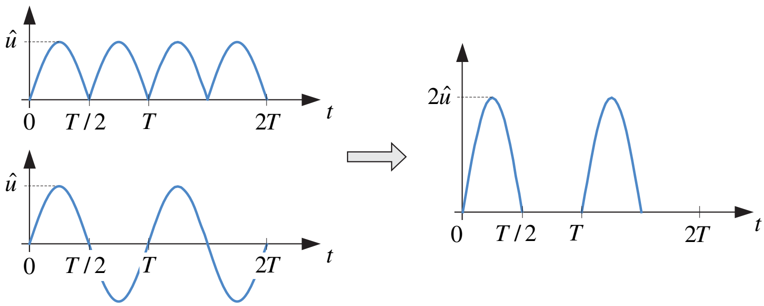


Abbildung 9.14: Überlagerung bekannter Reihenentwicklungen

Insbesondere mit der Zeitfunktion Nr. 10 und den daraus abgeleiteten Sonderfällen Nr. 11 und 12 in der Tabelle lassen sich kompliziertere, stückweise lineare Funktionsverläufe zusammensetzen.

In manchen Fällen muss eine Funktion zunächst auf der Zeitachse verschoben werden, bevor sie mit anderen Funktionen überlagert wird. Bei einer Verschiebung der Kurvenform $u(t)$ um die Zeitspanne t_0 muss t durch $(t - t_0)$ ersetzt werden. Der bisherige Punkt $u(t = 0)$ wandert auf der Zeitachse nach rechts an die Stelle $u(t = t_0)$. Durch Einsetzen dieser Zeitverschiebung in die Fourier-Entwicklung (9.6) und anschließende Anwendung der Additionstheoreme (H.4) und (H.5) erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} u(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{a}_n \cos\left(n\omega(t-t_0)\right) + \hat{b}_n \sin\left(n\omega(t-t_0)\right) \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\hat{a}_n \cos\left(n\omega t_0\right) - \hat{b}_n \sin\left(n\omega t_0\right) \right] \cos\left(n\omega t\right) \right. \\ &\qquad \left. + \left[\hat{a}_n \sin\left(n\omega t_0\right) + \hat{b}_n \cos\left(n\omega t_0\right) \right] \sin\left(n\omega t\right) \right\}, \end{aligned} \tag{9.46}$$

aus der die Vorschrift zur Berechnung der neuen, in eckigen Klammern stehenden, Koeffizienten direkt abgelesen werden kann.

Beispiel 9.4: Verschiebung auf der Zeitachse

Ausgehend von der Reihenentwicklung Nr. 13 soll die Fourier-Entwicklung für die gleichgerichtete Kosinusfunktion (Nr. 14) abgeleitet werden.

In der Entwicklung Nr. 13 verschwinden die Koeffizienten $\hat{b}_n = 0$ und n nimmt nur gerade Werte an. Wegen der Verschiebung um $t_0 = T/4$ bzw. $\omega t_0 = \pi/2$ gelten für die neuen Koeffizienten die Beziehungen

$$\hat{a}_{n,neu} = \hat{a}_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 0 = (-1)^{n/2}\,\hat{a}_n \quad \text{und} \quad \hat{b}_{n,neu} = 0 + 0\,. \tag{9.47}$$

9.2.4 Die Linienspektren

Mit der Harmonischen Analyse haben wir eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung einer periodischen Funktion kennen gelernt. Einerseits lässt sich die Funktion in der Form $u(t)$, also im *Zeitbereich*, mathematisch beschreiben und auch entsprechend grafisch darstellen, andererseits ist aber die gleiche Information in anderer Form auch in der Reihenentwicklung enthalten. Bei der Fourier-Reihe wird die Funktion charakterisiert durch die Amplituden und Phasen der einzelnen Harmonischen und zwar bei der Frequenz der Grundschwingung und bei den Vielfachen dieser Frequenz, d.h. bei den Oberschwingungen. Man spricht in diesem Fall von der Darstellung der Funktion im *Frequenzbereich*. In der dazugehörigen grafischen Darstellung werden dann die Amplituden $\hat{c}_n$ nach Gl. (9.7) bzw. die Phasen φ_n oder ψ_n als Funktion der Frequenz aufgetragen. Da sich in diesem Fall nur diskrete Werte bei der Grundfrequenz und deren Vielfachen ergeben, erhalten wir ein so genanntes **Linienspektrum**, im konkreten Fall also ein **Amplitudenspektrum** bzw. ein **Phasenspektrum**. Der Gleichanteil a_0 wird gegebenenfalls beim Amplitudenspektrum mit eingezeichnet.

In vielen praktischen Situationen wie z.B. bei der Verlustberechnung oder der Untersuchung der gegenseitigen Beeinflussung von Schaltungen und Systemen (Elektromagnetische Verträglichkeit) spielen insbesondere die *Amplituden* der Oberschwingungen eine bedeutende Rolle. Aus diesem Grund kann auch die Berechnung der Koeffizienten der Fourier-Entwicklung durch Achsenverschiebung vereinfacht werden (vgl. Abb. 9.11), da sich die Amplituden (9.10) durch diese Maßnahme nicht ändern. Will man jedoch aus den Spektren die Zeitfunktion wieder zusammensetzen, dann wird auch das Phasenspektrum benötigt.

Die beiden Darstellungsarten sind am Beispiel der Dreiecksfunktion in ▶Abb. 9.15 nochmals gegenübergestellt. Das schnelle Abklingen der höheren Harmonischen im Amplitudenspektrum deutet darauf hin, dass nur wenige Glieder aus der Fourier-Entwicklung benötigt werden, um eine gute Annäherung an die Ausgangskurve zu erreichen.

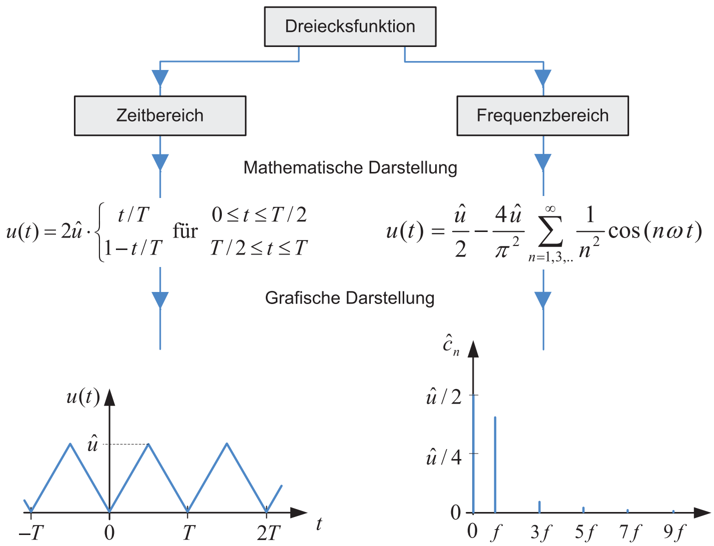


Abbildung 9.15: Darstellung der Dreiecksfunktion im Zeit- und Frequenzbereich

9.3 Anwendung der Fourier-Reihen in der Schaltungsanalyse

9.3.1 Der Ablaufplan

Die Vorgehensweise bei der Analyse linearer Netzwerke, die an zeitlich periodische Strom- und Spannungsquellen angeschlossen sind, ist als Ablaufplan in ▶Abb. 9.16 nochmals zusammengestellt.

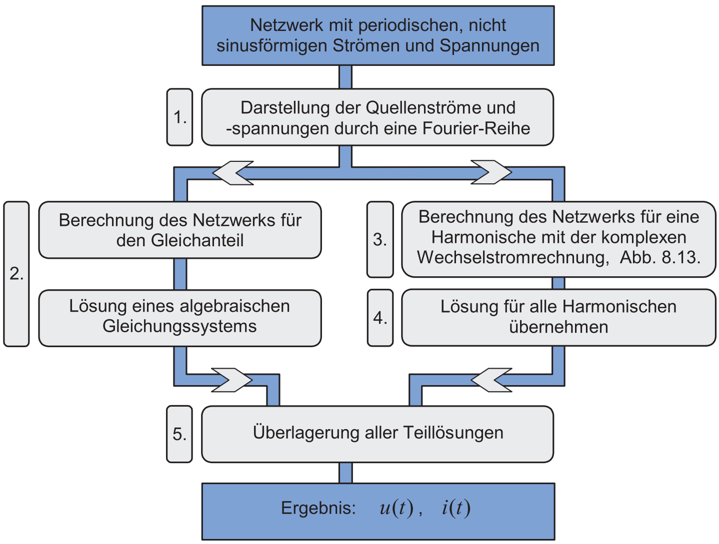


Abbildung 9.16: Berechnungsschema bei periodischen, nicht sinusförmigen Quellen

1. Im ersten Schritt wird die periodische Signalform in eine Fourier-Reihe (9.6) entwickelt. Dies kann mithilfe der Tabellen in Kap. H.3 oder durch Berechnung der Koeffizienten nach Gl. (9.21) oder Gl. (9.33) erfolgen.

2. Sofern die Reihe einen Gleichanteil a_0 enthält, wird das Netzwerk für den Gleichstrom bzw. für die Gleichspannung berechnet. Induktivitäten werden in diesem Fall durch einen Kurzschluss, Kapazitäten durch einen Leerlauf ersetzt.

3. Die Quelle wird durch eine einfache Wechselstrom- bzw. Wechselspannungsquelle ersetzt und das Netzwerk wird mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung bei der angenommenen Amplitude und Kreisfrequenz ω analysiert.

4. Die Lösung aus der komplexen Wechselstromrechnung wird für alle Harmonischen mit den entsprechenden Amplituden aus der Fourier-Reihe und den zugehörigen Kreisfrequenzen $n\omega$ übernommen.

5. Die Gesamtlösung ergibt sich durch Überlagerung aller Teillösungen. Befinden sich mehrere Quellen im Netzwerk, dann werden die bisherigen Schritte für alle Quellen durchgeführt und die Lösungen für die einzelnen Quellen wiederum überlagert.

9.3.2 Eine einfache Schaltung

Nachdem wir in den vorangegangenen Kapiteln die verschiedenen Aspekte der Fourier-Entwicklung untersucht haben, soll ihre Anwendung an einer konkreten Schaltung demonstriert werden. Die *RL*-Reihenschaltung in ▶Abb. 9.17 wird an eine gleichgerichtete Wechselspannung $u(t)=\hat{u}\left|\sin(\omega t)\right|$ angeschlossen. Der in diesem Netzwerk fließende zeitabhängige Strom $i(t)$ soll berechnet werden.

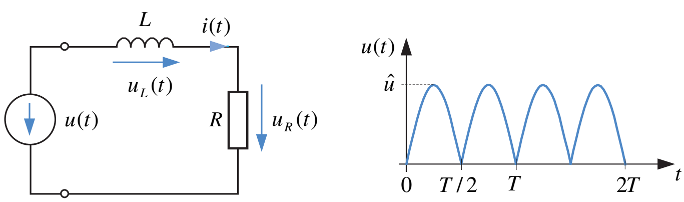


Abbildung 9.17: *RL*-Reihenschaltung an gleichgerichteter Wechselspannung

Schritt 1:

Der Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist die in Tab. H.1 Nr. 13 angegebene Fourier-Darstellung der gleichgerichteten Spannung

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} + \dots\right] \\
&= \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi}\sum_{n=2,4,..}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\cos(n\omega t)\,.
\end{aligned}
\tag{9.48}
$$

Schritte 2 bis 5:

Der Unterschied zur Gl. (9.1) besteht jetzt lediglich darin, dass die Summe (9.48) unendlich viele Glieder enthält, die wir uns als Reihenschaltung unendlich vieler Einzelquellen entsprechend Abb. 9.1 vorstellen können. Damit erhalten wir für den Strom ebenfalls eine unendliche Summe, die wir in Analogie zur Gl. (9.2) bereits angeben können

$$i(t) = \frac{2\hat{u}}{R\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=2,4,..}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)\sqrt{R^2+(n\omega L)^2}} \cos\left(n\omega t - \arctan\frac{n\omega L}{R}\right). \tag{9.49}$$

Auswertung des Ergebnisses:

Wir wollen jetzt den zeitabhängigen Strom für drei unterschiedliche Werte der Induktivität auswerten. Betrachten wir zunächst den Grenzfall $L = 0$. Bei nicht vorhandener Induktivität vereinfacht sich die Beziehung (9.49) und wir erhalten den erwarteten Zusammenhang $i(t) = u(t)/R$. Der Strom hat den gleichen zeitlichen Verlauf wie die in Abb. 9.17 dargestellte Spannung. Im anderen Grenzfall $L \to \infty$ verschwindet jedes Glied der Summe in Gl. (9.49) und der Strom nimmt den zeitlich konstanten, in Gl. (7.10) berechneten Gleichrichtwert an. Auch diese Situation ist leicht einzusehen, da die Impedanz der Reihenschaltung $R + j\omega L$ für alle Frequenzen unendlich groß wird und somit nur noch ein Gleichstrom fließen kann.

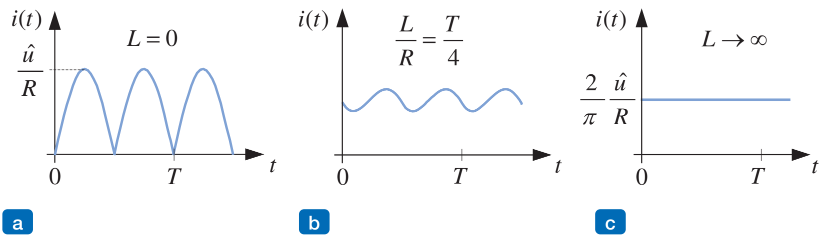


Abbildung 9.18: Stromverlauf in der *RL*-Reihenschaltung bei verschiedenen Induktivitäten

Wird die Induktivität ausgehend von dem Anfangswert $L = 0$ erhöht, dann muss sich auch der Strom ausgehend von der Kurvenform der Spannung in ▶Abb. 9.18a in Richtung auf den konstanten Wert in ▶Abb. 9.18c ändern. Wird die Induktivität so gewählt, dass das Verhältnis L/R einem Viertel der Periodendauer entspricht, dann nimmt der Strom den in ▶Abb. 9.18b dargestellten Verlauf an.

Infolge der frequenzabhängigen Impedanz der Reihenschaltung weicht die periodische, zeitabhängige Stromform wesentlich von der Spannungsform ab. Der Anteil der Oberschwingungen ist beim Strom deutlich geringer, d.h. die Induktivität wirkt wegen der mit der Frequenz zunehmenden Impedanz glättend auf den Strom. Wir erkennen hier wieder das Verhalten der *RL*-Tiefpass-Schaltung in Abb. 8.24, deren Amplitudengang in Abb. 8.25 dargestellt ist.

Man beachte, dass bei den vorausgesetzten linearen Komponenten keine zusätzlichen Harmonischen entstehen, im Gegensatz zu Schaltungen mit nichtlinearen Komponenten. Die Stromverformung wird allein durch die stärkere Dämpfung der höheren Harmonischen verursacht.

9.3.3 Die Erzeugung von Subharmonischen

Bei einigen in der Praxis verwendeten Schaltungen führt die spezielle Betriebsweise dazu, dass trotz einer eingangs angeschlossenen sinusförmigen Spannungsquelle mit vorgegebener Frequenz f innerhalb der Schaltung Strom- und Spannungsverläufe entstehen, deren Spektrum sich nicht nur aus der Frequenz f und deren Vielfachen nf zusammensetzt, sondern es entstehen auch Spektralanteile unterhalb von f. Wir sprechen in diesem Fall von Subharmonischen. Zur Illustration betrachten wir eine einfache Schaltung zur Steuerung der Leistung an einem ohmschen Verbraucher, der an das Wechselspannungsnetz angeschlossen ist.

Beispiel 9.5: Pulspaketsteuerung

Ein Heizwiderstand R ist gemäß ▶Abb. 9.19 an die Netzwechselspannung $\hat{u}\sin(\omega t)$ mit $\omega = 2\pi \cdot 50\text{Hz}$ angeschlossen. Zur Reduzierung der Heizleistung ist ein elektronischer Schalter S vorgesehen, der die Verbindung zwischen Quelle und Verbraucher jeweils für komplette Netzhalbwellen unterbrechen kann.

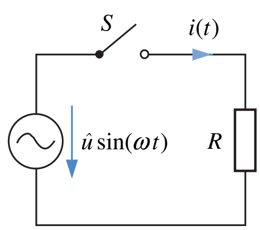


Abbildung 9.19: Steuerung der Verbraucherleistung mit einem Schalter

Aus der Vielzahl der Möglichkeiten wählen wir ein konkretes Beispiel mit festgelegtem Schaltmuster aus. Um die Leistung im Mittel auf 60 % des Maximalwertes abzusenken, wird der Schalter abwechselnd für drei Netzhalbwellen geschlossen und anschließend für zwei Netzhalbwellen geöffnet. Der dazugehörige Netzstrom ist in ▶Abb. 9.20 dargestellt.

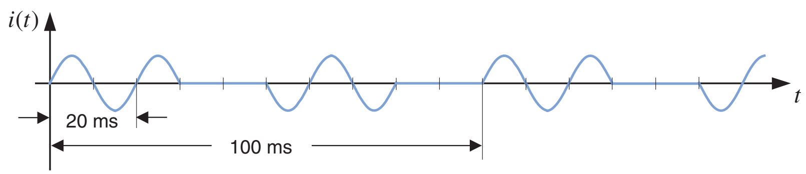


Abbildung 9.20: Pulsmuster des Netzstromes

Die Periodendauer der Quellenspannung beträgt $T = 1/50\text{Hz} = 20\text{ms}$. Für den Netzstrom trifft diese Periodendauer aber nicht mehr zu. Die Stromform wiederholt sich auf die gleiche Weise erst nach zehn Netzhalbwellen. Um Verwechslungen zu vermeiden, wollen wir die Periodendauer beim Strom mit τ bezeichnen. Wegen $\tau = 5T$ ist die Frequenz der Grundschwingung beim Strom $f = 1/\tau = 10\text{Hz}$ um den Faktor 5 geringer als die Frequenz der Netzwechselspannung. Die Oberschwingungen des Netzstromes treten also bei Vielfachen von 10Hz auf. Durch die besondere Betriebsweise dieser Schaltung werden Ströme auf den Netzleitungen erzeugt, mit Frequenzen sowohl unterhalb der Netzfrequenz (**Subharmonische**) als auch zwischen den Vielfachen von 50Hz (**Zwischenharmonische**).

Im nächsten Schritt wollen wir das Amplitudenspektrum des Netzstromes nach Abb. 9.20 berechnen. Die Anzahl der positiven und negativen Halbwellen des Stromes innerhalb der Periodendauer τ ist gleich, d.h. der Mittelwert verschwindet in jedem Fall und es gilt $a_0 = 0$. Zur Reduzierung des Rechenaufwandes verschieben wir die Zeitachse derart, dass entweder die Koeffizienten $\hat{a}_n$ oder $\hat{b}_n$ verschwinden. Mit der willkürlichen Wahl des Anfangspunktes $t = 0$ in ▶Abb. 9.21 erhalten wir eine ungerade Funktion und es gilt $\hat{a}_n = 0$.

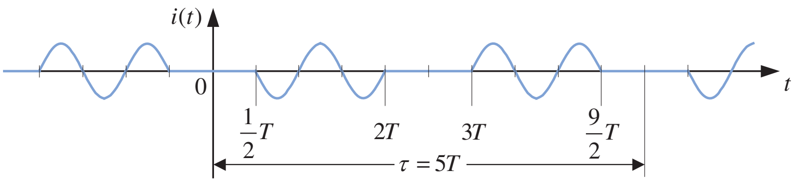


Abbildung 9.21: Erzeugung einer ungeraden Funktion durch Achsenverschiebung

Bei geschlossenem Schalter ist der Strom proportional zur Spannung und besitzt die Amplitude $\hat{i} = \hat{u}/R$. Er kann also im Zeitbereich folgendermaßen dargestellt werden

$$i(t) = \hat{i} \cdot \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{für} \quad T/2 \le t \le 2T \quad \text{und} \quad 3T \le t \le 9T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{9.50}$$

Im Frequenzbereich wird er ausschließlich durch Sinusfunktionen beschrieben, wobei die Periodendauer der Grundschwingung durch $\tau = 5T$ gegeben ist. Zur Unterscheidung von der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ der Netzspannung bezeichnen wir jetzt die Kreisfrequenz bei der Grundschwingung des Stromes mit $\tilde{\omega} = 2\pi/\tau = \omega/5$. Für die Fourier-Darstellung des Stromes gilt dann

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin(n\tilde{\omega}t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin\left(n 2\pi \frac{t}{\tau}\right). \tag{9.51}$$

Die Amplituden der Harmonischen erhalten wir durch Berechnung des folgenden Integrals, das aber nur in den Bereichen nicht verschwindenden Stromes einen Beitrag liefert

$$\hat{b}_n = \frac{4}{\tau}\int_0^{\tau/2} i(t)\sin(n\tilde{\omega}t)\,\mathrm{d}t = \frac{4\,\hat{i}}{\tau}\int_{T/2}^{2T}\sin(\omega t)\sin(n\tilde{\omega}t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{9.52}$$

Das Integral kann mit den Formeln in Kap. H.2 berechnet werden. Es ist jedoch darauf zu achten, dass für $n\tilde{\omega} = \omega$, d.h. für $n = 5$ die Beziehung (H.11) und für $n \neq 5$ die Beziehung (H.12) zu verwenden ist. Als Ergebnis erhalten wir die Koeffizienten

$$\hat{b}_n = \hat{i}\cdot\begin{cases} 0 & & n \ \text{gerade} \\ \dfrac{3}{5} & \text{für} & n = 5 \\ \dfrac{20}{\pi(n^2-25)}\sin\left(\dfrac{n\pi}{5}\right) & & n \ \text{ungerade und} \ n \neq 5 \end{cases}\,. \tag{9.53}$$

Zur Darstellung des Amplitudenspektrums werden entsprechend

$$\hat{c}_n \overset{(9.10)}{=} +\sqrt{\hat{a}_n{}^2 + \hat{b}_n{}^2} = \left|\hat{b}_n\right| \tag{9.54}$$

die Beträge der Koeffizienten (9.53) verwendet. Das Ergebnis ist in ▶Abb. 9.22 dargestellt.

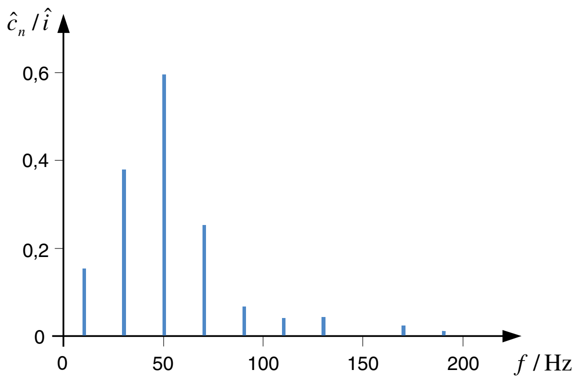


Abbildung 9.22: Amplitudenspektrum für den Strom in Abb. 9.20 bzw. 9.21

Diese Amplituden fallen im Bereich $n > 5$ sehr schnell mit wachsender Ordnungszahl ab. Es fällt auf, dass bei der Netzfrequenz 50Hz die Amplitude den Wert $\hat{b}_5 = 0{,}6\,\hat{i}$ annimmt, in Übereinstimmung mit der im Mittel auf 60 % des Maximalwertes reduzierten Leistung. Auf diese Besonderheit kommen wir in Beispiel 9.7 noch einmal zurück.

9.3.4 Effektivwert und Leistung

Die Berechnung der Verluste in einem ohmschen Widerstand erfordert nach Gl. (7.13) die Berechnung des Effektivwertes von Strom oder Spannung. Liegt die Spannung in ▶Abb. 9.23 in Form einer Fourier-Entwicklung nach Gl. (9.6) vor, dann muss entsprechend der Definition in Gl. (7.11) das Quadrat dieser Funktion über die Periodendauer integriert werden.

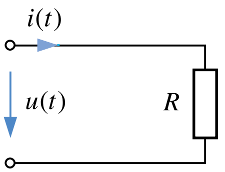


Abbildung 9.23: Verlustberechnung bei periodischem Spannungsverlauf

Für den Effektivwert gilt die Beziehung

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t}\overset{(9.6)}{=}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\left\{a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{a}_n\cos(n\omega t)+\hat{b}_n\sin(n\omega t)\right]\right\}^2\mathrm{d}t}\,. \tag{9.55}$$

Aufgrund der Orthogonalitätsrelation (9.13) liefern wieder nur die quadratischen Glieder einen Beitrag zum Integral, so dass der Effektivwert mithilfe der Fourier-Koeffizienten die resultierende Form

$$U=\sqrt{{a_0}^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left({\hat{a}_n}^2+{\hat{b}_n}^2\right)}\overset{(9.10)}{=}\sqrt{{a_0}^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\hat{c}_n}{\sqrt{2}}\right)^2} \tag{9.56}$$

annimmt (vgl. die **Parseval'sche Gleichung** (G.17) im Anhang). Zusammenfassend gilt die Aussage:

Merke

Das Quadrat des Effektivwertes einer als Fourier-Entwicklung vorliegenden Funktion ist gegeben durch die Summe aus dem Quadrat des Mittelwertes und den Quadraten der Effektivwerte aller Harmonischen. Die Phasenwinkel haben keinen Einfluss.

Der Effektivwert einer periodischen Funktion kann also einerseits mithilfe der Gl. (7.11) durch Integration über das Quadrat der zeitabhängigen Funktion berechnet werden, andererseits durch geometrische Addition der bekannten Fourier-Koeffizienten. Für die in Tab. H.1 aufgelisteten Beispiele sind die Effektivwerte jeweils mit angegeben.

Ausgehend von der Gl. (9.56) lässt sich ein weiteres Linienspektrum zur Charakterisierung der Leistungsverteilung angeben. Die Darstellung der Quadrate der Effektivwerte bei den einzelnen Harmonischen $({\hat{a}_n}^2+{\hat{b}_n}^2)/2$ wird als **Leistungsspektrum** bezeichnet.

Beispiel 9.6: Effektivwert und Leistungsspektrum einer Dreiecksfunktion

Für die in Abb. 9.6 dargestellte dreieckförmige periodische Spannung soll der Effektivwert bestimmt werden und zwar einerseits mit der zeitabhängigen Funktion nach Gl. (9.22) und andererseits mit der Fourier-Darstellung (9.26).

Ausgehend von Gl. (7.11) erhalten wir die Beziehung

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} u^2(t)\,\mathrm{d}t} \overset{(9.22)}{=} \sqrt{\frac{8\hat{u}^2}{T^3}\int_0^{T/2} t^2\,\mathrm{d}t} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}. \tag{9.57}$$

Das Einsetzen der Fourier-Koeffizienten in die Gl. (9.56) liefert zunächst ein Zwischenergebnis mit einer unendlichen Summe

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{a}_n{}^2 + \hat{b}_n{}^2\right)} \overset{(9.26)}{=} \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1,3,\,..}^{\infty}\left(\frac{-4\hat{u}}{\pi^2}\frac{1}{n^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{8\hat{u}^2}{\pi^4}\sum_{n=1,3,\,..}^{\infty}\frac{1}{n^4}} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{8\hat{u}^2}{\pi^4}\left[1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots\right]}\,. \end{aligned} \tag{9.58}$$

Mit dem in [3] angegebenen Summenwert der numerischen Reihe

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96} \tag{9.59}$$

erhalten wir wieder das gleiche Ergebnis

$$U = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{\hat{u}^2}{12}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}\,. \tag{9.60}$$

Liegt also diese dreieckförmige Spannung an einem Widerstand R, dann können die Verluste durch Einsetzen des aus der Tabelle bekannten Effektivwertes in die Beziehung (7.13) direkt angegeben werden

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{\hat{u}^2}{3R}\,. \tag{9.61}$$

Das Leistungsspektrum können wir unmittelbar der Gl. (9.58) entnehmen. Der Gleichanteil liefert den Beitrag $\hat{u}^2/4$. Die 1. Harmonische trägt $0{,}328\cdot\hat{u}^2/4$ und die 3. Harmonische nur noch $0{,}004\cdot\hat{u}^2/4$ zur Gesamtleistung bei. Zur Leistungsberechnung genügt bei dieser Kurvenform bereits der Gleichanteil mit der Grundschwingung. Alle höheren Harmonischen können vernachlässigt werden.

Mit der Beziehung (9.56) können die Verluste aber nur berechnet werden, wenn der Zweipol ein reiner Widerstand ist. Für den in ▶Abb. 9.24 dargestellten verallgemeinerten Fall eines beliebigen linearen Zweipols haben wir bereits in Kap. 8.8 aus der Kenntnis von Wechselspannung und Wechselstrom die Wirkleistung berechnet. Diese dort abgeleitete Beziehung soll jetzt auf den Fall eines periodischen, nicht sinusförmigen Verlaufs von Strom und Spannung erweitert werden.

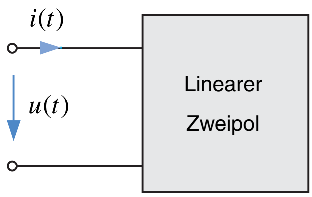


Abbildung 9.24: Leistungsbetrachtungen bei periodischen, nicht sinusförmigen Größen

Wir gehen davon aus, dass sowohl die Spannung als auch der Strom in Abb. 9.24 in der Normalform der Fourier-Entwicklung nach Gl. (9.6) vorliegen

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{u}_{g\,n}\cos(n\omega t) + \hat{u}_{u\,n}\sin(n\omega t)\right] \\ &= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{2}\,U_{g\,n}\cos(n\omega t) + \sqrt{2}\,U_{u\,n}\sin(n\omega t)\right] \\ i(t) &= I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{i}_{g\,n}\cos(n\omega t) + \hat{i}_{u\,n}\sin(n\omega t)\right] \\ &= I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{2}\,I_{g\,n}\cos(n\omega t) + \sqrt{2}\,I_{u\,n}\sin(n\omega t)\right]. \end{aligned} \tag{9.62}$$

Die Gleichanteile sollen mit U_0 und I_0 bezeichnet werden. Die Koeffizienten werden durch die Indizes g für die geraden und u für die ungeraden Anteile gekennzeichnet.

Die Momentanleistung entspricht dem Produkt der Augenblickswerte und kann durch Einsetzen der Gl. (9.62) für jeden Zeitpunkt angegeben werden. Zur Berechnung der Wirkleistung muss dieser Ausdruck nach Gl. (8.147) über eine komplette Periode integriert werden

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,i(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{9.63}$$

Dabei verschwinden aufgrund der Beziehung (9.13) wieder alle Mischglieder, so dass lediglich die Integration über die Quadrate der Funktionen auszuführen ist

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T\left\{U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{u}_{g\,n}\hat{i}_{g\,n}\cos^2(n\omega t) + \hat{u}_{u\,n}\hat{i}_{u\,n}\sin^2(n\omega t)\right]\right\}\mathrm{d}t\,. \tag{9.64}$$

Mit den Ergebnissen dieser Integrale nach Gl. (9.14) kann die Wirkleistung in der folgenden Form dargestellt werden

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{u}_{g\,n}\hat{i}_{g\,n} + \hat{u}_{u\,n}\hat{i}_{u\,n}\right] = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[U_{g\,n}I_{g\,n} + U_{u\,n}I_{u\,n}\right]. \tag{9.65}$$

Sie setzt sich zusammen aus dem Produkt der Gleichanteile (dies entspricht dem Gleichstromfall, wenn keine Harmonischen vorliegen) und den Produkten der Effektivwerte von Strom und Spannung für die Sinusfunktionen gleicher Frequenz und ebenso für die Kosinusfunktionen gleicher Frequenz.

Wir betrachten jetzt noch den zweiten Fall, bei dem die Fourier-Darstellung mit den in der Phase verschobenen Sinusfunktionen nach Gl. (9.7) vorliegt

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{u}_n \sin\left(n\omega t + \varphi_{u_n}\right) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,U_n \sin\left(n\omega t + \varphi_{u_n}\right) \\ i(t) &= I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{i}_n \sin\left(n\omega t + \varphi_{i_n}\right) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,I_n \sin\left(n\omega t + \varphi_{i_n}\right). \end{aligned} \tag{9.66}$$

Wird das Produkt dieser beiden Funktionen über die Periodendauer T integriert, dann verschwinden wegen Gl. (H.24) wieder alle Glieder mit unterschiedlichem Zählindex und es verbleiben nach Anwendung eines Additionstheorems zunächst nur zwei Integrale

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T U_0 I_0 \,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{u}_n\hat{i}_n \frac{1}{T}\int_0^T \sin\left(n\omega t + \varphi_{u_n}\right)\sin\left(n\omega t + \varphi_{i_n}\right)\mathrm{d}t\right] \\ &\overset{(\mathrm{H.6})}{=} U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\hat{u}_n\hat{i}_n}{2T}\left(\int_0^T \cos\left(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}\right)\mathrm{d}t - \int_0^T \cos\left(2n\omega t + \varphi_{u_n} + \varphi_{i_n}\right)\mathrm{d}t\right)\right], \end{aligned} \tag{9.67}$$

von denen das zweite keinen Beitrag liefert. Das Endergebnis

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{u}_n\hat{i}_n \cos\left(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}\right) = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos\left(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}\right) \tag{9.68}$$

hat die gleiche Form wie die Beziehung (8.158), mit dem Unterschied, dass jetzt über alle Harmonischen summiert wird. In dieser Darstellung sind die bisher betrachteten Fälle für reinen Gleichstrom oder Wechselstrom als Sonderfälle mit enthalten. Die beiden Beziehungen (9.65) und (9.68) sind natürlich gleichwertig und können mit den Formeln (9.10) bis (9.12) ineinander umgerechnet werden.

Das Ergebnis (9.68) hätten wir auch erhalten, wenn wir von der Fourier-Darstellung (9.7) mit den in der Phase verschobenen Kosinusfunktionen ausgegangen wären. Der Übergang von den Sinus- zu den Kosinusfunktionen bedeutet nach (H.5) eine Phasenverschiebung um jeweils $\pi/2$, die aber wegen der Differenzbildung im Argument der Kosinusfunktion (9.68) keinen Einfluss hat.

Merke

Die an einem linearen Zweipol entstehende Wirkleistung setzt sich zusammen aus dem Produkt der Gleichanteile (Mittelwerte) von Strom und Spannung sowie der Summe der Wirkleistungen bei allen Harmonischen.

Die Produkte aus Strom und Spannung unterschiedlicher Frequenzen tragen nicht zur Wirkleistung bei.

Die Scheinleistung wird genauso wie bereits in Gl. (8.164) als das Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung definiert und führt mit Gl. (9.56) auf das Ergebnis

$$S = U\,I = \sqrt{\left[U_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{\,2}\right]\left[I_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{\,2}\right]}\,. \tag{9.69}$$

In dem Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung treten Mischterme auf, d.h. die Scheinleistung kann nicht durch Addition der Scheinleistungen bei den einzelnen Harmonischen berechnet werden. Die Definition der Blindleistung folgt ebenfalls der Gl. (8.164)

$$Q^2 = S^2 - P^2\,. \tag{9.70}$$

Auch die Blindleistung besteht wegen der zusätzlich auftretenden gemischten Glieder nicht mehr allein aus der Summation der Beiträge

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n \hat{i}_n \sin\left(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin\left(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}\right) \tag{9.71}$$

bei den einzelnen Harmonischen entsprechend Gl. (8.159), sondern es tritt ein weiterer als **Verzerrungsblindleistung** D bezeichneter Anteil auf

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + \tilde{Q}^2 + D^2}\,. \tag{9.72}$$

Der Leistungsfaktor λ ist analog zur Gl. (8.165) aus dem Verhältnis von Wirkleistung zu Scheinleistung definiert

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos\left(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}\right)}{\sqrt{\left[U_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{\,2}\right]\left[I_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{\,2}\right]}}\,. \tag{9.73}$$

Für den Sonderfall, dass die Fourier-Entwicklung nur aus einer, z.B. der k-ten Harmonischen besteht, vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\lambda = \frac{U_k I_k \cos\left(\varphi_{u_k} - \varphi_{i_k}\right)}{\sqrt{U_k^{\,2} I_k^{\,2}}} = \cos\left(\varphi_{u_k} - \varphi_{i_k}\right), \tag{9.74}$$

d.h. der Leistungsfaktor (8.165) ist als Sonderfall in der allgemeineren Beziehung (9.73) enthalten.

Beispiel 9.7: Leistungsberechnungen

An dieser Stelle wollen wir noch einmal an das Beispiel 9.5 anknüpfen und die Leistung am Verbraucher berechnen. Da in dieser Schaltung keine Energiespeicherung stattfindet, muss die gesamte von der Quelle abgegebene mittlere Leistung P_0 gleich sein zu der am Widerstand verbrauchten Leistung P_V. Wir werden zum Vergleich diese beiden in ▶Abb. 9.25 an den entsprechenden Stellen eingetragenen Leistungen berechnen.

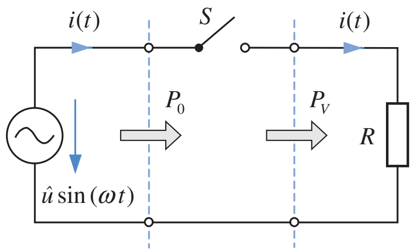


Abbildung 9.25: Alternative Möglichkeiten zur Berechnung der Leistung

Die von der Spannungsquelle in Abb. 9.25 gelieferte Wirkleistung P_0 entspricht der über eine komplette Periodendauer $\tau = 5T$ integrierten Momentanleistung. Mit der sinusförmigen Spannung und dem Strom aus Gl. (9.51) gilt

$$P_0 \overset{(8.147)}{=} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} u(t)\, i(t)\,\mathrm{d}t \overset{(9.51)}{=} \frac{\hat{u}}{5T}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{b}_n\int_0^{5T}\sin(\omega t)\,\sin\left(\frac{n}{5}\omega t\right)\mathrm{d}t\,. \tag{9.75}$$

Dieses Integral verschwindet nach Gl. (H.21) für $n \neq 5$ und liefert für $n = 5$ das Ergebnis $\tau/2 = 5T/2$, so dass sich aus der Forderung, dass die resultierende Leistung 60 % des Maximalwertes annehmen soll, zwangsläufig der Wert $\hat{b}_5 = 0{,}6\,\hat{i}$ in Gl. (9.53) ergeben musste

$$P_0 = \frac{\hat{u}}{5T}\hat{b}_5\frac{5T}{2} = \frac{\hat{u}}{2}\hat{b}_5 \overset{(9.53)}{=} \frac{3}{5}\frac{\hat{u}\,\hat{i}}{2} \overset{!}{=} 0{,}6\,P_{\max}\,. \tag{9.76}$$

Die Ursache für den besonderen Amplitudenwert $\hat{b}_5$ ist also darin begründet, dass nur das Produkt aus Strom und Spannung mit der gleichen Frequenz $\omega = 5\tilde{\omega}$ zur Wirkleistung beiträgt.

Betrachten wir jetzt die Leistung an den Klemmen des Widerstandes. Zur Berechnung können wir nicht die sinusförmige Eingangsspannung verwenden, da bei geöffnetem Schalter kein Strom fließt und damit auch keine Spannung am Widerstand anliegt. Die Eingangsspannung fällt in diesen Zeitintervallen am Schalter ab. Wir können aber von der Gl. (9.68) ausgehen oder wegen der verschwindenden Phasenverschiebung direkt von der Effektivwertberechnung in Gl. (9.56). Mit der Fourier-Entwicklung des Stromes erhalten wir nach Auswertung der Summation den Effektivwert

$$I=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^{\,2}} \overset{(9.53)}{=} \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{400}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1,3,\ldots\\ n\neq 5}}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2-25\right)^2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{5}\right)} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{5}}\,, \tag{9.77}$$

so dass die beiden unterschiedlichen Berechnungen erwartungsgemäß das gleiche Ergebnis

$$P_V = R\,I^2 \overset{(9.77)}{=} R\frac{\hat{i}^2}{2}\frac{3}{5} = 0{,}6\,P_{\max} \tag{9.78}$$

liefern. An diesem Beispiel ist zu erkennen, dass die Rechnung mit den unendlichen Summen aufwändig sein kann, während eine alternative Lösung, in diesem Fall die Berechnung der Leistung an den Klemmen der Quelle, unmittelbar auf einen geschlossenen Ausdruck führt.

Für die Scheinleistung ergibt sich nach Gl. (9.69) wegen den Harmonischen des Stromes der Ausdruck

$$S = U\,I \overset{(9.77)}{=} \frac{\hat{u}\,\hat{i}}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} \overset{(9.76)}{=} \sqrt{\frac{5}{3}}\,P_0 = \sqrt{\frac{5}{3}}\,P_V\,. \tag{9.79}$$

Infolge der unterschiedlichen Werte von Schein- und Wirkleistung tritt auch bei dieser Schaltung, in der keine energiespeichernden Komponenten enthalten sind, eine Blindleistung, in diesem Fall eine reine Verzerrungsblindleistung, auf

$$D=\sqrt{S^2-P_V^{\,2}} \overset{(9.79)}{=} P_V\sqrt{\frac{5}{3}-1} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,P_V\,, \tag{9.80}$$

die zu erhöhten Verlusten in den Zuleitungen führt. Ein um den Faktor 5/3 größerer Widerstand, der permanent mit der Spannungsquelle verbunden ist, nimmt die gleiche mittlere Leistung bei entsprechend reduziertem Effektivstrom und damit geringeren Leitungsverlusten auf.

9.3.5 Weitere Kenngrößen

Die Abweichung einer periodischen Funktion von der Sinusform kann zwar durch Amplituden- und Phasenspektrum charakterisiert werden, in manchen Fällen ist man aber nur an einer relativ einfachen Beschreibung dieser *Verzerrung* interessiert. Neben den in Kap. 7.4 bereits definierten Kenngrößen verwendet man häufig die folgenden Kenngrößen:

Effektivwert des Wechselanteils

Darunter versteht man den Effektivwert entsprechend der Gl. (9.56), jedoch ohne Berücksichtigung des Gleichanteils

$$U_{\sim}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{\,2}} = \sqrt{U^2-U_0^{\,2}}\;. \tag{9.81}$$

Grundschwingungsgehalt

Diese Größe beschreibt das Verhältnis aus dem Effektivwert der Grundschwingung zu dem Effektivwert des Wechselanteils

$$g = \frac{U_1}{U_\sim} . \tag{9.82}$$

Klirrfaktor (Oberschwingungsgehalt)

Der Klirrfaktor ist ein Maß für den Oberschwingungsgehalt der Kurvenform. Oft wird unterschieden zwischen dem **Gesamtklirrfaktor**, der das Verhältnis aus dem Effektivwert aller Oberschwingungen zu dem Effektivwert des Wechselanteils beschreibt

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} {U_n}^2}}{U_\sim} = \sqrt{1 - g^2} , \tag{9.83}$$

und den **Klirrfaktoren m-ter Ordnung**, bei denen nur der Effektivwert der m-ten Oberschwingung zu dem Effektivwert des Wechselanteils ins Verhältnis gesetzt wird

$$k_m = \frac{U_m}{U_\sim} . \tag{9.84}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt der Zusammenhang

$$k^2 = \sum_{n=2}^{\infty} {k_n}^2 . \tag{9.85}$$

Bei einer reinen Sinuskurve gilt $g = 1$ und $k = 0$.

Scheitelfaktor

Der Scheitelfaktor, der das Verhältnis vom Spitzenwert zum Effektivwert des Wechselanteils bezeichnet

$$\xi = \frac{\hat{u}}{U_\sim} , \tag{9.86}$$

nimmt bei einer reinen Sinuskurve den Wert $\xi = \sqrt{2}$ an.

Formfaktor

Der Formfaktor bezeichnet das Verhältnis vom Effektivwert des Wechselanteils zum Gleichrichtwert

$$F = \frac{U_\sim}{\overline{|u|}} . \tag{9.87}$$

Bei einer reinen Sinuskurve gilt mit Gl. (7.10) $F = \pi / \sqrt{8} \approx 1{,}11$.

Welligkeit

Bei Netzteilen oder generell bei Gleichrichterschaltungen ist der auf der Ausgangsgleichspannung überlagerte Wechselanteil (**Brummspannung**) von Interesse. Als Welligkeit definiert man das Verhältnis aus dem Effektivwert des Wechselanteils zum Gleichanteil

$$w = \frac{U_{\sim}}{U_0}\,. \tag{9.88}$$

Beispiel 9.8: Welligkeit bei der RL-Reihenschaltung

Als Beispiel betrachten wir noch einmal die an der gleichgerichteten Netzwechselspannung liegende *RL*-Reihenschaltung in Abb. 9.17. Zu bestimmen ist die Welligkeit der Spannung am Widerstand in Abhängigkeit von dem Wert der vorgeschalteten Induktivität *L*.

Die Spannung $u_R(t)$ ist mit Gl. (9.49) bereits bekannt

$$u_R(t) = R\,i(t) \overset{(9.49)}{=} \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=2,4,..}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2-1\right)\sqrt{1+\left(n\omega L/R\right)^2}} \cos\left(n\omega t - \varphi_n\right)\,. \tag{9.89}$$

Mit den Definitionen (9.88) und (9.81) gilt dann

$$w = \frac{\pi}{2\hat{u}} \sqrt{\frac{8\hat{u}^2}{\pi^2} \sum_{n=2,4,..}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2-1\right)^2 \left[1+\left(\frac{n\omega L}{R}\right)^2\right]}} = \sqrt{\sum_{n=2,4,..}^{\infty} \frac{2}{\left(n^2-1\right)^2 \left[1+\left(\frac{n2\pi L}{RT}\right)^2\right]}}\,. \tag{9.90}$$

Dieses Ergebnis wird von dem Verhältnis L/RT, d.h. von den beiden Komponenten R und L sowie von der Periodendauer T der Eingangsspannung beeinflusst. Die Welligkeit ist in Abhängigkeit von diesem Verhältnis in ▶Abb. 9.26 dargestellt. Für $L = 0$ erhalten wir die Welligkeit $w = 0{,}483$ der Funktion $\hat{u}\left|\sin(\omega t)\right|$. Mit größer werdender Induktivität nimmt die Welligkeit des Stromes bzw. der Spannung am Widerstand infolge der stärkeren Bedämpfung der höheren Harmonischen ab.

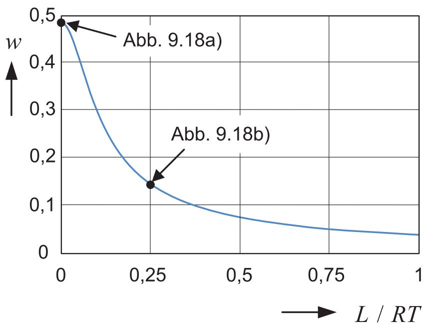


Abbildung 9.26: Welligkeit der Spannung am Widerstand der *RL*-Reihenschaltung

ZUSAMMENFASSUNG

- Beliebige **periodische Kurvenformen** können in eine Summe von Einzelschwingungen, wir sprechen von Harmonischen, zerlegt werden.
- Die **Grundschwingung** bzw. erste Harmonische besitzt die gleiche Periodendauer wie die Ausgangskurve. Die Frequenz der n-ten Harmonischen entspricht dem n-Fachen der Frequenz bei der Grundschwingung.
- Bestimmte Symmetrieeigenschaften bei der Ausgangskurve können zur vereinfachten Bestimmung der **Fourier-Koeffizienten** ausgenutzt werden.
- Besitzt ein lineares Netzwerk eine Quelle mit einem beliebigen periodischen Zeitverlauf, dann setzen sich die Strom- und Spannungsverläufe in den einzelnen Zweigen aus der Lösung für den Gleichanteil sowie der Überlagerung aller Teillösungen bei allen auftretenden Harmonischen zusammen.
- Eine elegante Möglichkeit zur Darstellung der Ergebnisse bieten die **Linienspektren**, bei denen eine Kenngröße, z.B. die Amplitude der einzelnen Harmonischen über der Frequenzachse, aufgetragen wird.
- Bei der Berechnung von **Effektivwerten** einer als Fourier-Reihe vorliegenden Funktion genügt es, nur Produkte aus Harmonischen mit gleicher Frequenz zu berücksichtigen. Das Produkt aus zwei Harmonischen unterschiedlicher Frequenz liefert bei der Integration über eine Periodendauer den Wert Null.

Übungsaufgaben

COMPANION WEBSITE
Lösungen

Aufgabe 9.1 Amplitudenspektrum

Wir betrachten noch einmal die bereits in Aufgabe 7.2 behandelte Dimmschaltung mit dem in ▶Abb. 9.27b dargestellten Netzstrom ($T = 20$ ms).

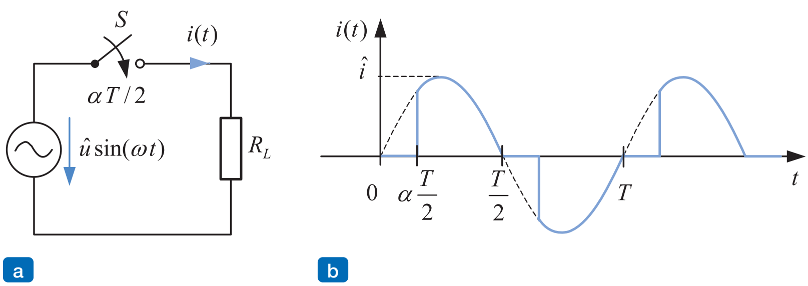


Abbildung 9.27: Phasenanschnittssteuerung

Berechnen Sie das Amplitudenspektrum in Abhängigkeit des Steuerparameters α und stellen Sie es für $\alpha = 0{,}5$ im Frequenzbereich $0 < f < 2$ kHz dar.

Aufgabe 9.2 Spannungsstabilisierung

Ein Verbraucher, symbolisiert durch den Widerstand R, wird gemäß ▶Abb. 9.28a an eine Stromquelle mit dem zeitabhängigen dreieckförmigen Strom $i(t)$ aus ▶Abb. 9.28b angeschlossen.

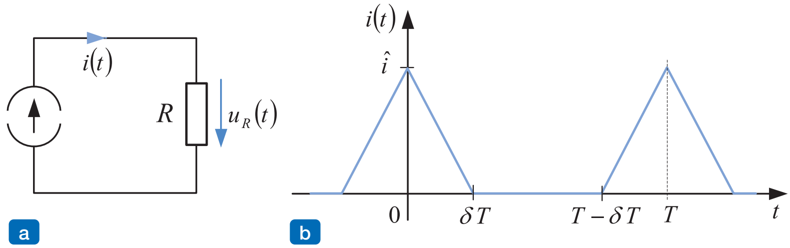


Abbildung 9.28: Stromquelle mit zeitabhängigem Strom und Verbraucher

1. Berechnen Sie das Fourier-Spektrum des Stromes $i(t)$ und stellen Sie das Amplitudenspektrum mit doppelt logarithmischer Skalierung dar. Für die Auswertung soll $\delta = 0{,}25$ gewählt werden.

Die starken Spannungsschwankungen am Verbraucher sollen jetzt durch einen parallel geschalteten Kondensator nach ▶Abb. 9.29 reduziert werden.

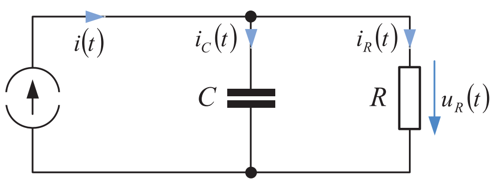


Abbildung 9.29: Parallelkondensator zur Stabilisierung der Ausgangsspannung

2. Berechnen Sie das Spektrum (Fourier-Entwicklung) des Stromes $i_R(t)$.
3. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Spannung am Widerstand für $\hat{i} = 1$ A, $\delta = 0{,}25$, $f = 10$ kHz, $R = 100\,\Omega$ und für die Kapazitätswerte $C = 0\,\mu$F, $C = 0{,}1\,\mu$F, $C = 1\,\mu$F und $C = 10\,\mu$F dar.
4. Berechnen Sie die Welligkeit der Ausgangsspannung $u_R(t)$.
5. Ist die Leistung am Widerstand abhängig von dem Wert der Kapazität C?

Schaltvorgänge in einfachen elektrischen Netzwerken

10

ÜBERBLICK

Einführung

» Im folgenden Kapitel werden wir unsere Möglichkeiten, Vorgänge in elektrischen Netzwerken zu berechnen, nochmals erweitern. Während sich in den bisherigen Kapiteln alle zeitabhängigen Strom- und Spannungsformen nach einer konstanten Periodendauer T wiederholten und mithilfe der Fourier-Entwicklung auf die Überlagerung sinusförmiger Zeitverläufe zurückgeführt werden konnten, werden wir jetzt einmalige Änderungen im Netzwerk wie z.B. Schaltvorgänge betrachten. Da wir die komplexe Wechselstromrechnung in diesen Fällen nicht mehr anwenden können, müssen wir versuchen, die Lösung der aus den Kirchhoff'schen Gleichungen entstehenden Differentialgleichungen auf anderem Wege zu bestimmen.

Wir werden untersuchen, wie sich das Zuschalten einer Quelle an ein Netzwerk, aber auch die Trennung der Quelle vom Netzwerk auswirkt. Der Verlauf der Quellenströme bzw. -spannungen kann dabei zeitlich konstant sein oder auch eine beliebige periodische Form aufweisen. An einer einfachen Spannungswandlerschaltung lernen wir auch die Vorgehensweise kennen, wie ein Netzwerk behandelt wird, dessen Topologie sich durch das Hinzu- oder Wegschalten einzelner Zweige ändert. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- Schaltvorgänge in Netzwerken mit einem Energiespeicher bei zeitlich konstantem oder beliebig periodischem Verlauf der Quellengröße zu berechnen,
- den Begriff Zeitkonstante im *RC*- oder *RL*-Netzwerk zu erklären,
- die Konsequenzen aus den Forderungen nach der Stetigkeit der elektrischen Energie an der Kapazität und der Stetigkeit der magnetischen Energie an der Induktivität für die Schaltvorgänge zu beurteilen,
- eine einfache Schaltung zur Umwandlung einer Eingangsgleichspannung in eine höhere Ausgangsgleichspannung zu berechnen,
- Wirkungsgradbetrachtungen bei Schaltvorgängen, z.B. bei der Energieübertragung zwischen Kapazitäten, anzustellen und die Gesamtverluste zu berechnen,
- Schaltvorgänge in Netzwerken mit mehreren Energiespeichern zu berechnen.

In diesem Kapitel wollen wir uns etwas eingehender mit den Schaltvorgängen beschäftigen. In der Praxis treten diese Vorgänge z.B. auf, wenn eine Schaltung mit der Spannungsquelle verbunden oder von ihr getrennt wird. Auch in Fehlerfällen entstehen vergleichbare Situationen, wenn beispielsweise einzelne Bauteile infolge von Überlastung zerstört werden oder wenn Sicherungen auslösen. Abgesehen von diesen eher unerwünschten Schalthandlungen werden in der Praxis häufig Transistoren eingesetzt, um durch gezieltes Ein- und Ausschalten bestimmte Verhaltensweisen einer Schaltung zu realisieren.

Für die betrachteten Netzwerke bedeutet das, dass die zeitabhängigen Strom- und Spannungsverläufe in diesen Fällen nicht mehr periodisch sind. In Netzwerken ohne Energiespeicher findet ein unmittelbarer Übergang zwischen den beiden Zuständen vor bzw. nach dem Schaltvorgang statt. Enthält das Netzwerk jedoch Induktivitäten oder Kapazitäten, die einem Strom- bzw. Spannungssprung nicht folgen können, dann benötigt das Netzwerk eine Übergangszeit, um von dem stationären Zustand vor dem Schaltvorgang in den neuen stationären Zustand nach dem Schaltvorgang zu gelangen. Wir werden dieses Verhalten, das in gewissem Sinne mit einer *Trägheit* vergleichbar ist, in den folgenden Abschnitten näher untersuchen. Das durch die Schaltvorgänge hervorgerufene Übergangsverhalten klingt mit der Zeit ab, die plötzlichen Strom- und Spannungsänderungen gleichen sich in dem geänderten Netzwerk wieder aus. Daher bezeichnet man die Schaltvorgänge allgemein auch als **Ausgleichsvorgänge**.

In der Praxis wird der eigentliche Schaltvorgang, z.B. der Übergang eines Transistors vom leitenden in den gesperrten Zustand, eine gewisse Zeit in Anspruch nehmen. Die Berücksichtigung des zeitabhängigen Widerstandes, der sich von $R = 0$ (Kurzschluss) auf $R \to \infty$ (Leerlauf) verändert, erschwert die Netzwerkanalyse erheblich. Wir werden daher bei den folgenden Untersuchungen die Schalter als ideal annehmen, d.h. im leitenden Zustand gilt $R = 0$ und damit $u = 0$, im gesperrten Zustand gilt $R \to \infty$ und damit $i = 0$. Der Übergang zwischen den beiden Zuständen soll sprungartig erfolgen, d.h. keine Zeit in Anspruch nehmen.

Die Anwendung der Kirchhoff'schen Gleichungen auf die Knoten und Maschen eines Netzwerks, das Induktivitäten oder Kapazitäten enthält, führt mit den in Kap. 7.3 angegebenen Zusammenhängen zwischen den zeitabhängigen Strömen und Spannungen an den Komponenten auf Differentialgleichungssysteme, in denen neben den Strömen und Spannungen auch deren zeitliche Ableitungen auftreten. Die Lösungen dieser Netzwerkgleichungen setzen sich aus zwei Anteilen zusammen, einerseits aus einer **homogenen Lösung** und andererseits aus einer **partikulären Lösung**. Die homogene Lösung beschreibt den Übergang des Netzwerks von dem einen in den anderen Zustand infolge des Schaltvorganges. Ihr Beitrag zur Gesamtlösung verschwindet nach Beendigung des Ausgleichsvorganges. Die partikuläre Lösung dagegen beschreibt den Zustand des Netzwerks nach dem Schaltvorgang, nachdem der Ausgleichsvorgang bereits abgeklungen ist. Diese Teillösung kann mit den Methoden aus den vorangegangenen Kapiteln berechnet werden. Zur Bestimmung der homogenen Lösung ist dagegen eine andere Vorgehensweise erforderlich.

10.1 RC-Reihenschaltung an Gleichspannung

Wir beginnen die Betrachtung mit der *RC*-Reihenschaltung in ▶Abb. 10.1. Ein zunächst ungeladener Kondensator C wird zum Zeitpunkt $t = t_0$ über einen Widerstand R mit einer idealen Gleichspannungsquelle U verbunden. Dadurch wird sich ein durch den Widerstand R begrenzter Strom einstellen, so dass Ladungen auf die Kondensatorplatten transportiert werden. Mit ansteigender Kondensatorspannung $u_C(t)$ wird die Spannung am Widerstand $u_R(t) = U - u_C(t)$ geringer und der Strom $i_C(t) = u_R(t)/R$ nimmt ab. Dieser Vorgang dauert so lange an, bis $u_C(t)$ den Wert der Quellenspannung U erreicht hat. Es lassen sich somit insgesamt drei Zustände unterscheiden:

1. Zustand vor dem Schaltvorgang
2. Ausgleichsvorgang
3. stationärer Endzustand

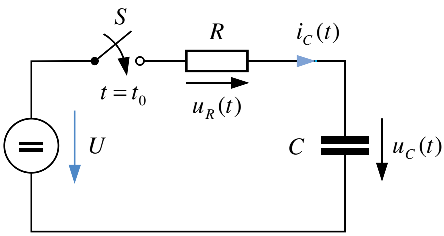


Abbildung 10.1: Aufladen eines Kondensators

Wir wollen jetzt versuchen, den zeitabhängigen Strom- und Spannungsverlauf am Kondensator zu berechnen. Für den Zeitbereich $t \geq t_0$ (geschlossener Schalter) gilt der Maschenumlauf

$$U = u_R(t) + u_C(t) \overset{(7.3)}{=} R\,i_C(t) + u_C(t) \overset{(7.5)}{=} RC\frac{\mathrm{d}\,u_C(t)}{\mathrm{d}\,t} + u_C(t)\,. \tag{10.1}$$

Die Gleichung zur Bestimmung der Kondensatorspannung ist eine inhomogene Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung. Sie ist inhomogen, da auf der linken Gleichungsseite der nicht verschwindende, von der gesuchten Größe $u_C(t)$ unabhängige Wert U steht, und erster Ordnung bedeutet, dass neben der zeitabhängigen Größe $u_C(t)$ auch deren erste Ableitung auftritt. Die Lösung dieser DGL setzt sich zusammen aus der homogenen Lösung $u_{Ch}(t)$, die den zeitabhängigen Ausgleichsvorgang beschreibt, und aus der partikulären Lösung $u_{Cp}(t)$, die den stationären Endzustand beschreibt

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) \quad \overset{(10.1)}{\rightarrow} \quad RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)\right] + u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = U\,. \tag{10.2}$$

Nach Abklingen des Einschwingvorganges für $t \to \infty$ sind alle Ströme und Spannungen in dem Netzwerk zeitlich konstant. Da sich die Kondensatorspannung dann nicht mehr ändert, muss der Strom verschwinden. Die partikuläre Lösung ist wegen der zeitlich konstanten Quellenspannung keine Funktion der Zeit und es muss also gelten $\mathrm{d}u_{Cp}/\mathrm{d}t = 0$.

Die Differentialgleichung (10.2) zerfällt in einen zeitabhängigen Anteil und in einen von der Zeit unabhängigen Anteil

$$\begin{aligned} &RC\frac{\mathrm{d}\,u_{Ch}(t)}{\mathrm{d}t}+u_{Ch}(t)=0 && \text{homogene DGL} \\ &RC\underbrace{\frac{\mathrm{d}\,u_{Cp}}{\mathrm{d}t}}_{0}+u_{Cp}=U && \rightarrow \quad u_{Cp}=U. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Man erkennt leicht, dass die Addition der beiden Gln. (10.3) identisch ist zur Ausgangsgleichung (10.2), so dass sich das Gesamtergebnis aus den beiden Teillösungen zusammensetzt. Während die partikuläre Lösung in Gl. (10.3) bereits angegeben ist, muss die homogene Lösung noch berechnet werden. In der homogenen DGL tritt aber sowohl die Spannung $u_{Ch}(t)$ als auch ihre zeitliche Ableitung auf. Da diese Gleichung für alle Zeitpunkte t erfüllt sein muss, stellen wir den Ansatz mit einer Exponentialfunktion auf, deren Zeitableitung wieder auf eine Funktion mit gleicher Zeitabhängigkeit führt

$$u_{Ch}(t)=k\,\mathrm{e}^{pt} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{Ch}(t)=p\,k\,\mathrm{e}^{pt}=p\,u_{Ch}(t)\,. \tag{10.4}$$

Die unbekannten Faktoren k und p müssen aus weiteren Forderungen bestimmt werden. Wir überprüfen zunächst, ob die homogene Differentialgleichung mit dem Ansatz (10.4) erfüllt werden kann. Durch Einsetzen in die Gl. (10.3) erhalten wir die Bedingung

$$RC\,p\,k\,\mathrm{e}^{pt}+k\,\mathrm{e}^{pt}=0 \quad \rightarrow \quad (RC\,p+1)\underbrace{k\,\mathrm{e}^{pt}}_{u_{Ch}(t)\neq 0}=0 \quad \rightarrow \quad p=-\frac{1}{RC}\,. \tag{10.5}$$

Mit dem Ansatz (10.4) wird die Ausgangsgleichung (10.3) genau dann erfüllt, wenn der Faktor p den in Gl. (10.5) berechneten Wert annimmt. Das Produkt RC hat die Dimension s und wird als **Zeitkonstante** τ bezeichnet. Fassen wir alle bisherigen Ergebnisse zusammen, dann nimmt die Kondensatorspannung die Form

$$u_C(t)=u_{Cp}+k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=U+k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{mit} \qquad \tau=RC \tag{10.6}$$

an. Diese Lösung erfüllt die Maschengleichung (10.1) und beschreibt richtig das Verhalten der Kondensatorspannung für den stationären Endzustand $t\rightarrow\infty$. Von den eingangs erwähnten drei Netzwerkzuständen werden die letzten beiden richtig beschrieben. Die noch verbleibende unbekannte Konstante k muss aus der **Anfangsbedingung** des Netzwerks zum Zeitpunkt $t = t_0$ bestimmt werden, um den Zustand vor dem Schaltvorgang ebenfalls richtig zu erfassen. Die Kondensatorspannung war zu diesem Zeitpunkt Null, d.h. es muss gelten

$$u_C(t=t_0)\overset{!}{=}0\overset{(10.6)}{=}U+k\,\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{\tau}} \quad \rightarrow \quad k=-U\,\mathrm{e}^{\frac{t_0}{\tau}}\,. \tag{10.7}$$

Damit ist die Kondensatorspannung zu jedem Zeitpunkt eindeutig bestimmt

$$u_C(t)=U\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}}\right)=U\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right). \tag{10.8}$$

Der zugehörige Kondensatorstrom lässt sich mithilfe der Gl. (7.5) berechnen

$$i_C(t) \overset{(7.5)}{=} C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t) \overset{(10.8)}{=} \frac{U}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}} \quad\rightarrow\quad i_C(t) = \frac{U}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\,. \tag{10.9}$$

In ▶Abb. 10.2 sind Strom und Spannung am Kondensator als Funktion der Zeit dargestellt. Wegen $1-\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$ nimmt die Kondensatorspannung nach Ablauf der Zeit $t-t_0=\tau$, d.h. nach Ablauf einer Zeitkonstante RC, bereits 63 % ihres Endwertes an. Nach drei Zeitkonstanten $1-\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}95$ hat sie bereits 95 % des Endwertes erreicht.

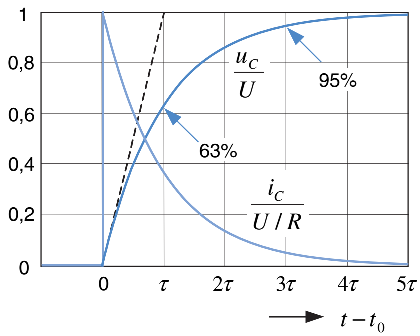


Abbildung 10.2: Strom und Spannung am Kondensator

Der Strom $i_C(t) = [U-u_C(t)]/R$ ist proportional zur Spannungsdifferenz zwischen Quellen- und Kondensatorspannung. Je mehr sich die Kondensatorspannung der Quellenspannung nähert, desto geringer wird der Strom. Während $i_C(t)$ im Schaltaugenblick t_0 auf den Wert U/R springt und dann entsprechend der Exponentialfunktion (10.9) abfällt, ändert sich $u_C(t)$ kontinuierlich. Eine sprungförmige Änderung der Kondensatorspannung würde bedeuten, dass eine endliche Ladungsmenge in unendlich kurzer Zeit auf die Platten des Kondensators gebracht wird. Dies ist physikalisch nicht möglich, so dass die folgende Aussage gilt:

Merke

Der Spannungsverlauf an einer Kapazität ist immer stetig.

Die Anfangssteigung der Kondensatorspannung kann mithilfe der Gl. (10.8) berechnet werden

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t)\right|_{t=t_0} = \left.\frac{U}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}}\right|_{t=t_0} = \frac{U}{RC} = \frac{U}{\tau}\,. \tag{10.10}$$

Diese Gerade ist in Abb. 10.2 gestrichelt eingezeichnet. Mit dieser Steigung würde die Spannung nach der Zeitspanne τ ihren Endwert erreichen. Die Anfangssteigung wird also durch die Zeitkonstante τ festgelegt. Diese Aussage lässt sich noch verallgemeinern. Betrachten wir nämlich die Ausgangsgleichung (10.1) in der umgestellten Form

$$U - u_C(t) \overset{(10.1)}{=} \tau \frac{\mathrm{d}\, u_C(t)}{\mathrm{d}\, t}\,, \tag{10.11}$$

dann ist zu erkennen, dass die Differenz zwischen Quellenspannung und zeitabhängiger Kondensatorspannung zu jedem Zeitpunkt t identisch ist zu dem Produkt aus der zeitlichen Änderung von $u_C(t)$, d.h. der Steigung dieser Kurve, und der Zeitkonstanten τ.

Merke

Der Anstieg der Kondensatorspannung als Funktion der Zeit ist zu jedem Zeitpunkt genau so groß, dass die Spannung $u_C(t)$ bei konstant gehaltener Steigung nach Ablauf einer Zeitspanne $\tau = RC$ ihren Endwert U erreicht.

Dieser Sachverhalt ist in ▶Abb. 10.3 durch die Tangenten an die Kondensatorspannung zu verschiedenen Zeitpunkten verdeutlicht. Alle Tangenten weisen nach Ablauf von τ einen Schnittpunkt mit der Spannung U auf.

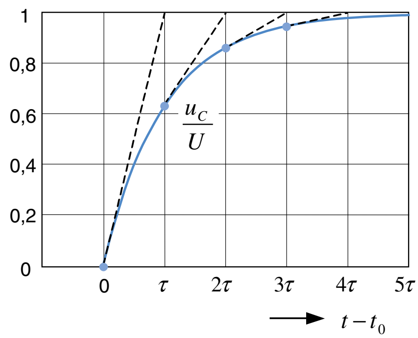


Abbildung 10.3: Zur Interpretation der Zeitkonstanten

10.2 Reihenschaltung von Kondensator und Stromquelle

Eine besondere Situation liegt vor, wenn ein Kondensator in Reihe zu einer Gleichstromquelle geschaltet wird. In diesem Fall wird die Spannung an dem Kondensator entsprechend der Beziehung (7.5) linear mit der Zeit ansteigen und die partikuläre Lösung nimmt den Wert $u_{Cp} \to \infty$ an. In der Praxis treten solche Netzwerke nur in begrenzten Zeitabschnitten auf.

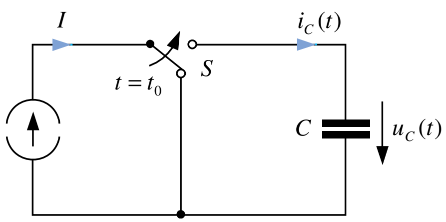


Abbildung 10.4: Kondensator in Reihe mit einer Stromquelle

Als Beispiel betrachten wir die Anordnung in ▶Abb. 10.4. Der Schalter S wird zum Zeitpunkt $t = t_0$ umgeschaltet, so dass der Strom I aus der Stromquelle für $t > t_0$ durch den Kondensator fließt. Ausgehend von der Gl. (7.5) erhalten wir die Kondensatorspannung zu einem späteren Zeitpunkt $t_1 > t_0$

$$\mathrm{d}\,u_C(t) = \frac{1}{C} i_C(t)\,\mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \int_{u_C(t_0)}^{u_C(t_1)} \mathrm{d}\,u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_1} i_C(t)\,\mathrm{d}t \quad \rightarrow$$
$$u_C(t_1) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} I(t_1 - t_0)\,. \tag{10.12}$$

Sie steigt also beginnend bei dem Anfangswert $u_C(t_0)$ linear mit der Zeit an. Ein eventuell in Reihe mit dem Kondensator liegender ohmscher Widerstand hat wegen des eingeprägten Stromes keinen Einfluss auf den Spannungsanstieg.

10.3 RL-Reihenschaltung an Gleichspannung

Als nächstes Beispiel betrachten wir eine Induktivität L, die zum Zeitpunkt $t = t_0$ über einen in Reihe liegenden Widerstand R mit einer idealen Gleichspannungsquelle U verbunden wird. Die Maschengleichung liefert die Beziehung

$$U = u_R(t) + u_L(t) = R\,i_L(t) + L\frac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{10.13}$$

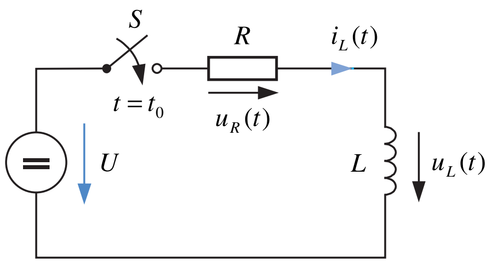


Abbildung 10.5: *RL*-Netzwerk an Gleichspannung

Wir erhalten wieder eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung des Spulenstromes, der sich aus einer homogenen und einer partikulären Lösung zusammensetzt

$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t) \quad \overset{(10.13)}{\rightarrow} \quad L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t)\right] + R\left[i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t)\right] = U\,. \tag{10.14}$$

Die partikuläre Lösung dieser DGL beschreibt wieder den stationären Endzustand, bei dem alle Ströme und Spannungen zeitunabhängig sind. Wegen $\mathrm{d}\, i_{L\,p}(t)/\mathrm{d}\,t = 0$ erhält man jetzt die Aufteilung der DGL (10.14) in der folgenden Form

$$\begin{aligned} &L\frac{\mathrm{d}\, i_{L\,h}(t)}{\mathrm{d}\,t} + R\, i_{L\,h}(t) = 0 && \text{homogene DGL} \\ &L\underbrace{\frac{\mathrm{d}\, i_{L\,p}}{\mathrm{d}\,t}}_{0} + R\, i_{L\,p} = U && \to \quad i_{L\,p} = \frac{U}{R}\,. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Die Lösung der homogenen DGL finden wir wieder mit dem Ansatz

$$i_{L\,h}(t) = k\,\mathrm{e}^{pt} \quad \to \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} i_{L\,h}(t) = p\,k\,\mathrm{e}^{pt} = p\, i_{L\,h}(t) \tag{10.16}$$

mit den zunächst unbekannten Faktoren k und p. Durch Einsetzen in die Gl. (10.15) folgt die Bedingung

$$L\,p\,k\,\mathrm{e}^{pt} + R\,k\,\mathrm{e}^{pt} = 0 \quad \to \quad (L\,p + R)\underbrace{k\,\mathrm{e}^{pt}}_{i_{Lh}(t)\neq 0} = 0 \quad \to \quad p = -\frac{R}{L}\,. \tag{10.17}$$

Das Verhältnis L/R hat die Dimension s und wird als **Zeitkonstante** τ bezeichnet. Mit den bisherigen Ergebnissen nimmt der Spulenstrom die Form

$$i_L(t) = i_{L\,p} + k\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R} + k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\tau = \frac{L}{R}} \tag{10.18}$$

an. Die verbleibende unbekannte Konstante k muss aus der Anfangsbedingung des Netzwerks zum Zeitpunkt $t = t_0$ bestimmt werden

$$i_L(t = t_0) \overset{!}{=} 0 \overset{(10.18)}{=} \frac{U}{R} + k\,\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{\tau}} \quad \to \quad k = -\frac{U}{R}\mathrm{e}^{\frac{t_0}{\tau}}\,. \tag{10.19}$$

Damit ist der Spulenstrom zu jedem Zeitpunkt eindeutig bestimmt

$$i_L(t) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t - t_0)}\right) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t - t_0}{\tau}}\right). \tag{10.20}$$

Die Spulenspannung wird mithilfe der Gl. (7.4) bestimmt

$$u_L(t) \overset{(7.4)}{=} L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} i_L(t) \overset{(10.20)}{=} U\,\mathrm{e}^{-\frac{t - t_0}{\tau}} \quad \to \quad u_L(t) = U\,\mathrm{e}^{-\frac{t - t_0}{\tau}}\,. \tag{10.21}$$

In ▸Abb. 10.6 sind Strom und Spannung an der Spule als Funktion der Zeit dargestellt.

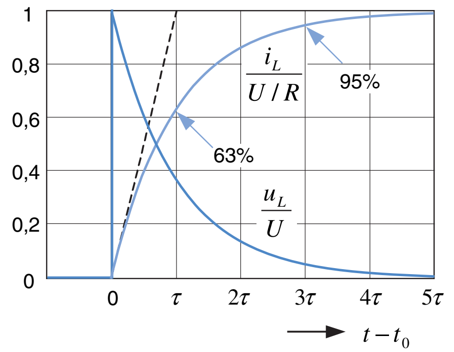


Abbildung 10.6: Strom und Spannung an der Spule

Während die Spulenspannung im Schaltaugenblick auf den Wert U springt und dann entsprechend der Exponentialfunktion (10.21) abfällt, ändert sich der Spulenstrom kontinuierlich. Eine sprungförmige Änderung von $i_L(t)$ würde bedeuten, dass eine endliche Energiezunahme in unendlich kurzer Zeit stattfinden würde. Dies ist physikalisch nicht möglich, so dass die folgende Aussage gilt:

Merke

Der Strom durch eine Induktivität ist immer stetig.

10.4 Parallelschaltung von Induktivität und Spannungsquelle

Einen ähnlichen Sonderfall wie den eines Kondensators in Reihe mit einer Gleichstromquelle findet man auch bei den Induktivitäten. Liegt nämlich eine Gleichspannungsquelle parallel zu einer Induktivität, dann wird der Spulenstrom, der jetzt nicht mehr durch einen Widerstand auf einen maximalen Wert begrenzt wird, entsprechend der Beziehung (7.4) linear mit der Zeit ansteigen und für $t \to \infty$ über alle Grenzen wachsen. Als Beispiel betrachten wir das Netzwerk in ▶Abb. 10.7.

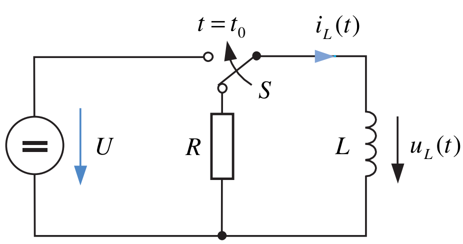


Abbildung 10.7: Spule parallel zu einer Spannungsquelle

Wird der Schalter S zum Zeitpunkt $t = t_0$ umgeschaltet, dann liegt die Spannung U an der Spule. Ausgehend von der Gl. (7.4) erhalten wir den Spulenstrom zu einem späteren Zeitpunkt $t_1 > t_0$

$$\mathrm{d}\, i_L(t) = \frac{1}{L} u_L(t)\, \mathrm{d}t \quad \to \quad \int\limits_{i_L(t_0)}^{i_L(t_1)} \mathrm{d}\, i_L(t) = \frac{1}{L} \int\limits_{t_0}^{t_1} u_L(t)\, \mathrm{d}t \quad \to$$
$$i_L(t_1) = i_L(t_0) + \frac{U}{L}(t_1 - t_0)\,. \tag{10.22}$$

Der Spulenstrom steigt also, beginnend von dem Anfangswert $i_L(t_0)$, linear mit der Zeit an. Wir kommen auf diese Situation in Kap. 10.9 noch einmal zurück.

10.5 Schaltvorgänge in Netzwerken mit Wechselspannungsquellen

In diesem Abschnitt wollen wir die bisher betrachteten Schaltvorgänge dahingehend erweitern, dass wir die Gleichspannungsquelle durch eine Wechselspannungsquelle ersetzen. Da sich die Vorgehensweise bei der Berechnung der zeitabhängigen Größen prinzipiell nicht ändert, werden wir nur ein ausgewähltes Beispiel betrachten. Die *RL*-Reihenschaltung in ▶Abb. 10.8 wird zum Zeitpunkt $t = t_0$ mit einer Spannungsquelle $\hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$ verbunden. Im Gegensatz zu dem Schaltvorgang in Kap. 10.3 hängt der Ausgleichsvorgang aber wegen der zeitabhängigen Eingangsspannung von dem gewählten Schaltzeitpunkt t_0 ab.

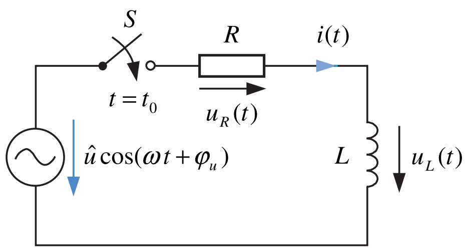


Abbildung 10.8: *RL*-Netzwerk an Wechselspannung

Wir setzen die Gesamtlösung $i(t)$ wieder aus einer homogenen Lösung $i_h(t)$ zur Beschreibung des Ausgleichsvorganges und einer partikulären Lösung $i_p(t)$ zur Beschreibung des eingeschwungenen Zustandes zusammen. Mit dieser Aufteilung für den Strom erhalten wir entsprechend Gl. (10.14) den Maschenumlauf

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[i_h(t) + i_p(t)\right] + R\left[i_h(t) + i_p(t)\right] = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)\,. \tag{10.23}$$

Im eingeschwungenen Zustand für $t \to \infty$ ist der Ausgleichsvorgang abgeklungen, d.h. der homogene Anteil des Stromes ist verschwunden und es gilt der Maschenumlauf

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_p(t) + R\, i_p(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)\,, \tag{10.24}$$

so dass für den homogenen Anteil (Subtraktion der Gl. (10.24) von der Gl. (10.23)) die Beziehung

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_h(t)+R\,i_h(t)=0 \tag{10.25}$$

verbleibt. Während wir die partikuläre Lösung in Gl. (10.15) direkt angeben konnten, gestaltet sich die Lösung der Gl. (10.24) etwas schwieriger. Mit der komplexen Wechselstromrechnung haben wir aber eine effiziente Methode zur Lösung derartiger Gleichungen bereits kennen gelernt. Das Netzwerk wird nämlich so behandelt, als sei der Schalter schon seit unendlich langer Zeit geschlossen. Für die vorliegende Schaltung können wir die Lösung aus dem Beispiel 8.2 übernehmen. Mit den Gln. (8.53) und (8.54) gilt

$$i_p(t)=\hat{i}\,\cos(\omega t+\varphi_i) \quad \text{mit} \quad \hat{i}=\frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi_i=\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}\,. \tag{10.26}$$

Die ▶Abb. 10.9 zeigt die Quellenspannung für den Sonderfall $\varphi_u=0$ sowie die partikuläre Lösung für den Strom nach Gl. (10.26) für das Zahlenbeispiel $\omega L=R$ bzw. arctan 1 = 45°.

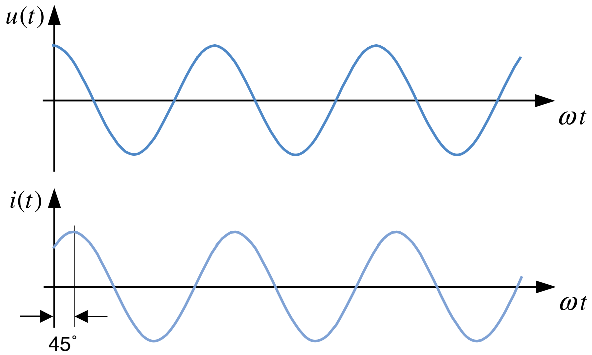


Abbildung 10.9: Quellenspannung und Stromverlauf im eingeschwungenen Zustand

Die homogene DGL ist unabhängig von der Quellenspannung. Die Gln. (10.15) und (10.25) sind identisch, so dass wir den Ansatz aus den Gln. (10.16) und (10.17) mit der zunächst noch unbekannten Konstanten k übernehmen können

$$i_h(t)=k\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\,. \tag{10.27}$$

Die Überlagerung der beiden Teillösungen (10.26) und (10.27) erfüllt den Maschenumlauf (10.23) für jeden Zeitpunkt und beschreibt richtig das Verhalten des Netzwerks für den eingeschwungenen Zustand $t\to\infty$. Die noch verbleibende unbekannte Konstante k muss aus der Anfangsbedingung des Netzwerks zum Zeitpunkt $t = t_0$ bestimmt werden. Der Spulenstrom war zu diesem Zeitpunkt Null, d.h. es muss gelten

$$i(t_0) = i_h(t_0) + i_p(t_0) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t_0} + \hat{i}\cos(\omega t_0 + \varphi_i) \overset{!}{=} 0\,. \tag{10.28}$$

Mit der Bestimmung von k aus dieser Gleichung sind der Gesamtstrom und durch Anwendung der Gleichungen in Tab. 7.1 auch die Spannungen an den Komponenten bekannt

$$i(t) = -\hat{i}\cos(\omega t_0 + \varphi_i)\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} + \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i)\,. \tag{10.29}$$

Der erste Anteil in Gl. (10.29) beschreibt den Übergang des Netzwerks von dem Zustand bei geöffnetem Schalter $i(t) = 0$ zu dem eingeschwungenen Zustand $i(t) = i_p(t)$, nachdem der Schalter schon seit langer Zeit geschlossen und der Ausgleichsvorgang abgeklungen ist. Der homogene Anteil des Stromes verschwindet entsprechend der Exponentialfunktion mit der Zeitkonstanten $\tau = L/R$. Wir haben bereits erwähnt, dass der Schaltzeitpunkt wegen der zeitabhängigen Eingangsspannung den Ausgleichsvorgang beeinflusst. In Gl. (10.29) ist t_0 in dem Vorfaktor bei der homogenen Lösung enthalten. Dieser Faktor verschwindet, falls t_0 einen der Werte

$$t_0 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \varphi_i\right) \quad \text{mit} \quad n = 0,1,2,\,\ldots \tag{10.30}$$

annimmt. Zu den Zeitpunkten t mit

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \varphi_i\right) \quad \text{mit} \quad n = 0,1,2,\,\ldots \tag{10.31}$$

verschwindet aber auch die Kosinusfunktion bei der partikulären Lösung, so dass die allgemeine Aussage gilt:

Merke

Wird der Schalter zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ geschlossen, in dem der Spulenstrom bei der partikulären Lösung identisch ist zu dem Spulenstrom unmittelbar vor dem Schaltvorgang – in dem vorliegenden Beispiel also gerade verschwindet –, dann geht das *RL*-Netzwerk ohne Einschwingvorgang direkt in den eingeschwungenen Zustand über.

Ein Beispiel für einen derartigen Schaltzeitpunkt ist in dem mittleren Diagramm der ▶Abb. 10.10 dargestellt. Der homogene Anteil verschwindet und der Strom entspricht bereits unmittelbar nach dem Schalten der eingeschwungenen Lösung.

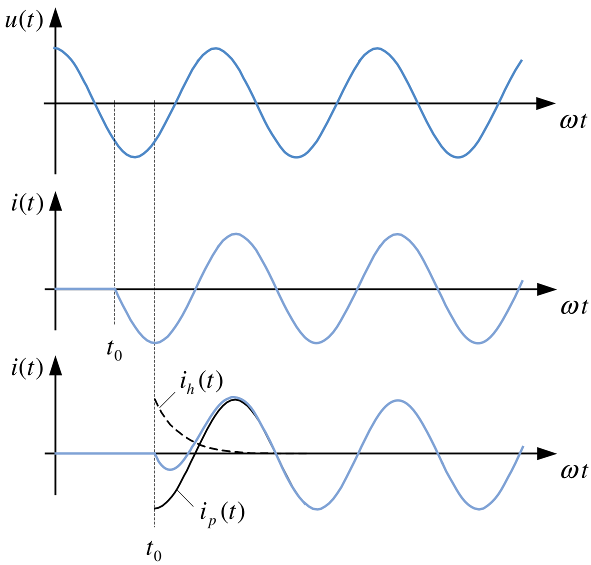


Abbildung 10.10: Stromverlauf bei unterschiedlichen Schaltzeitpunkten

Bei allen anderen Schaltzeitpunkten besitzt der Strom $i_p(t_0)$ einen von dem Anfangswert Null abweichenden Wert. Da sich aber der Strom durch die Induktivität nicht sprungartig von dem Wert vor dem Schalten auf den Wert der partikulären Lösung unmittelbar nach dem Schalten ändern kann, tritt ein Einschwingvorgang auf. Der zugehörige Strom $i_h(t)$ muss also wegen der Stetigkeit des Spulenstromes unmittelbar nach dem Schalten den negativen Wert des partikulären Stromes aufweisen. Die größte Amplitude nimmt die homogene Lösung bei

$$t_0 = \frac{1}{\omega}\left(n\pi - \varphi_i\right) \qquad \text{mit} \qquad n = 0,1,2,\,\ldots \tag{10.32}$$

an, wenn also in einem Zeitpunkt geschaltet wird, in dem die partikuläre Lösung ihren Maximalwert aufweist. Das untere Diagramm in Abb. 10.10 zeigt den Stromverlauf für diesen Fall. Bei dem angenommenen Zahlenbeispiel $\omega L = R$ klingt die Exponentialfunktion (10.29) bereits innerhalb einer Periodendauer $\omega T = 2\pi$ praktisch völlig ab.

Der Strom $i_p(t)$ wird zwar unmittelbar nach dem Schaltvorgang durch den Strom $i_h(t)$ kompensiert, in der folgenden Stromhalbwelle überlagern sich die beiden Anteile aber mit gleichem Vorzeichen, so dass eine Stromüberhöhung auftritt. Im Falle einer wesentlich größeren Zeitkonstante $\tau = L/R$ klingt die Exponentialfunktion entsprechend langsam ab, so dass der Gesamtstrom Werte annehmen kann, die annähernd doppelt so groß sind wie die Amplitude im eingeschwungenen Zustand. Der qualitative Stromverlauf ist zum Vergleich für eine zehnfach größere Zeitkonstante in ▶Abb. 10.11 dargestellt.

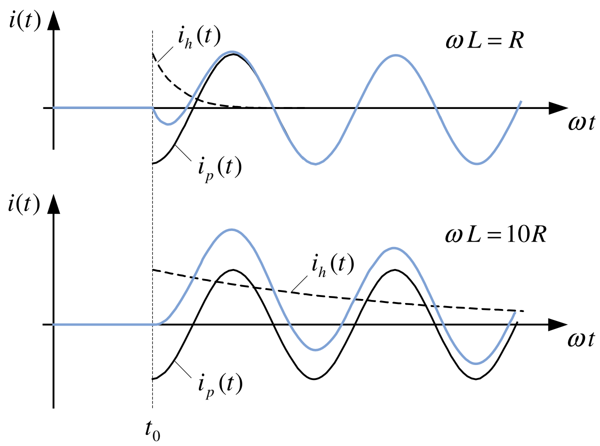


Abbildung 10.11: Ausgleichsvorgang bei unterschiedlichen Zeitkonstanten

10.6 Quellen mit periodischen, nicht sinusförmigen Strom- und Spannungsformen

Die Erweiterung der Analysemöglichkeiten auch auf Netzwerke, in denen die Quellen einen zeitlich periodischen, aber nicht mehr sinusförmigen Spannungs- oder Stromverlauf aufweisen, ist jetzt relativ einfach. Da wir bereits Gleich- und Wechselquellen in geschalteten Netzwerken behandeln können und da wir außerdem unter der Voraussetzung linearer Netzwerke Teillösungen überlagern dürfen, können wir unter Einbeziehung der Harmonischen Analyse auch solche Quellen im Netzwerk zulassen, deren Signalformen durch eine Fourier-Reihe darstellbar sind.

Wir demonstrieren die Vorgehensweise an einem konkreten Beispiel. Ausgangspunkt sei die *RL*-Reihenschaltung in ▶Abb. 10.12, die zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 an die gleichgerichtete Wechselspannung $u(t) = \hat{u}\left|\sin(\omega t)\right|$ angeschlossen werden soll. Der Spannungsverlauf an der Reihenschaltung springt zum Schaltzeitpunkt $t = t_0$, wie auf der rechten Seite der Abb. 10.12 angedeutet, von Null auf den momentanen Wert der Quellenspannung.

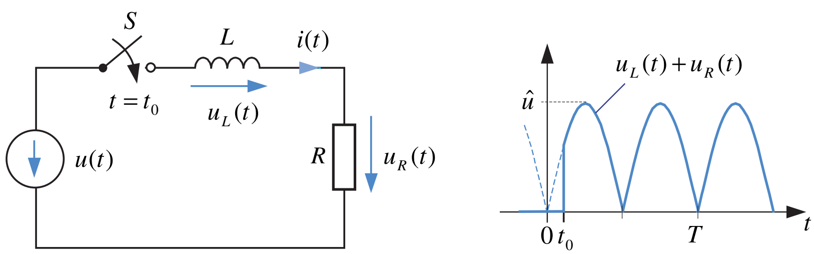


Abbildung 10.12: *RL*-Netzwerk an periodischer, nicht sinusförmiger Spannung

Die Lösung erfolgt in der gleichen Weise wie im vorangegangenen Kapitel. Die partikuläre Lösung nach Beendigung des Ausgleichsvorganges haben wir für dieses Beispiel bereits berechnet. Das Ergebnis können wir aus Gl. (9.49) übernehmen,

$$i_p(t) = \frac{2\hat{u}}{R\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=2,4,..}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2-1\right)\sqrt{R^2+(n\omega L)^2}} \cos\left(n\omega t + \varphi_{in}\right), \tag{10.33}$$

mit $\varphi_{in} = -\arctan(n\omega L / R)$.

Der Ansatz für die homogene Lösung kann aus Gl. (10.27) übernommen werden und hat die Form

$$i_h(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}. \tag{10.34}$$

Die unbekannte Konstante k muss wieder aus der Anfangsbedingung des Netzwerks zum Zeitpunkt $t = t_0$ bestimmt werden. Der Spulenstrom war zu diesem Zeitpunkt Null, d.h. es muss gelten

$$i(t_0) = i_h(t_0) + i_p(t_0) \overset{!}{=} 0\,. \tag{10.35}$$

Durch Einsetzen der beiden Gln. (10.33) und (10.34) mit $t = t_0$ erhalten wir die Bestimmungsgleichung für k

$$k\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t_0} = -\frac{2\hat{u}}{R\pi} + \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=2,4,..}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2-1\right)\sqrt{R^2+(n\omega L)^2}} \cos\left(n\omega t_0 + \varphi_{in}\right) \tag{10.36}$$

und resultierend die Gesamtlösung durch Überlagerung

$$\begin{aligned} i(t) = \frac{2\hat{u}}{R\pi}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right) - \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=2,4,..}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2-1\right)\sqrt{R^2+(n\omega L)^2}}\,\cdot \\ \cdot\left[\cos\left(n\omega t + \varphi_{in}\right) - \cos\left(n\omega t_0 + \varphi_{in}\right)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right]. \end{aligned} \tag{10.37}$$

▶Abb. 10.13 zeigt eine Auswertung dieser Gleichung für den Fall $L/R = T/4$ und für einen Einschaltmoment $t_0 = T/6$. Der Strom geht bereits innerhalb der ersten beiden Periodendauern in den eingeschwungenen Zustand über (vgl. Abb. 9.18b).

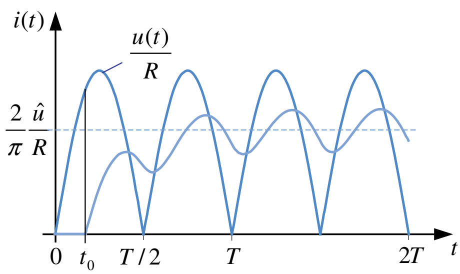


Abbildung 10.13: Stromverlauf nach dem Schaltvorgang

10.7 Konsequenzen aus den Stetigkeitsforderungen

An dieser Stelle soll ein Problem angesprochen werden, das generell im Zusammenhang mit der Stetigkeit von Spulenstrom und Kondensatorspannung auftritt. Nehmen wir an, das Netzwerk in Abb. 10.8 befindet sich im eingeschwungenen Zustand und der Schalter S soll wieder geöffnet werden. Fällt der gewählte Schaltzeitpunkt mit dem Nulldurchgang des Spulenstromes zusammen, dann bleibt dieser anschließend Null und es treten keine weiteren Probleme auf. Wird der Schalter allerdings zu einem anderen Zeitpunkt geöffnet, dann müsste der Spulenstrom von seinem nicht verschwindenden Momentanwert augenblicklich auf den Wert Null springen. Beim Einschalten reagierte das Netzwerk mit einem überlagerten Ausgleichsvorgang, der den Sprung bei dem Spulenstrom verhinderte. Nach dem Öffnen der Masche mit einem als ideal angenommenen Schalter kann aber kein Ausgleichsvorgang stattfinden. Da sich die Energie in dem Magnetfeld nicht sprungartig ändern kann, muss der Strom so lange weiterfließen, bis die gesamte Energie abgebaut ist. In der Praxis wird sich die Spannung so weit erhöhen (Produkt aus Spulenstrom und steigendem Widerstand an dem Schalter), dass der Spulenstrom stetig bleibt und die Energie an dem Widerstand des Schalters verbraucht wird. Bei einem mechanischen Schalter kann die entstehende Spannung so hoch werden, dass zwischen den sich öffnenden Kontakten ein Lichtbogen entsteht. Diese **Überspannung** führt oft zur Zerstörung einzelner Bauteile.

Die Abhilfe für dieses Problem besteht allgemein darin, dem Strom einen alternativen Pfad (**Freilaufpfad**) anzubieten, über den die Energie abgebaut werden kann. Eine der Möglichkeiten werden wir bei der Spannungswandlerschaltung in Abb. 10.23 kennen lernen. Nach dem Öffnen des Schalters fließt der Spulenstrom über die so genannte **Freilaufdiode** und die im Magnetfeld gespeicherte Energie wird in den Ausgangskondensator übertragen.

Das gleiche Problem kann auch bei einem Einschaltvorgang entstehen, wenn eine Induktivität in Reihe mit einer Stromquelle geschaltet werden soll. Auch in diesem Fall muss vorübergehend ein zusätzlicher Strompfad vorgesehen werden, der den Strom solange übernimmt, bis der Spulenstrom dem Quellenstrom entspricht.

Die erforderliche Stetigkeit der Kondensatorspannung führt zu ähnlichen Situationen, wenn z.B. ein geladener Kondensator kurzgeschlossen wird oder wenn ein ungeladener Kondensator unmittelbar parallel zu einer Spannungsquelle geschaltet werden soll. So wie der unbegrenzte Anstieg der Spannung an der Spule durch einen parallelen Strompfad verhindert werden kann, so wird der unbegrenzte Anstieg des Stromes beim Kondensator durch einen in Reihe liegenden Widerstand verhindert.

Merke

Eine stromführende Masche mit einer Induktivität darf nicht unterbrochen werden.

Ein geladener Kondensator darf nicht kurzgeschlossen werden.

10.8 Vereinfachte Analyse für Netzwerke mit einem Energiespeicher

Bei Netzwerken mit nur einem Energiespeicher lässt sich die Kondensatorspannung bzw. der Spulenstrom auch ohne den Umweg über die Lösung einer DGL auf einfache Weise ermitteln. Wir betrachten im Folgenden beliebige Widerstandsnetzwerke mit gegebenenfalls mehreren Schaltern und auch mehreren Spannungs- und Stromquellen, in denen sich aber nur ein Speicherelement befindet. Das Netzwerk darf auch ideale Übertrager enthalten, die nur durch das Übersetzungsverhältnis charakterisiert sind und keine Energie speichern. Die Schalter können beliebig im Netzwerk angeordnet sein, sofern die in Kap. 10.7 beschriebenen Einschränkungen berücksichtigt werden.

10.8.1 Kondensator und Widerstandsnetzwerk

Für die Schaltung in ▶Abb. 10.14 sollen Strom und Spannung am Kondensator für den Fall berechnet werden, dass die zeitlich periodische Quellenspannung mithilfe einer Fourier-Reihe darstellbar ist.

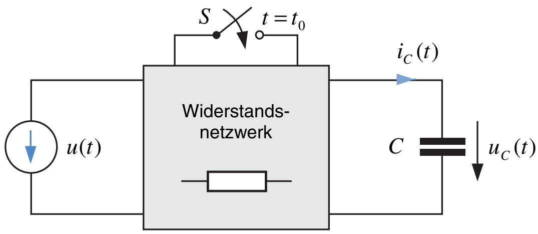


Abbildung 10.14: *RC*-Netzwerk

Im ersten Schritt wird die partikuläre Lösung ermittelt. Diese lässt sich bei einer Gleichspannungsquelle einfach dadurch finden, dass man den Kondensator durch einen Leerlauf ersetzt und die Leerlaufspannung an den beiden Klemmen berechnet. Bei einer zeitlich periodischen Quellenspannung wird das Netzwerk mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung für eine angenommene Frequenz berechnet. Die Anwendung dieser Lösung auf alle Harmonischen der Quellenspannung liefert die für $t \to \infty$ gültige partikuläre Lösung (vgl. Kap. 10.6). Befinden sich mehrere Quellen im Netzwerk, dann setzt sich die partikuläre Lösung aus der linearen Überlagerung der Beiträge aller Quellen zusammen.

Zur Berechnung der homogenen Lösung wurde bei dem Beispiel in Kap. 10.1 die homogene DGL (10.3) zugrunde gelegt. Diese Gleichung beschreibt das Ausgangsnetzwerk 10.1 nach dem Schaltvorgang, im vorliegenden Beispiel also bei geschlossenem Schalter, wobei die Quellenspannung zu Null gesetzt, d.h. kurzgeschlossen ist. Diese Vorgehensweise übertragen wir jetzt auf das Netzwerk der Abb. 10.14. Wir schließen ebenfalls die Quellenspannung kurz und berechnen aus dem resultierenden Netzwerk einen Ersatzwiderstand R_g, der entsprechend ▶Abb. 10.15 mit den Kondensatorklemmen verbunden ist. Das Netzwerk repräsentiert, von den Klemmen des Kondensators aus betrachtet, einen Zweipol, der nur Widerstände enthält und damit auch allein durch einen resultierenden Ersatzwiderstand beschrieben werden kann. Diese Aussage bleibt auch gültig, wenn sich ideale Übertrager in dem Netzwerk befinden, die einen Widerstand von der Sekundärseite auf ihre Primärseite transformieren.

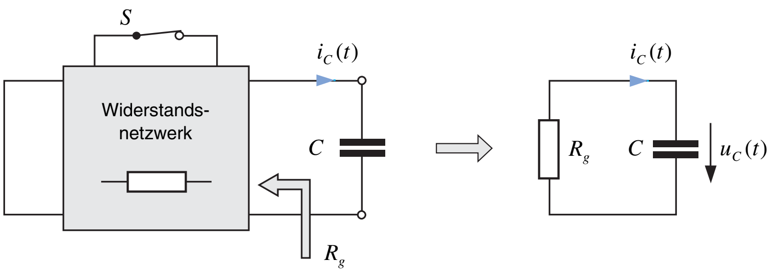


Abbildung 10.15: Netzwerk zur Bestimmung des Ersatzwiderstandes

Handelt es sich bei der Quelle im Schaltbild 10.14 nicht um eine Spannungsquelle, sondern um eine Stromquelle, dann muss darauf geachtet werden, dass die Überlagerung der Teillösungen (homogen und partikulär) den Strom in dem Zweig mit der Stromquelle nicht verändert. So wie die Spannungsquelle in Abb. 10.15 bei der Berechnung der homogenen Lösung durch einen Kurzschluss ersetzt werden muss, so muss eine Stromquelle durch einen Leerlauf ersetzt werden (vgl. Kap. 3.8).

Für das Netzwerk auf der rechten Seite der Abb. 10.15 führt der Maschenumlauf wieder auf die homogene DGL (10.3), mit dem Unterschied, dass jetzt der Ersatzwiderstand R_g anstelle von R zu verwenden ist. Ihre zeitabhängige Lösung ist aber aus den Gln. (10.4) und (10.5) bereits bekannt.

Fassen wir die bisherigen Erkenntnisse zusammen, dann erhalten wir für das Netzwerk in Abb. 10.14 aus der Überlagerung von partikulärer und homogener Lösung die Gleichung

$$u_C(t) \overset{(10.6)}{=} u_{C\,p}(t) + k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_g C}}\,. \tag{10.38}$$

Als Zeitkonstante gilt jetzt das Produkt $\tau = R_g C$. Dieses Ergebnis berücksichtigt noch nicht den Anfangswert $u_C(t_0) = u_{C0}$ der Kondensatorspannung zum Schaltzeitpunkt $t = t_0$. Da sich diese Spannung nicht sprungartig ändern kann, besitzt sie unmittelbar vor und nach dem Schaltzeitpunkt den gleichen Wert. Aus dieser Forderung erhalten wir die Unbekannte k

$$u_C(t_0) = u_{C0} \overset{(10.38)}{=} u_{C\,p}(t_0) + k\,\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{R_g C}} \quad \rightarrow \quad k = \left[u_{C0} - u_{C\,p}(t_0)\right]\mathrm{e}^{\frac{t_0}{R_g C}} \tag{10.39}$$

und durch Einsetzen die vollständige Lösung

$$u_C(t) = u_{C\,p}(t) - \left[u_{C\,p}(t_0) - u_{C0}\right]\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{R_g C}}\,. \tag{10.40}$$

Dieses Ergebnis beschreibt den allgemeinen Ausgleichsvorgang für ein Netzwerk mit einem Kondensator und mehreren Strom- und Spannungsquellen. Der erste Ausdruck auf der rechten Seite beschreibt den Zustand für $t \to \infty$, also nachdem der Ausgleichsvorgang abgeklungen ist. Dieser Lösungsanteil beinhaltet die Beiträge aller im Netzwerk vorhandenen Quellen.

Stimmt die Kondensatorspannung, die sich aus der partikulären Lösung unmittelbar nach dem Schaltvorgang berechnet, nicht mit der Kondensatorspannung unmittelbar vor dem Schaltvorgang überein, dann bedeutet dies einen Spannungssprung, der am Kondensator aufgrund der Stetigkeitsforderung nicht auftreten kann. Er wird kompensiert durch den zweiten Ausdruck (homogene Lösung) auf der rechten Seite der Gleichung, der in der eckigen Klammer genau diesen Spannungssprung enthält und mit einer Exponentialfunktion entsprechend der durch das Netzwerk vorgegebenen Zeitkonstanten abklingt.

Alle in den vorhergehenden Kapiteln berechneten Lösungen für einen Schaltvorgang mit einem Kondensator sind als Sonderfall in der Gl. (10.40) enthalten.

Befindet sich ein Kondensator in einem Netzwerk, das aus ohmschen Widerständen und idealen Übertragern sowie mehreren Strom- und Spannungsquellen besteht, dann kann die Kondensatorspannung nach einem Schaltvorgang ohne den Umweg über die Lösung der DGL in folgenden Schritten unmittelbar angegeben werden:

1. Bestimmung der partikulären Lösung $u_{Cp}(t)$ für den Netzwerkzustand nach dem Schaltvorgang
2. Bestimmung der Differenz aus Kondensatorspannung u_{C0} unmittelbar vor dem Schaltvorgang und Kondensatorspannung $u_{Cp}(t_0)$ aufgrund der partikulären Lösung unmittelbar nach dem Schaltvorgang
3. Bestimmung des Eingangswiderstandes R_g aus dem Netzwerk 10.15 (Spannungsquelle durch Kurzschluss, Stromquelle durch Leerlauf ersetzen, Kondensator entfernen und an diesen Klemmen R_g bestimmen)
4. Ergebnisse in die Gl. (10.40) mit Schaltzeitpunkt t_0 einsetzen

Enthält das Netzwerk mehrere Schalter oder wird der Schalter mehrmals betätigt, dann ist die beschriebene Rechnung, beginnend bei jedem Schaltvorgang, erneut durchzuführen. Die in dem jeweiligen Schaltaugenblick vorhandene Kondensatorspannung legt den Anfangswert für den jeweils folgenden Zeitabschnitt fest.

10.8.2 Induktivität und Widerstandsnetzwerk

Wir betrachten jetzt das gleiche Netzwerk wie in Abb. 10.14, jedoch mit einer Induktivität.

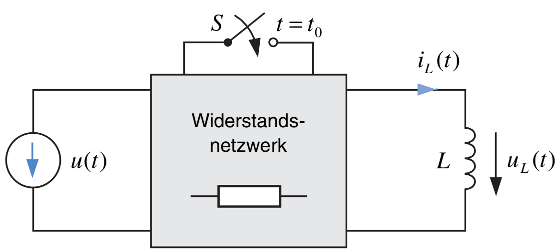


Abbildung 10.16: *RL*-Netzwerk

Die partikuläre Lösung lässt sich bei einer Gleichspannungs- oder Gleichstromquelle einfach dadurch finden, dass die Spule durch einen Kurzschluss ersetzt und der Kurzschlussstrom durch diesen Zweig berechnet wird. Bei einer zeitlich periodischen Quellenspannung wird die komplexe Wechselstromrechnung verwendet, analog zur Vorgehensweise beim Kondensator.

Zur Berechnung der homogenen Lösung wird das Ausgangsnetzwerk 10.16 bei geschlossenem Schalter und kurzgeschlossener Quellenspannung bzw. durch Leerlauf ersetzter Stromquelle betrachtet (▶Abb. 10.17). Aus diesem resultierenden Netzwerk wird der Ersatzwiderstand R_g berechnet, der zusammen mit der Spule die Reihenschaltung auf der rechten Seite der Abbildung ergibt. Die zeitabhängige Lösung der für dieses Netzwerk geltenden homogenen DGL (10.15) ist bereits aus den Gln. (10.16) und (10.17) bekannt.

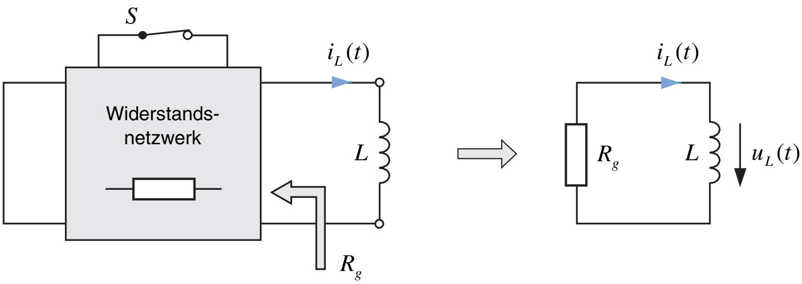


Abbildung 10.17: Netzwerk zur Bestimmung des Ersatzwiderstandes

Durch Zusammenfassung der bisherigen Erkenntnisse erhalten wir aus der Überlagerung von partikulärer und homogener Lösung die Gleichung

$$i_L(t) \overset{(10.18)}{=} i_{Lp}(t) + k\,\mathrm{e}^{-\frac{R_g}{L}t} = i_{Lp}(t) + k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} . \tag{10.41}$$

Als Zeitkonstante gilt jetzt das Verhältnis $\tau = L/R_g$. Dieses Ergebnis berücksichtigt noch nicht den Anfangswert des Spulenstromes im Schaltzeitpunkt $t = t_0$. Da sich dieser Strom nicht sprungartig ändern kann, besitzt er unmittelbar vor und nach dem Schaltvorgang den gleichen Wert. Es muss also gelten

$$i_L(t_0) = i_{L0} \overset{(10.41)}{=} i_{Lp}(t_0) + k\,\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{\tau}} \quad \rightarrow \quad k = \left[\, i_{L0} - i_{Lp}(t_0)\right] \mathrm{e}^{\frac{t_0}{\tau}} . \tag{10.42}$$

Damit lässt sich das allgemeine Ergebnis folgendermaßen angeben

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) - \left[\, i_{Lp}(t_0) - i_{L0}\right] \mathrm{e}^{-\frac{R_g}{L}(t-t_0)} . \tag{10.43}$$

Diese Gleichung hat denselben Aufbau wie die Beziehung (10.40), so dass die im Zusammenhang mit der Lösung für das Kondensatornetzwerk gemachten Aussagen auch hier gelten, wobei jetzt der Spulenstrom die Stetigkeitsforderung zu erfüllen hat. Befindet sich eine Induktivität in einem Netzwerk, das aus ohmschen Widerständen und idealen Übertragern sowie mehreren Strom- und Spannungsquellen besteht, dann kann der Strom durch die Induktivität nach einem Schaltvorgang ohne den Umweg über die Lösung der DGL in folgenden Schritten unmittelbar angegeben werden:

1. Bestimmung der partikulären Lösung $i_{Lp}(t)$ für den Netzwerkzustand nach dem Schaltvorgang

2. Bestimmung der Differenz aus Spulenstrom i_{L0} unmittelbar vor dem Schaltvorgang und Spulenstrom $i_{Lp}(t_0)$ aufgrund der partikulären Lösung unmittelbar nach dem Schaltvorgang

3. Bestimmung des Eingangswiderstandes R_g aus dem Netzwerk 10.17 (Spannungsquelle durch Kurzschluss, Stromquelle durch Leerlauf ersetzen, Spule entfernen und an diesen Klemmen R_g bestimmen)

4. Ergebnisse in die Gl. (10.43) mit Schaltzeitpunkt t_0 einsetzen

Beispiel 10.1: Schaltvorgang in einem Netzwerk mit Induktivität und Gleichstromerregung

Zur Anwendung der abgeleiteten Gleichungen soll die Schaltung in ▶Abb. 10.18 berechnet werden. Bei dem in einem stationären Zustand befindlichen Netzwerk wird zum Zeitpunkt $t = t_0$ der Schalter S geschlossen. Zu berechnen ist die in der Abb. 10.18 eingetragene, an dem Querwiderstand abfallende Spannung $u_R(t)$.

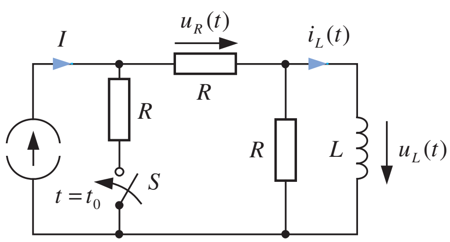


Abbildung 10.18: Geschaltetes Netzwerk mit einer Induktivität

Im ersten Schritt wird die partikuläre Lösung für $t \to \infty$ bestimmt. Der Schalter ist geschlossen und die Spule wird durch einen Kurzschluss ersetzt (▶Abb. 10.19).

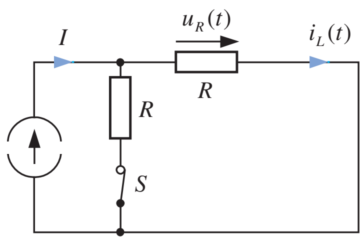


Abbildung 10.19: Netzwerk zur Bestimmung der partikulären Lösung

Der Strom I teilt sich je zur Hälfte auf die beiden Zweige auf, so dass für den Endwert des Spulenstromes $i_{Lp} = I/2$ gilt.

Der Anfangswert des Spulenstromes $i_L(t_0) = i_{L0}$ vor dem Schaltvorgang ergibt sich aus dem stationären Zustand des Netzwerks vor dem Schließen des Schalters. Lässt man also den Schalter geöffnet und ersetzt die Spule durch einen Kurzschluss, dann fließt der gesamte Strom durch die Spule, so dass $i_{L0} = I$ gilt.

Im dritten Schritt wird der Eingangswiderstand R_g bei geschlossenem Schalter entsprechend Abb. 10.17 bestimmt. Die Stromquelle wird durch einen Leerlauf ersetzt und das Netzwerk nimmt die in ▶Abb. 10.20 dargestellte Form an.

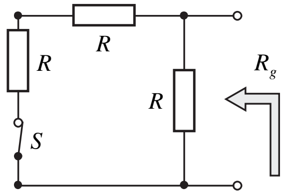


Abbildung 10.20: Netzwerk zur Bestimmung von R_g

Für den Widerstand erhalten wir aus der Parallelschaltung den Wert

$$R_g = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3} R \,. \tag{10.44}$$

Die Ergebnisse werden nun im vierten Schritt in die Gl. (10.43) eingesetzt

$$i_L(t) = \frac{I}{2} - \left(\frac{I}{2} - I\right) \mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)} = \frac{I}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)}\right). \tag{10.45}$$

Damit sind zunächst der Spulenstrom und mit Gl. (7.4)

$$u_L(t) = L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L(t) = -\frac{1}{3} RI \,\mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)} \tag{10.46}$$

auch die Spulenspannung bekannt. Zur Berechnung der gesuchten Spannung $u_R(t)$ an dem Widerstand kann das Netzwerk in ▶Abb. 10.21 zugrunde gelegt werden.

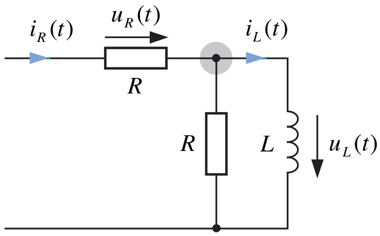


Abbildung 10.21: Knotengleichung

Aus der Knotengleichung folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} u_R(t) &= R\,i_R(t) = R\left[i_L(t) + \frac{1}{R}u_L(t)\right] \\ &= R\frac{I}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)}\right) - R\frac{I}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)} = \frac{1}{2}RI\left[1+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)}\right]. \end{aligned} \tag{10.47}$$

Die ▶Abb. 10.22 zeigt den zeitlichen Verlauf der Spannung $u_R(t)$ an dem Widerstand. Diese fällt im Schaltaugenblick sprungartig von dem Wert RI auf den Wert $(2/3)RI$ und klingt dann entsprechend der Exponentialfunktion auf den Endwert $(1/2)RI$ ab.

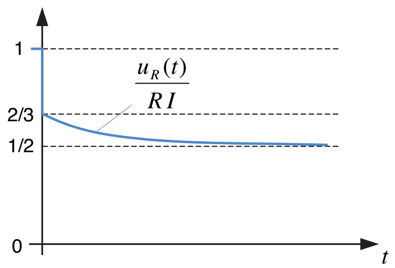


Abbildung 10.22: Zeitlicher Verlauf der Spannung am Widerstand

10.9 Spannungswandlerschaltung

Zur Vertiefung und Anwendung der bisherigen Kenntnisse soll als praktisches Beispiel die Schaltung in ▶Abb. 10.23 betrachtet werden, mit deren Hilfe eine niedrige Eingangsgleichspannung U_1 in eine höhere Ausgangsgleichspannung U_2 umgewandelt werden soll. Während diese Aufgabe bei Wechselspannungen mit Transformatoren gelöst wird, wird die Umwandlung von Gleichspannungen mithilfe von Schaltvorgängen durchgeführt[1].

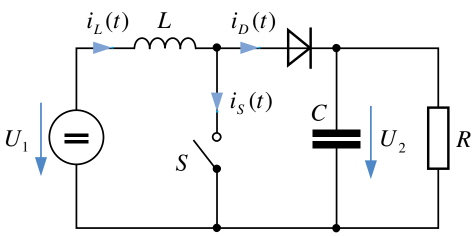


Abbildung 10.23: Spannungswandler (Typ Hochsetzsteller, engl.: boost-converter)

1 Die Erzeugung einer niedrigeren Gleichspannung aus einer höheren kann natürlich auch mit Widerstandsteilern realisiert werden. Bei der Übertragung größerer Leistungen werden aber auch in diesem Fall zur Verbesserung des Wirkungsgrades hochfrequent getaktete Spannungswandler eingesetzt.

Um die vorliegende Schaltung mit den bereits bekannten Methoden analysieren zu können, wollen wir einige Vereinfachungen vornehmen, die aber in der Praxis hinreichend gut erfüllt sind. Die berechneten Ergebnisse werden also nur unwesentlich von dem Verhalten einer realen Schaltung abweichen.

- Die Kapazität C des Ausgangskondensators wird üblicherweise so dimensioniert, dass die Spannungsschwankung, d.h. der Unterschied zwischen Maximal- und Minimalwert von $u_C(t)$ innerhalb einer Schaltperiode so klein ist, dass er vernachlässigt werden kann. Zur Vereinfachung darf die Spannung $u_C(t) = U_2$ für die Schaltungsanalyse als konstant angesehen werden. Damit liegt wieder ein Netzwerk mit nur noch einem Energiespeicher vor.
- Der Hochfrequenzschalter S wird in der Praxis durch einen Transistor realisiert. Wir wollen ihn hier als verlustlosen idealen Schalter betrachten, der je nach Schaltzustand den Widerstand $R = 0$ (Kurzschluss) bzw. $R \to \infty$ (Leerlauf) aufweist.
- Die reale Diode soll ebenfalls durch ein ideales Netzwerkelement modelliert werden, das den Strom nur in Durchlassrichtung führen kann und dabei den Widerstand Null aufweist (Kurzschluss). Ein Spannungsabfall an der Diode entsteht in diesem Fall nicht. Ein Strom in umgekehrter Richtung wird von der Diode nicht zugelassen. Sie stellt in dieser Richtung einen unendlich großen Widerstand (Leerlauf) dar, an dem eine beliebige Spannung abfallen kann.

Bevor wir die Schaltung im Detail analysieren, wollen wir zumindest prinzipiell verstehen, warum bei dieser Schaltung $U_2 > U_1$ gelten muss. Bei ständig geöffnetem Schalter S fließt ein Strom durch die Spule und die Diode in den Ausgangskondensator und ruft an diesem eine Spannung $U_2 = U_1$ hervor, d.h. die Ausgangsspannung ist mindestens so groß wie die Eingangsspannung.

Im Schaltbetrieb ändert sich diese Situation jedoch. Bei geschlossenem Schalter liegt die Eingangsspannung an der Spule und verursacht nach Gl. (10.22) einen linear *ansteigenden* Strom durch die Spule. Während dieser Zeitspanne wird also Energie in der Spule gespeichert, die nach Öffnen des Schalters an den Ausgangskondensator abgegeben wird. Energieabgabe bedeutet aber *abnehmenden* Strom in der Spule und ist nach Gl. (7.4) gleichbedeutend mit einer Spannungsumkehr an der Spule, so dass die Ausgangsspannung U_2 gemäß dem Maschenumlauf im Schaltbetrieb größer sein muss als die Eingangsspannung U_1.

Betrachten wir nun die einzelnen Netzwerkzustände für eine komplette Schaltperiode. In dem Zeitbereich $0 \le t < \delta T$ ist der Schalter S geschlossen (Kurzschluss). Die Ausgangsspannung U_2 liegt in Sperrrichtung an der Diode und der Diodenstrom ist Null in diesem Zeitintervall (Leerlauf). Das resultierende Netzwerk ist in ▶Abb. 10.24 dargestellt. Es zerfällt in zwei unabhängige Maschen. Auf der Ausgangsseite wird die dem Verbraucher R zugeführte Leistung aus dem Kondensator entnommen (die geringfügige Abnahme der Kondensatorspannung während dieser Zeitspanne wird vernachlässigt).

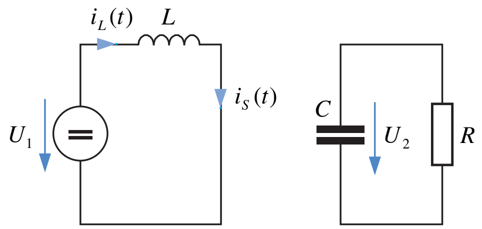


Abbildung 10.24: Ersatznetzwerk bei geschlossenem Schalter S

Auf der Eingangsseite ist die Induktivität L mit der Gleichspannungsquelle U_1 verbunden. Die Ströme $i_L(t)$ und $i_S(t)$ sind identisch. Die Analyse dieses Teilnetzwerks ist sehr einfach. Es entspricht nämlich dem in Abb. 10.7 dargestellten Sonderfall, wobei hier als Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ gewählt werden soll. Für den zeitabhängigen Verlauf des Stromes $i_L(t)$ gilt nach Gl. (10.22)

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{U_1}{L}\,t \quad \text{für} \quad 0 \le t < \delta T. \tag{10.48}$$

Er beginnt bei $i_L(0)$ und steigt in dem betrachteten Zeitbereich linear an. Im Ausschaltzeitpunkt $t = \delta T$ nimmt er seinen Maximalwert

$$i_L(\delta T) = i_L(0) + \frac{U_1}{L}\delta T \tag{10.49}$$

an. Die einzelnen Stromverläufe in dem Netzwerk sind in ▶Abb. 10.26 dargestellt. In dem betrachteten Zeitintervall wird Energie aus der Spannungsquelle U_1 entnommen und im Magnetfeld der Spule gespeichert. Ebenso wird auf der Ausgangsseite Energie aus dem Kondensator entnommen und dem Verbraucher zugeführt.

Zum Zeitpunkt $t = \delta T$ wird der Schalter S geöffnet (Leerlauf). In Kap. 10.3 haben wir bereits gesehen, dass sich die in der Spule gespeicherte Energie nicht sprungartig ändern kann und dass der Strom durch die Induktivität daher stetig sein muss. Die Induktivität wirkt wie eine Stromquelle und der Strom muss in der gleichen Richtung weiterfließen. Infolge des offenen Schalters fließt der Strom jetzt durch die Diode in den Ausgangskondensator. Die Diode stellt dabei einen Kurzschluss dar. Das in dem Zeitintervall $\delta T \le t < T$ gültige Ersatznetzwerk ist in ▶Abb. 10.25 dargestellt.

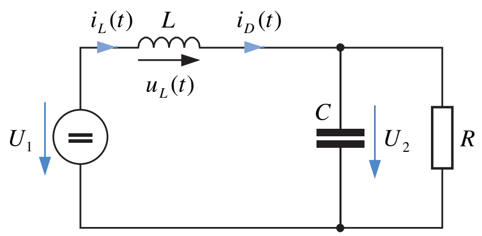


Abbildung 10.25: Ersatznetzwerk bei geöffnetem Schalter S

Die Spulenspannung $u_L(t)$ nimmt in diesem zweiten Zeitintervall $\delta T \le t < T$ den konstanten Wert $u_L(t) = U_1 - U_2 < 0$ an. Den zeitabhängigen Verlauf des Stromes $i_L(t)$ erhalten wir wieder nach Gl. (10.22)

$$i_L(t) = i_L(\delta T) + \frac{U_1 - U_2}{L}(t - \delta T) \quad \text{für} \quad \delta T \le t < T. \tag{10.50}$$

Wegen $U_2 > U_1$ fällt der Strom linear mit der Zeit ab. Im eingeschwungenen (periodischen) Zustand sind Anfangswert und Endwert des Spulenstromes identisch $i_L(0) = i_L(T)$. Die beim Abbau des Magnetfeldes frei werdende Energie sowie die zusätzlich aus der Spannungsquelle U_1 entnommene Energie wird dem Ausgangskreis zugeführt. Sie wird teilweise an den Verbraucher geliefert und teilweise zum Nachladen des Kondensators benötigt.

Die Abb. 10.26 zeigt die Stromverläufe für zwei komplette Schaltperioden. Die bisher beschriebene Betriebsart, bei der der Spulenstrom immer größer als Null ist, wird als **kontinuierlicher Betrieb** bezeichnet.

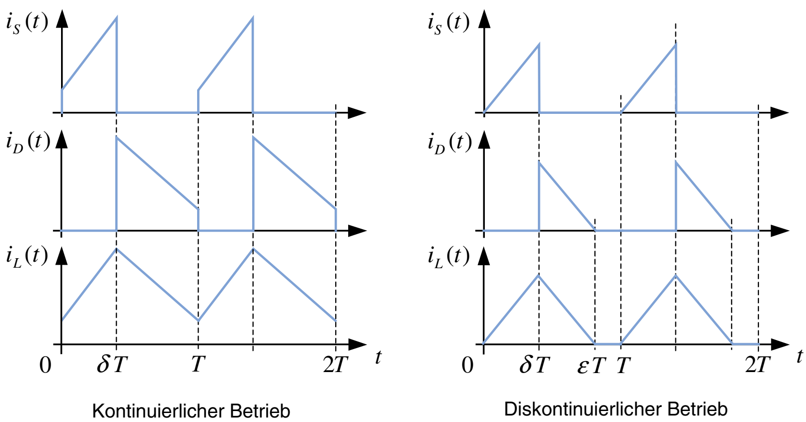


Abbildung 10.26: Stromverläufe im Netzwerk

Beim so genannten **diskontinuierlichen Betrieb** ist der Spulenstrom am Anfang und Ende jeder Schaltperiode immer gleich Null. Stellen wir uns vor, dass der Spulenstrom, beginnend beim Zeitpunkt δT, linear abfällt und den Wert Null bereits zu einem Zeitpunkt $t < T$ erreicht. Da die Ausgangsspannung U_2 größer ist als die Eingangsspannung U_1, müsste der Spulenstrom aufgrund der Gl. (10.50) weiterhin linear abfallen und damit negativ werden. Dies wird aber durch die dann sperrende Diode verhindert, so dass der Spulenstrom Null bleibt. Es bildet sich also in dem Zeitbereich zwischen dem Verschwinden des Spulenstromes (in Abb. 10.26 mit εT bezeichnet) und dem Ende der Schaltperiode T ein weiterer Netzwerkzustand aus, in dem sowohl der Schalter S als auch die Diode einen Leerlauf bilden und ausschließlich Strom aus dem Kondensator durch den Verbraucher fließt.

Im Grenzfall zwischen den beiden Betriebsarten gilt $\varepsilon = 1$. Der Abfall des Spulenstromes auf den Wert Null fällt exakt mit dem Ende der Schaltperiode zusammen. Die Frage, in welcher Betriebsart sich die Schaltung befindet, hängt von der Induktivität L, der Schaltfrequenz f und der zu übertragenden Leistung P ab.

10.10 Wirkungsgradbetrachtungen bei Schaltvorgängen

In diesem Kapitel wollen wir einige Fragen nach Verlusten und Wirkungsgrad bei den Schaltvorgängen untersuchen. Als erstes Beispiel betrachten wir noch einmal den Aufladevorgang eines Kondensators aus einer Spannungsquelle nach Abb. 10.1. Der zugehörige zeitliche Verlauf von Kondensatorspannung und Strom ist in Abb. 10.2 angegeben. Die Spannung am Widerstand $u_R(t)$ ist proportional zum Strom und muss wegen des Maschenumlaufs zusammen mit der Kondensatorspannung $u_C(t)$ die Quellenspannung U ergeben. Die ▶Abb. 10.27 zeigt noch einmal die Schaltung mit den Spannungsverläufen, wobei wir zur Vereinfachung jetzt $t_0 = 0$ setzen wollen.

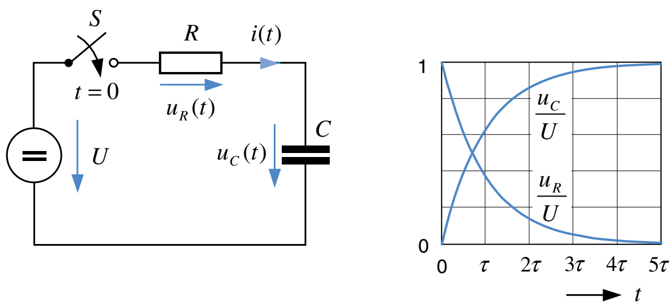


Abbildung 10.27: Spannungsverläufe nach dem Schaltvorgang

Die von der Quelle gelieferte zeitabhängige Leistung

$$p(t) = U\,i(t) \overset{(10.9)}{=} \frac{U^2}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{10.51}$$

teilt sich auf in eine Leistung am Kondensator (Zunahme der gespeicherten elektrischen Energie)

$$p_C(t) = u_C(t)\;i(t) \overset{(10.8,10.9)}{=} U\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\frac{U}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U^2}{R}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} - \mathrm{e}^{-2\frac{t}{RC}}\right) \tag{10.52}$$

und in eine Leistung am Widerstand (Wärmeentwicklung)

$$p_R(t) = \left[U - u_C(t)\right]\,i(t) = p(t) - p_C(t) = \frac{U^2}{R}\,\mathrm{e}^{-2\frac{t}{RC}}\,. \tag{10.53}$$

Aus der Darstellung dieser Funktionen in ▶Abb. 10.28a ist zu erkennen, dass unmittelbar nach dem Schaltvorgang die gesamte von der Quelle abgegebene Leistung an dem Widerstand in Wärme umgewandelt wird. Wegen der noch nicht vorhandenen Kondensatorspannung fällt nämlich die gesamte Quellenspannung an dem Widerstand ab. Die Energiespeicherung im Kondensator erfolgt in diesem Zeitbereich mit einem sehr geringen Wirkungsgrad. Mit zunehmender Kondensatorspannung wird das Verhältnis von der an den Kondensator abgegebenen Energie zu der von der Quelle gelieferten Energie günstiger und der Wirkungsgrad steigt. Der in ▶Abb. 10.28b dargestellte zeitliche Verlauf des Wirkungsgrades wird durch die gleiche Funktion beschrieben wie das Verhältnis von Kondensatorspannung zu Quellenspannung

$$\eta(t) = \frac{p_C(t)}{p(t)} \cdot 100\% = \frac{u_C(t)}{U} \cdot 100\% = \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdot 100\% \,. \tag{10.54}$$

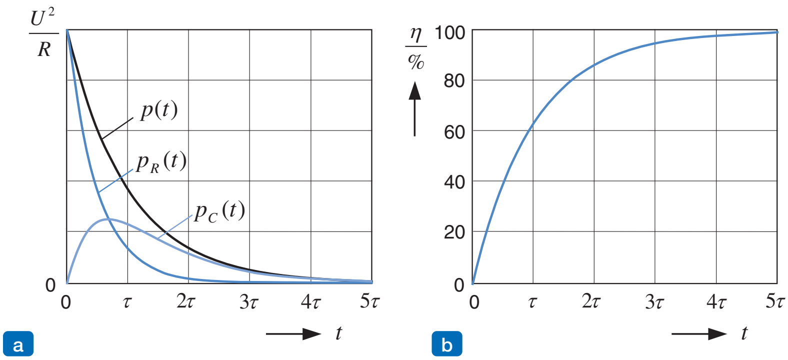


Abbildung 10.28: Momentanleistungen und momentaner Wirkungsgrad

In vielen Fällen ist der Gesamtwirkungsgrad von Interesse. Setzt man die nach Abschluss des Ladevorgangs im Kondensator gespeicherte Energie

$$W_e = \int_0^\infty p_C(t)\,\mathrm{d}t \overset{(10.52)}{=} \frac{U^2}{R} \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} - \mathrm{e}^{-2\frac{t}{RC}}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} C U^2 \tag{10.55}$$

zu der insgesamt von der Quelle gelieferten Energie

$$W = \int_0^\infty p(t)\,\mathrm{d}t \overset{(10.51)}{=} \frac{U^2}{R} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,\mathrm{d}t = C U^2 \tag{10.56}$$

ins Verhältnis, dann erhält man den Gesamtwirkungsgrad

$$\eta_{ges} = \frac{W_e}{W} \cdot 100\% = 50\% \,. \tag{10.57}$$

Bei kleinerem Widerstand R ist die Zeitkonstante $\tau = RC$ geringer, d.h. der Ladevorgang erfolgt in entsprechend kürzerer Zeit, gleichzeitig wird aber der Strom größer und die Momentanverluste am Widerstand steigen nach Gl. (10.53) mit dem Kehrwert des Widerstandes an. Diese beiden Effekte kompensieren sich gegenseitig, so dass das Ergebnis (10.57) unabhängig von dem Wert des Widerstandes ist.

Wird der Kondensator nicht bis auf den vollen Wert der Quellenspannung aufgeladen, dann wird der Gesamtwirkungsgrad noch deutlich schlechter, da in Abb. 10.28b nur der Bereich mit geringen η-Werten durchlaufen wird. Der Gesamtwirkungsgrad als Funktion der maximalen Kondensatorspannung lässt sich auf einfache Weise berechnen. Wir nehmen an, dass der Kondensator in Abb. 10.27 auf den Endwert $u_C = kU$ mit $0 \le k \le 1$ aufgeladen werden soll. Diese Spannung wird zu einem Zeitpunkt t_1 erreicht, der mit Gl. (10.8) berechnet werden kann

$$kU = U\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{RC}}\right) \quad \rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{RC}} = 1 - k \quad \rightarrow \quad t_1 = -RC\ln(1-k)\,. \tag{10.58}$$

Wird der Schalter zu diesem Zeitpunkt wieder geöffnet, dann ist im Kondensator die Energie

$$W_e = \frac{1}{2}C(kU)^2 \tag{10.59}$$

gespeichert. Mit der bis zu diesem Zeitpunkt von der Quelle gelieferten Energie

$$W \overset{(10.56)}{=} \frac{U^2}{R}\int_0^{t_1} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,\mathrm{d}t = CU^2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{RC}}\right) \overset{(10.58)}{=} kCU^2 \tag{10.60}$$

erhalten wir den Gesamtwirkungsgrad aus dem Verhältnis

$$\boxed{\eta_{ges} = \frac{W_e}{W}\cdot 100\% = k\cdot 50\%}\,. \tag{10.61}$$

Dieser Gesamtwirkungsgrad ist in ▶Abb. 10.29 als Funktion der bezogenen Kondensatorspannung u_C/U dargestellt und nimmt im günstigsten Fall den Wert 50 % an. Wird der Kondensator z.B. nur auf 40 % der Quellenspannung aufgeladen, dann erfolgt dieser Ladevorgang mit einem Gesamtwirkungsgrad von lediglich 20 %.

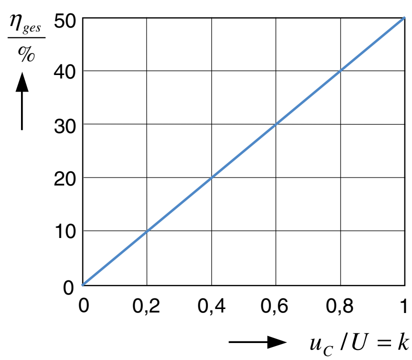


Abbildung 10.29: Gesamtwirkungsgrad als Funktion der bezogenen Kondensatorspannung

Merke

Das Aufladen eines zunächst ungeladenen Kondensators aus einer Spannungsquelle mit der Spannung U auf den Wert kU mit $0 \le k \le 1$ erfolgt mit einem Wirkungsgrad von $k \cdot 50$ %. Dieser Wert ist unabhängig von der Größe eines in Reihe liegenden Widerstandes.

Gute Wirkungsgrade lassen sich bei dieser Energieübertragung zwischen Spannungsquelle und Kondensator bzw. zwischen zwei Kondensatoren nach Abb. 10.28 nur erzielen, wenn die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Kondensatoren gering ist, d.h. ein aufzuladender bzw. nachzuladender Kondensator sollte vor dem Ladevorgang bereits eine Spannung aufweisen, die prozentual nur wenig unterhalb der Quellenspannung liegt.

Beispiel 10.2: Energieübertragung zwischen Kondensatoren

In diesem Beispiel wird eine Situation mit sehr geringem Wirkungsgrad untersucht. Ein Eingangskondensator C mit der Anfangsspannung U wird gemäß ▶Abb. 10.30 zum Zeitpunkt $t = 0$ über einen Widerstand R mit einem ungeladenen Ausgangskondensator verbunden, der eine um den Faktor 9 höhere Kapazität aufweist. Zu berechnen ist der zeitabhängige Strom- und Spannungsverlauf an den Komponenten, der Gesamtwirkungsgrad der Energieübertragung sowie die Spannung an den Kondensatoren nach Abschluss des Umladevorganges.

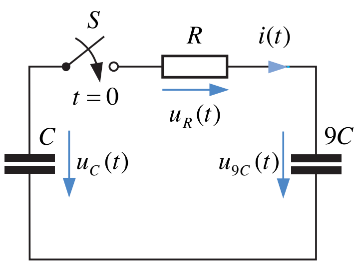


Abbildung 10.30: Betrachtete Anordnung

Im Gegensatz zur Abb. 10.27 ist jetzt die Quellenspannung nicht mehr konstant. Mit zunehmender Aufladung des Ausgangskondensators nimmt die Spannung am Eingangskondensator ab. Mit den Bezeichnungen der Abb. 10.30 gelten die Anfangsbedingungen

$$u_C(0) = U \quad \text{und} \quad u_{9C}(0) = 0. \tag{10.62}$$

Der Maschenumlauf

$$u_C(t) = u_R(t) + u_{9C}(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,u_C(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,u_R(t)}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}\,u_{9C}(t)}{\mathrm{d}\,t} \tag{10.63}$$

führt mit Gl. (7.5) und unter Beachtung der Stromrichtung im Kondensator C auf die homogene Differentialgleichung für den Strom

$$\frac{-1}{C}\,i(t) = R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,i(t) + \frac{1}{9C}\,i(t) \quad \rightarrow \quad \frac{9RC}{10}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,i(t) + i(t) = 0\,, \tag{10.64}$$

deren Lösung durch die Exponentialfunktion

$$i(t) = k\,\mathrm{e}^{\frac{-10t}{9RC}} \tag{10.65}$$

mit der zunächst noch unbestimmten Konstanten k gegeben ist. Diese wird aus der Anfangsbedingung

$$u_C(0) = u_R(0) + u_{9C}(0) \quad \overset{(10.62)}{\rightarrow} \quad U = R\,i(0) + 0 \overset{(10.65)}{=} R\,k \tag{10.66}$$

bestimmt. Damit sind alle zeitabhängigen Verläufe bekannt

$$i(t) = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{\frac{-10t}{9RC}}\,, \quad u_C(t) \overset{(7.5)}{=} U - \frac{9U}{10}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-10t}{9RC}}\right) \text{ und } u_{9C}(t) \overset{(7.5)}{=} \frac{U}{10}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-10t}{9RC}}\right). \tag{10.67}$$

Nach Beendigung des Ausgleichsvorganges nehmen die beiden Kondensatoren die gleiche Spannung $0{,}1U$ an. Für die gespeicherte Energie vor bzw. nach der Umladung gelten die Beziehungen

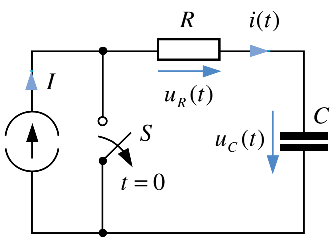
$$W_e(t < 0) = \frac{1}{2}CU^2 \tag{10.68}$$

und

$$W_e(t \to \infty) = W_{eC}(t \to \infty) + W_{e9C}(t \to \infty) = \frac{1}{2}C\left(\frac{U}{10}\right)^2 + \frac{1}{2}9C\left(\frac{U}{10}\right)^2 = \frac{1}{2}C\frac{U^2}{10}\,, \tag{10.69}$$

d.h. von der zu Beginn in C gespeicherten Energie sind 90 % an dem Widerstand in Wärme umgewandelt worden.

Wir wollen jetzt noch den Wirkungsgrad untersuchen, wenn ein Kondensator aus einer Stromquelle aufgeladen wird. In der Schaltung in ▶Abb. 10.31 wird der Schalter S zum Zeitpunkt $t = 0$ geöffnet und der konstante Strom I fließt in den anfangs ungeladenen Kondensator.



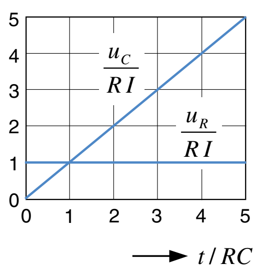


Abbildung 10.31: Aufladen eines Kondensators aus einer Stromquelle

Mit der linear ansteigenden Kondensatorspannung nach Gl. (10.12)

$$u_C(t) = \frac{I}{C}t \tag{10.70}$$

und der konstanten Spannung *RI* am Widerstand setzt sich die von der Quelle gelieferte zeitabhängige Leistung

$$p(t) = \left[u_R(t) + u_C(t)\right] I = \left(R + \frac{t}{C}\right) I^2 \tag{10.71}$$

aus einem konstanten Anteil infolge der Verluste am Widerstand und einem zeitlich linear ansteigenden Anteil zur Erhöhung der Energie im Kondensator zusammen. Den zeitabhängigen Wirkungsgrad erhalten wir wieder aus dem Verhältnis der momentan an den Kondensator abgegebenen Leistung zur momentan von der Quelle gelieferten Leistung

$$\eta(t) = \frac{u_C(t)\, I}{\left[u_R(t) + u_C(t)\right] I} \cdot 100\,\% = \frac{t}{RC + t} \cdot 100\,\% \,. \tag{10.72}$$

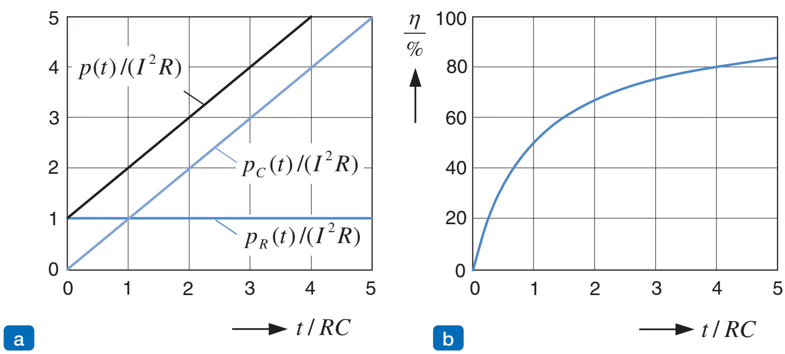


Abbildung 10.32: Momentanleistungen und momentaner Wirkungsgrad

Die zeitabhängigen Leistungen und der Wirkungsgrad (10.72) sind in ▶Abb. 10.32 dargestellt. Im Vergleich mit der Abb. 10.28 erhalten wir jetzt ein völlig anderes Verhalten. Zu Beginn ist der Wirkungsgrad ebenfalls sehr gering, das Gleiche gilt für die in dieser Zeit aus der Quelle entnommene Leistung. Mit zunehmender Zeit steigt die von der Quelle abgegebene Leistung bei kontinuierlich verbessertem Wirkungsgrad. Der Anstieg bei der Leistung ist eine Folge der ansteigenden Kondensatorspannung. Der Gesamtwirkungsgrad wird also umso besser, je länger der Kondensator geladen wird, d.h. je größer das Verhältnis t/RC wird. Im Grenzfall $R = 0$ wird wegen $\eta(t) = 100\,\%$ nach Gl. (10.72) der Gesamtwirkungsgrad ebenfalls 100 %. Hier liegt die Ursache für den sehr hohen Wirkungsgrad der Spannungswandlerschaltungen (vgl. Abb. 10.23). Die aus einem Kondensator (Spannungsquellenverhalten) entnommene Energie wird zunächst als magnetische Energie in einer Spule zwischengespeichert und anschließend von der Spule (Stromquellenverhalten) an den Ausgangskondensator abgegeben. Die relativ geringen Widerstände von Spule, Schalttransistor und Diode erlauben Wirkungsgrade im Bereich oberhalb von 90 %.

10.11 Zusammenfassung

Bevor wir uns mit der Erweiterung unseres Kenntnisstandes beschäftigen, sollen an dieser Stelle zunächst noch einmal die Voraussetzungen im Überblick zusammengestellt werden, unter denen wir bereits Schaltvorgänge in Netzwerken analysieren können.

Quellen

- Das Netzwerk darf mehrere Quellen besitzen. Wegen der voraussetzungsgemäß linearen Komponenten dürfen die Quellen einzeln betrachtet und die Teillösungen überlagert werden.
- Bei jeder Quelle darf es sich um eine Gleichspannungs- oder Wechselspannungsquelle handeln, ebenso um eine Gleichstrom- oder Wechselstromquelle.
- Unter Einbeziehung der Harmonischen Analyse darf der Strom- oder Spannungsverlauf der Quelle einen beliebigen, zeitlich periodischen Verlauf aufweisen.
- Bei bestimmten periodischen Signalformen kann wahlweise im Frequenzbereich mit der Harmonischen Analyse oder im Zeitbereich mit einer Abfolge einzelner Schaltvorgänge gerechnet werden (vgl. Kap. 10.9).

Schalter

- Das Netzwerk darf mehrere Schalter enthalten. Bei jedem Schaltvorgang muss die Stetigkeit der Ströme durch Induktivitäten und der Spannungen an Kondensatoren durch Berücksichtigung der Anfangsbedingungen gewährleistet werden.
- Die Position der Schalter ist im Prinzip beliebig. Die aus den Stetigkeitsforderungen resultierenden Einschränkungen sind in Kap. 10.7 angegeben.

Komponenten

- Alle Komponenten müssen linear sein, d.h. die Werte der Komponenten sind unabhängig von den Strömen und Spannungen.
- In dem Netzwerk dürfen beliebig viele Widerstände und ideale Übertrager enthalten sein.
- Das Netzwerk darf einen Energiespeicher (Induktivität oder Kapazität) enthalten.

Damit sind wir bereits in der Lage, sehr viele der praktisch auftretenden Probleme zu behandeln. Eine wesentliche Einschränkung werden wir im folgenden Kapitel beseitigen, in dem wir die Erweiterung auf mehrere Energiespeicher betrachten.

10.12 Netzwerke mit mehreren Energiespeichern

Die in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellte Methode zur Lösung der Differentialgleichungen (DGL) im Zeitbereich soll jetzt auf den Fall mit mehreren Energiespeichern verallgemeinert werden. Die Herleitung der Lösung wird in mehrere Teilschritte zerlegt, die nacheinander diskutiert und am Beispiel des Reihenschwingkreises anschließend nochmals nachvollzogen werden.

1. Schritt: Aufstellen der Differentialgleichungen

Ein gegebenes Netzwerk mit Energiespeichern (Induktivitäten und Kapazitäten) kann mithilfe der Kirchhoff'schen Maschen- und Knotenregel durch ein gekoppeltes System algebraischer Gleichungen und Differentialgleichungen beschrieben werden. Die Anzahl n der unabhängigen Energiespeicher in dem Netzwerk liefert entsprechend den Gleichungen in Tab. 7.1 n Differentialgleichungen erster Ordnung. Beispiele für nicht unabhängige Energiespeicher sind in Reihe liegende oder parallel geschaltete Komponenten gleichen Typs, die durch eine resultierende Kapazität bzw. Induktivität ersetzt werden können.

Durch Zusammenfassung all dieser Gleichungen lässt sich eine lineare, gewöhnliche, inhomogene DGL n-ter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + ... + a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = f(t) \tag{10.73}$$

mit konstanten Koeffizienten a_0 bis $a_{n\text{-}1}$ ($a_n = 1$) aufstellen, in der nur noch eine unbekannte zeitabhängige Größe $y(t)$ enthalten ist. Die Funktion $y(t)$ steht stellvertretend für eine der Zustandsgrößen in dem Netzwerk, d.h. für die Spannung an einem Kondensator oder für den Strom durch eine Induktivität. In den Koeffizienten a_0 bis $a_{n\text{-}1}$ ist die Information über den Aufbau des Netzwerks, seine Komponenten und deren Verknüpfung untereinander, enthalten.

Die DGL ist *linear*, da $y(t)$ nur in der ersten Potenz auftritt, sie ist *gewöhnlich*, da alle Größen nur von einer Variablen, nämlich der Zeit t, abhängen, und sie ist *inhomogen*, da sie eine von der unbekannten Zustandsgröße $y(t)$ unabhängige **Störfunktion** $f(t)$ enthält. Nach den bisher vorgestellten Lösungsmethoden darf die Störfunktion $f(t)$, die die Quellenströme und -spannungen und eventuell auch deren Ableitungen enthält und somit bekannt ist, aus einem Gleichanteil sowie aus sinusförmigen Funktionen bestehen, für die wir das Netzwerk im eingeschwungenen Zustand mit der symbolischen Methode und unter Zuhilfenahme von Fourier-Reihen berechnen können. Eine Erweiterung auf andere zeitabhängige Funktionen erfolgt in Kap. 11.

Die Lösung der DGL (10.73) setzt sich aus der *homogenen* und der *partikulären* Lösung zusammen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)\,. \tag{10.74}$$

Die partikuläre Lösung beschreibt das Netzwerkverhalten nach Beendigung des Ausgleichsvorganges und muss die DGL

$$\frac{\mathrm{d}^n y_p(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y_p(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + ... + a_1\frac{\mathrm{d}y_p(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y_p(t) = f(t) \tag{10.75}$$

erfüllen. Theoretisch dauert der Ausgleichsvorgang unendlich lang, in der Praxis kann er aber bereits nach relativ kurzer Zeit (nach Ablauf weniger Zeitkonstanten) als beendet angesehen werden. Die partikuläre Lösung kann zwar, ausgehend von der DGL (10.75), ermittelt werden, in vielen Fällen liegt ihre Lösung aber aus einer Berechnung mit den bekannten Methoden bereits vor.

Die homogene Lösung beschreibt den Übergang des Netzwerks von einem stationären Zustand in den anderen. Die zugehörige DGL lautet

$$\frac{\mathrm{d}^n y_h(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y_h(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + ... + a_1\frac{\mathrm{d}y_h(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y_h(t) = 0\,. \tag{10.76}$$

Man beachte, dass die Überlagerung $y(t)$ in Gl. (10.74) nach Einsetzen der beiden Gln. (10.75) und (10.76) die Ausgangsgleichung (10.73) erfüllt.

2. Schritt: Bestimmung der partikulären Lösung

Das Netzwerk wird so behandelt, als habe sich der Schaltvorgang schon vor unendlich langer Zeit ereignet. Die Methode zur Berechnung der partikulären Lösung hängt von der Störfunktion ab. Ist $f(t)$ eine Konstante, dann wird das Netzwerk als Gleichstromnetzwerk behandelt, d.h. Induktivitäten werden durch Kurzschluss, Kapazitäten durch Leerlauf ersetzt. Handelt es sich bei der Störfunktion um harmonische Schwingungen, dann werden die Teillösungen mit der komplexen Wechselstromrechnung bestimmt. Die Methoden wurden in den vorangegangenen Kapiteln behandelt, so dass wir an dieser Stelle die partikuläre Lösung als bekannt voraussetzen dürfen.

3. Schritt: Bestimmung der homogenen Lösung

Ausgangspunkt ist jetzt die DGL (10.76). Diese Gleichung hängt nicht von der Störfunktion $f(t)$ ab, d.h. die allgemeine Lösung kann unabhängig von dem zeitlichen Verlauf der Quellenspannungen und -ströme aufgestellt werden. Mit dem Lösungsansatz

$$y_h(t) = k\,\mathrm{e}^{pt}\,, \tag{10.77}$$

in dem die Werte k und p zunächst unbekannte Konstanten darstellen, und den zugehörigen Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}y_h(t)}{\mathrm{d}t} = pk\,\mathrm{e}^{pt},\quad \frac{\mathrm{d}^2 y_h(t)}{\mathrm{d}t^2} = p^2 k\,\mathrm{e}^{pt},\quad ......\quad \frac{\mathrm{d}^n y_h(t)}{\mathrm{d}t^n} = p^n k\,\mathrm{e}^{pt} \tag{10.78}$$

erhalten wir aus der Gl. (10.76) die Beziehung

$$\left(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0\right) k\,\mathrm{e}^{pt} = 0\,. \tag{10.79}$$

Unter der Annahme, dass die homogene Lösung (10.77) nicht bereits verschwindet, verbleibt die **charakteristische Gleichung**

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = 0\,. \tag{10.80}$$

Diese besitzt genau n als **Eigenwerte** bezeichnete Lösungen $p_1, p_2, ...\, p_n$. Da die Koeffizienten a_0 bis a_{n-1} reelle Werte sind, müssen die Eigenwerte ebenfalls reell oder paarweise konjugiert komplex sein. Zusätzlich kann der Fall eintreten, dass einige Eigenwerte gleich sind, d.h. die Gl. (10.80) besitzt dann eine mehrfache Wurzel. Wir müssen also für den allgemeinen Lösungsansatz einige Fallunterscheidungen treffen:

1. Sind alle Eigenwerte reell und verschieden, dann besitzt die homogene DGL die n linear unabhängigen Lösungen

$$y_h(t) = k_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} + k_2\,\mathrm{e}^{p_2 t} + ... + k_n\,\mathrm{e}^{p_n t}\,. \tag{10.81}$$

2. Besitzt die charakteristische Gleichung eine mehrfache Wurzel, z.B. eine dreifache Wurzel mit $p_1 = p_2 = p_3$, dann sind die n linear unabhängigen Lösungen durch

$$y_h(t) = \left(k_1 + k_2\,t + k_3\,t^2\right) e^{p_1 t} + k_4\,e^{p_4 t} + \ldots + k_n\,e^{p_n t} \tag{10.82}$$

gegeben.

3. Sind zwei Eigenwerte, z.B. p_1 und p_2 konjugiert komplex, dann gelten mit $p_1 = \alpha + \mathrm{j}\beta$ und $p_2 = \alpha - \mathrm{j}\beta$ die alternativen Ansätze in komplexer bzw. reeller Schreibweise

$$\begin{aligned} y_h(t) &= k_1\,e^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)\,t} + k_2\,e^{(\alpha-\mathrm{j}\beta)\,t} + k_3\,e^{p_3 t} + \ldots + k_n\,e^{p_n t} \\ &= K_1\,e^{\alpha t}\cos\beta t + K_2\,e^{\alpha t}\sin\beta t + k_3\,e^{p_3 t} + \ldots + k_n\,e^{p_n t}\,. \end{aligned} \tag{10.83}$$

Bei den betrachteten passiven Netzwerken müssen die Ausgleichsvorgänge mit der Zeit abklingen, d.h. die reellen Eigenwerte p in Gl. (10.77) müssen *negativ* sein, bei den konjugiert komplexen Eigenwerten muss der Realteil ebenfalls negativ sein. Eine Ausnahme bildet ein als verlustlos angenommenes, nur aus Induktivitäten und Kapazitäten bestehendes Netzwerk. In diesem Fall verschwindet der Realteil von p und es stellt sich nach Gl. (10.83) eine ungedämpfte Schwingung ein.

In den Ansätzen (10.82) und (10.83) sind nur eine mehrfache Wurzel und auch nur ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar berücksichtigt. Treten diese mehrfach auf, dann sind die Ansätze in der entsprechenden Weise zu modifizieren. Eine Kombination der beiden Situationen mit mehreren gleichen, konjugiert komplexen Eigenwerten wird in dem folgenden Beispiel behandelt:

Beispiel 10.3: Linear unabhängige Lösungen einer DGL

Zu der DGL (10.84) sollen die linear unabhängigen Lösungen angegeben werden:

$$\frac{d^5 y(t)}{dt^5} + 7\frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 26\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 62\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 85\frac{dy(t)}{dt} + 75 = 0 \tag{10.84}$$

Die charakteristische Gleichung

$$p^5 + 7p^4 + 26p^3 + 62p^2 + 85p + 75 = 0 \tag{10.85}$$

besitzt eine einfache und zwei doppelte, konjugiert komplexe Nullstellen

$$p_1 = -3\,,\quad p_2 = p_3 = -1 + \mathrm{j}2\,,\quad p_4 = p_5 = -1 - \mathrm{j}2\,. \tag{10.86}$$

Das gleichzeitige Auftreten von doppelten, konjugiert komplexen Nullstellen führt mit den Ansätzen (10.82) und (10.83) auf die allgemeine Lösung

$$y_h(t) = k_1\,e^{-3t} + \left(k_2 + k_3\,t\right) e^{-t}\cos 2t + \left(k_4 + k_5\,t\right) e^{-t}\sin 2t\,. \tag{10.87}$$

4. Schritt: Bestimmung der unbekannten Konstanten k

Die Überlagerung der homogenen und partikulären Lösung entsprechend Gl. (10.74) zur Gesamtlösung enthält noch die n unbekannten Integrationskonstanten k aus der homogenen Lösung. Diese müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden, die sich dadurch ergeben, dass an den n Speicherelementen die Energie stetig ist, d.h. die Ströme in den Spulen und die Spannungen an den Kondensatoren müssen beim Schaltvorgang stetig bleiben. Diese Anfangsbedingungen müssen auf die in der DGL (10.73) verwendete Netzwerkgröße umgerechnet werden, wodurch sich Bedingungen für $y(t)$ und für die ersten $n - 1$ Ableitungen von $y(t)$ zum Schaltzeitpunkt ergeben.

Für einen idealen Übertrager, der lediglich durch sein Übersetzungsverhältnis charakterisiert ist und keine Energie speichert, existiert genauso wie für einen Widerstand keine Stetigkeitsforderung. Wird ein im Netzwerk befindlicher Übertrager jedoch durch ein Ersatzschaltbild mit induktiven Komponenten beschrieben, dann trägt jede einzelne Induktivität mit einer zusätzlichen DGL zum Gleichungssystem bei und muss bezüglich der Anfangsbedingungen genauso wie jede andere Induktivität behandelt werden. Bei einem fest gekoppelten Übertrager mit verschwindenden Streuinduktivitäten muss der Magnetisierungsstrom durch die Hauptinduktivität zwar stetig sein, dies erfordert aber nicht unbedingt die Stetigkeit von Eingangs- und Ausgangsstrom.

Findet der Schaltvorgang zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ statt, dann sind die Netzwerkgrößen $i_L(t_0 - 0)$ und $u_C(t_0 - 0)$ unmittelbar vor dem Schaltzeitpunkt bekannt. Ohne Überlagerung des Ausgleichsvorganges würden sie unmittelbar nach dem Schaltvorgang, d.h. zum Zeitpunkt $t_0 + 0$ den durch die partikuläre Lösung bestimmten Wert annehmen. Die Unterschiede zwischen diesen beiden Werten, nämlich

$$\begin{array}{lcc} \Delta u_C = u_{C\,p}(t_0+0) - u_C(t_0-0) & \text{bei den} & \text{Kondensatorspannungen} \\ \Delta i_L \;= i_{L\,p}(t_0+0) - i_L(t_0-0) & & \text{Spulenströmen} \end{array} \tag{10.88}$$

verletzen die Stetigkeitsbedingung und sind verantwortlich für den Ausgleichsvorgang. Daraus lassen sich zwei interessante Konsequenzen ablesen:

- Liefert die partikuläre Lösung zu dem Schaltzeitpunkt genau die gleichen Kondensatorspannungen und die gleichen Spulenströme, die unmittelbar vor dem Schaltzeitpunkt vorlagen, dann verschwinden alle Differenzen (10.88) und es findet kein Ausgleichsvorgang statt. Diese Situation kennen wir bereits aus dem mittleren Diagramm der Abb. 10.10.
- Der weitere zeitliche Verlauf der partikulären Lösung für $t > t_0$ hat keinen Einfluss auf die homogene Lösung. Diese Aussage gilt unabhängig davon, ob es sich dabei um eine Konstante oder um eine durch eine Fourier-Entwicklung beschriebene zeitabhängige Funktion handelt. Allein die durch die partikuläre Lösung beschriebenen Momentanwerte im Schaltaugenblick $t_0 + 0$ beeinflussen die Differenzen (10.88) und damit den Verlauf der homogenen Lösung (vgl. auch Gl. (10.40) bzw. (10.43)).

Die beschriebenen vier Schritte zur Berechnung der Gesamtlösung bei einem Schaltvorgang sind natürlich auch in den bereits betrachteten Beispielen in den vorangegangenen Kapiteln enthalten. Zum Abschluss wollen wir ein Netzwerk mit unterschiedlichen Energiespeichern betrachten, bei dem der Schaltvorgang im Gegensatz zu den bisherigen Beispielen Schwingungen hervorrufen kann.

10.12.1 Serienschwingkreis an Gleichspannung

Wir betrachten den in ▶Abb. 10.33 dargestellten Serienschwingkreis, der zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Gleichspannungsquelle U verbunden wird. Die Kondensatorspannung und der Strom sollen als Funktion der Zeit für $t > 0$ berechnet werden und zwar für den allgemeinen Fall, dass sowohl der Spulenstrom als auch die Kondensatorspannung zum Schaltzeitpunkt einen nicht verschwindenden Anfangswert aufweisen.

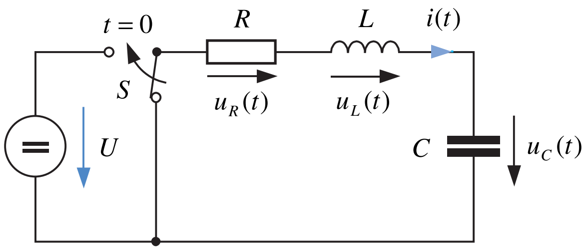


Abbildung 10.33: Serienschwingkreis an Gleichspannung

1. Schritt: Aufstellen der Differentialgleichungen

Die Maschengleichung

$$U = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \tag{10.89}$$

wird mit den an den Komponenten geltenden Beziehungen

$$u_R(t) = R\,i(t)\,, \quad u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}\,t} \quad \text{und} \quad i(t) = C\frac{\mathrm{d}\,u_C(t)}{\mathrm{d}\,t} \tag{10.90}$$

auf eine der Differentialgleichung (10.73) entsprechende Form gebracht

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}\,u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C(t) = \frac{U}{LC}\,, \tag{10.91}$$

die zusammen mit den Anfangsbedingungen für die Kondensatorspannung und für den Spulenstrom

$$u_C(t=0) = u_{C0} \quad \text{und} \quad i(t=0) = i_{L0} \tag{10.92}$$

das Problem eindeutig beschreibt.

2. Schritt: Bestimmung der partikulären Lösung

Die partikuläre Lösung für $t \to \infty$ kann direkt angegeben werden. Wegen der Gleichspannung am Eingang werden die Spule durch einen Kurzschluss und der Kondensator durch einen Leerlauf ersetzt. Die Spannung am Kondensator nimmt den Wert der Quellenspannung an und der Strom verschwindet

$$u_{Cp}(t) = U \quad \text{und} \quad i_p(t) = 0. \tag{10.93}$$

Wählen wir die DGL (10.75) als Ausgangspunkt zur Bestimmung der partikulären Lösung, dann verschwinden wegen der zeitlich konstanten Störfunktion $f(t) = U$ alle Zeitableitungen auf der linken Gleichungsseite, so dass wir unmittelbar das gleiche Ergebnis erhalten

$$y_p(t) = \frac{1}{a_0} f(t) \quad \overset{(10.91)}{\rightarrow} \quad u_{C\,p}(t) = U \,. \tag{10.94}$$

3. Schritt: Bestimmung der homogenen Lösung

Mit dem Ansatz für die homogene Lösung

$$u_{C\,h}(t) = k\,\mathrm{e}^{pt} \tag{10.95}$$

erhalten wir die charakteristische Gleichung

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0 \tag{10.96}$$

mit den beiden Eigenwerten

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \text{und} \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\,, \tag{10.97}$$

die mit der Abklingkonstanten $\delta = R/(2L)$ und mit der Resonanzkreisfrequenz $\omega_0{}^2 = 1/(LC)$ nach Gl. (8.86) in der folgenden Weise geschrieben werden können

$$\boxed{p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}} \quad \text{und} \quad \boxed{p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}}\,. \tag{10.98}$$

An dieser Stelle müssen wir drei mögliche Fälle unterscheiden: Die Wurzel kann reell, Null oder imaginär werden. Wir werden diese Fälle getrennt betrachten.

Erster Fall: *Die Wurzel ist reell*

Die Voraussetzung für eine reelle Wurzel ist erfüllt unter der Bedingung

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \overset{(8.90)}{=} Q_s < 0{,}5\,. \tag{10.99}$$

Mit der homogenen Lösung für die Kondensatorspannung nach Gl. (10.81)

$$u_{C\,h}(t) = k_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} + k_2\,\mathrm{e}^{p_2 t} \tag{10.100}$$

erhalten wir die Gesamtlösung entsprechend Gl. (10.74)

$$u_C(t) = U + k_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} + k_2\,\mathrm{e}^{p_2 t}\,. \tag{10.101}$$

Sie besteht aus dem konstanten Anteil für $t \to \infty$ und zwei mit unterschiedlichen Zeitkonstanten abklingenden Exponentialfunktionen. Es werden keine Schwingungen angeregt, so dass man diesen Strom- und Spannungsverlauf als **aperiodischen Fall** bezeichnet.

Zweiter Fall: *Die Wurzel verschwindet*

In diesem Grenzfall erhalten wir eine doppelte Nullstelle $p_1 = p_2$ und nach Gl. (10.82) die homogene Lösung

$$u_{C\,h}(t) = \left(k_1 + k_2\, t\right)\,\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{10.102}$$

sowie die Gesamtlösung

$$u_C(t) = U + \left(k_1 + k_2\, t\right)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,. \tag{10.103}$$

In diesem Fall strebt die Kondensatorspannung relativ schnell gegen ihren Endwert und zwar ebenfalls ohne zu schwingen. Dieser Fall wird als **aperiodischer Grenzfall** bezeichnet.

Dritter Fall: *Die Wurzel ist imaginär*

Die beiden Eigenwerte sind konjugiert komplex

$$\begin{aligned} p_1 &= -\delta + \mathrm{j}\sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} = -\delta + \mathrm{j}\,\omega_d \\ p_2 &= -\delta - \mathrm{j}\sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} = -\delta - \mathrm{j}\,\omega_d \end{aligned} \tag{10.104}$$

und wir erhalten nach Gl. (10.83) die homogene Lösung

$$u_{C\,h}(t) = \left[k_1 \cos\left(\omega_d\, t\right) + k_2 \sin\left(\omega_d\, t\right)\right]\,\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{10.105}$$

sowie die Gesamtlösung

$$u_C(t) = U + \left[k_1 \cos\left(\omega_d\, t\right) + k_2 \sin\left(\omega_d\, t\right)\right]\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,. \tag{10.106}$$

Die homogene Lösung besteht jetzt aus einer Schwingung der Kreisfrequenz ω_d, deren Amplitude entsprechend der Exponentialfunktion abklingt. Diese Situation wird als **periodischer Fall** bezeichnet. Im Grenzfall $R = 0$ bzw. $\delta = 0$ sind die beiden Eigenwerte rein imaginär. Die Exponentialfunktion nimmt den konstanten Wert 1 an und wir erhalten eine ungedämpfte Schwingung mit zeitlich konstanter Amplitude.

4. Schritt: Bestimmung der unbekannten Konstanten k

Zur Bestimmung der beiden Konstanten k_1 und k_2 müssen in allen drei Fällen die Anfangsbedingungen (10.92) erfüllt werden. Wir haben bereits erwähnt, dass diese Bedingungen auf die verwendete Netzwerkgröße umgerechnet werden müssen, im vorliegenden Fall auf $u_C(t)$. Mit Gl. (10.92) erhalten wir die beiden Forderungen für die Kondensatorspannung und ihre erste Ableitung

$$u_C(t=0) = u_{C0} \quad \text{und} \quad i(t) = C\frac{\mathrm{d}\,u_C(t)}{\mathrm{d}\,t} \;\rightarrow\; \left.\frac{\mathrm{d}\,u_C(t)}{\mathrm{d}\,t}\right|_{t=0} = \frac{i_{L0}}{C}\,. \tag{10.107}$$

Mit der jeweils gültigen Lösung $u_C(t)$ in den drei Fällen erhält man die in der folgenden Tabelle angegebenen Ergebnisse für k_1 und k_2. Als Abkürzungen wurden die Differenzen nach Gl. (10.88) mit den Werten

$$\begin{aligned} \Delta u_C &= u_{C\,p}(0) - u_{C0} = U - u_{C0} \\ \Delta i_L &= i_{L\,p}(0) - i_{L0} = -i_{L0} \end{aligned} \tag{10.108}$$

verwendet. Nach Überlagerung mit den partikulären Lösungen aus Gl. (10.93) erhalten wir die in Tab. 10.1 angegebenen zeitabhängigen Verläufe.

Tabelle 10.1

Zeitabhängiger Strom- und Spannungsverlauf bei verschiedenen Schwingkreisgüten

Aperiodischer Fall: $Q_s < 0{,}5$	
$k_1 = \dfrac{p_2 \Delta u_C - \Delta i_L / C}{p_1 - p_2}$,	$u_C(t) = u_{C\,p}(t) + k_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} + k_2\,\mathrm{e}^{p_2 t}$,
$k_2 = \dfrac{-p_1 \Delta u_C + \Delta i_L / C}{p_1 - p_2}$	$i(t) = i_p(t) + C\left(k_1 p_1 \mathrm{e}^{p_1 t} + k_2 p_2\,\mathrm{e}^{p_2 t}\right)$
Aperiodischer Grenzfall: $Q_s = 0{,}5$	
$k_1 = -\Delta u_C$,	$u_C(t) = u_{C\,p}(t) + \left(k_1 + k_2 t\right)\,\mathrm{e}^{-\delta t}$,
$k_2 = -\delta\,\Delta u_C - \Delta i_L / C$	$i(t) = i_p(t) + C\left[k_2 - \delta\left(k_1 + k_2 t\right)\right]\,\mathrm{e}^{-\delta t}$
Periodischer Fall: $Q_s > 0{,}5$	
$k_1 = -\Delta u_C$,	$u_C(t) = u_{C\,p}(t) + \left[k_1 \cos(\omega_d t) + k_2 \sin(\omega_d t)\right]\,\mathrm{e}^{-\delta t}$,
$k_2 = -\dfrac{\delta}{\omega_d}\Delta u_C - \dfrac{\Delta i_L}{\omega_d C}$	$i(t) = i_p(t) + C\left[\left(\omega_d k_2 - \delta k_1\right)\cos(\omega_d t) - \left(\omega_d k_1 + \delta k_2\right)\sin(\omega_d t)\right]\,\mathrm{e}^{-\delta t}$

Es ist zu erkennen, dass die Konstanten k und damit auch die homogenen Lösungen jeweils Linearkombinationen der Differenzen Δu_C und Δi_L sind.

Für eine Auswertung der Kurvenverläufe wählen wir $u_{C0} = 0$ und $i_{L0} = 0$ sowie $L = 1\text{mH}$ und $C = 1\mu\text{F}$. Die Widerstandswerte R werden so dimensioniert, dass sich nach Gl. (8.90) die angegebenen Schwingkreisgüten Q_s einstellen.

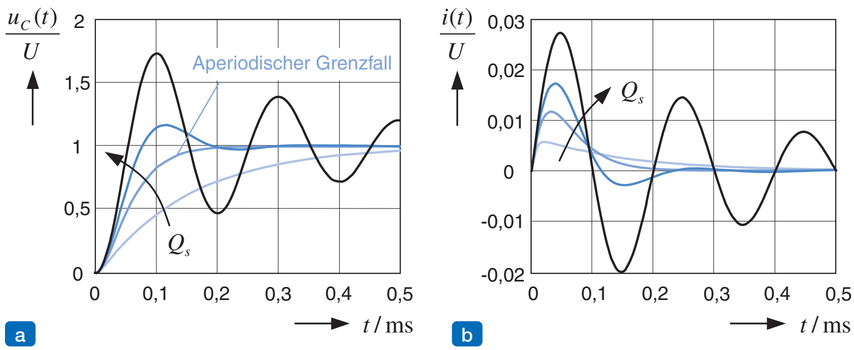


Abbildung 10.34: Einschwingverhalten des Serienschwingkreises für $Q_s = 0{,}2$, $0{,}5$, 1 und 5

Die Spannungs- und Stromverläufe in ▶Abb. 10.34 zeigen sehr deutlich den Unterschied zwischen dem aperiodischen und dem periodischen Verhalten. Die Hüllkurve der Schwingung klingt mit der Zeitkonstanten $\tau = 1/\delta = 2L/R$ ab. Bei geringer Dämpfung eilt der Strom der Kondensatorspannung erwartungsgemäß um $\pi/2$ vor. Im ungedämpften Schwingkreis mit $R = 0$ gilt $\tau \to \infty$ und die Kondensatorspannung schwingt in diesem Fall mit der maximalen Amplitude U um die partikuläre Lösung, d.h. sie steigt bis auf den doppelten Wert der Eingangsspannung.

Merke

In Schaltungen mit unterschiedlichen Energiespeichern können die Eigenwerte reell oder konjugiert komplex werden. Im Falle komplexer Eigenwerte treten Schwingungen auf, bei denen die Feldenergie zwischen magnetischer Energie (Strom in der Spule) und elektrischer Energie (Spannung am Kondensator) hin und her pendelt.

Bei Netzwerken, die entweder keine Induktivitäten oder keine Kapazitäten enthalten, sind die Eigenwerte immer reell und als homogene Lösung kann der periodische Fall nicht auftreten.

10.12.2 Serienschwingkreis an periodischer Spannung

Die Erweiterung der bisherigen Lösung auf den Fall einer beliebigen periodischen Eingangsspannung ist relativ einfach. Wir nehmen an, dass die Quellenspannung in Abb. 10.33 durch eine Fourier-Reihe nach Gl. (9.7)

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n \cos(n\omega t - \psi_n) \tag{10.109}$$

gegeben ist. Bei den vier durchzuführenden Schritten betrachten wir im Folgenden nur noch die Änderungen gegenüber der Schaltung mit Gleichspannungsquelle in Kap. 10.12.1. Da sich der Schaltvorgang bei periodischer Quellenspannung nur durch die partikuläre Lösung von dem Schaltvorgang bei Gleichspannung unterscheidet, ist der erste Schritt identisch und wir können mit der Bestimmung der partikulären Lösung im zweiten Schritt beginnen. Wir betrachten ein Glied aus der Summe (10.109) mit der Kreisfrequenz $n\omega$ und der komplexen Amplitude

$$\underline{\hat{u}}_n = \hat{u}_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_n} \tag{10.110}$$

entsprechend Tab. 8.1. Die Beziehung für die Kondensatorspannung erhalten wir aus dem Verhältnis der Impedanzen

$$\underline{\hat{u}}_{C\,n} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\,n\omega C}}{R + \mathrm{j}\,n\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,n\omega C}}\,\underline{\hat{u}}_n = \frac{1}{1-(n\omega)^2 LC + \mathrm{j}\,n\omega CR}\,\hat{u}_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_n} \tag{10.111}$$

und den zeitabhängigen Verlauf aus dem Realteil der mit $\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}$ multiplizierten komplexen Amplitude

$$\begin{aligned} u_{C\,n}(t) &= \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{1-(n\omega)^2 LC + \mathrm{j}\,n\omega CR}\,\hat{u}_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega t - \psi_n)} \right\} \\ &= \frac{\hat{u}_n}{\sqrt{\left[1-(n\omega)^2 LC\right]^2 + (n\omega CR)^2}} \cos\left(n\omega t - \psi_n - \varphi_n\right) \end{aligned} \tag{10.112}$$

mit

$$\varphi_n = \arctan \frac{n\omega CR}{1-(n\omega)^2 LC} + \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad \text{falls} \quad 1-(n\omega)^2 LC \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0\,.$$

Die vollständige partikuläre Lösung ist also gegeben durch die Summe

$$u_{C\,p}(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_n}{\sqrt{\left[1-(n\omega)^2 LC\right]^2 + (n\omega CR)^2}} \cos\left(n\omega t - \psi_n - \varphi_n\right) \tag{10.113}$$

und für den Strom erhalten wir

$$i_p(t) = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_n \, n\omega}{\sqrt{\left[1-(n\omega)^2 LC\right]^2 + (n\omega CR)^2}} \sin\left(n\omega t - \psi_n - \varphi_n\right). \tag{10.114}$$

Die möglichen homogenen Lösungen sind wieder die gleichen wie bei der Gleichspannungserregung. Als Konsequenz bleiben die Beziehungen für die in Tab. 10.1 angegebenen zeitabhängigen Verläufe von Kondensatorspannung und Maschenstrom unverändert erhalten. Es sind lediglich die gegenüber Gl. (10.93) geänderten partikulären Lösungen (10.113) und (10.114) einzusetzen.

Betrachten wir noch die Bestimmung der Konstanten im vierten Schritt: Auch die Gleichungen für k_1 und k_2 in der Tabelle bleiben erhalten, allerdings müssen auch in den Differenzen (10.108) die partikulären Lösungen zum Schaltzeitpunkt $t = 0$ entsprechend den Beziehungen (10.113) und (10.114) verwendet werden. In ausführlicher Schreibweise gilt

$$\Delta u_C = u_{C\,p}(0) - u_{C0} = \left[U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_n \cos(\psi_n + \varphi_n)}{\sqrt{\left[1-(n\omega)^2 LC\right]^2 + (n\omega CR)^2}} \right] - u_{C0} \tag{10.115}$$

und

$$\Delta i_L = i_{L\,p}(0) - i_{L0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_n\, n\omega C \sin(\psi_n + \varphi_n)}{\sqrt{\left[1-(n\omega)^2 LC\right]^2 + (n\omega CR)^2}} \right] - i_{L0}\,. \tag{10.116}$$

Mit diesen Differenzen bleiben alle Gleichungen in der Tab. 10.1 weiterhin gültig. Damit haben wir den Einschaltvorgang eines Reihenschwingkreises für alle durch eine Fourier-Entwicklung darstellbaren periodischen Spannungsformen angegeben.

Wegen der Besonderheiten beim Schalten von Schwingkreisen an sinusförmigen Quellenspannungen wollen wir noch zwei charakteristische Beispiele auswerten. Ein Reihenschwingkreis mit den Netzwerkelementen $L = 1\text{mH}$ und $C = 1\mu\text{F}$ und mit der Güte $Q_s >> 0{,}5$ (periodischer Fall) soll an eine Quellenspannung

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t) \tag{10.117}$$

angeschlossen werden. Für die Anfangswerte soll $u_{C0} = i_{L0} = 0$ gelten. Die Kondensatorspannung ist dann durch die vereinfachte Beziehung

$$\begin{aligned} u_C(t) = {} & \frac{\hat{u}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \\ & - \left[\Delta u_C \cos(\omega_d t) + \left(\frac{\Delta i_L}{\omega_d C} + \frac{\delta}{\omega_d} \Delta u_C \right) \sin(\omega_d t) \right] \mathrm{e}^{-\delta t} \end{aligned} \tag{10.118}$$

mit

$$\Delta u_C = \frac{\hat{u}\cos(\varphi)}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \quad \text{und} \quad \Delta i_L = \frac{\hat{u}\,\omega C \sin(\varphi)}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \tag{10.119}$$

gegeben. In der Lösung tritt neben der Frequenz ω der Quellenspannung auch noch die durch die Komponenten des Serienkreises festgelegte Frequenz ω_d der gedämpften Schwingung nach Gl. (10.104) auf. Die Überlagerung der beiden Schwingungen führt wieder zu sehr unterschiedlichen Kurvenformen, je nachdem, in welchem Verhältnis die beiden Frequenzen zueinander stehen. Die ▶Abb. 10.35 zeigt das Einschwingverhalten für $\omega = 0{,}1\omega_d$. In Teilbild a sind die homogene Lösung und die partikuläre Lösung separat dargestellt, Teilbild b zeigt die Gesamtlösung. Diese folgt im Wesentlichen der von der Quelle vorgegebenen Schwingung. Die höherfrequente Schwingung klingt entsprechend der Dämpfung ab und ist der niederfrequenten Schwingung überlagert.

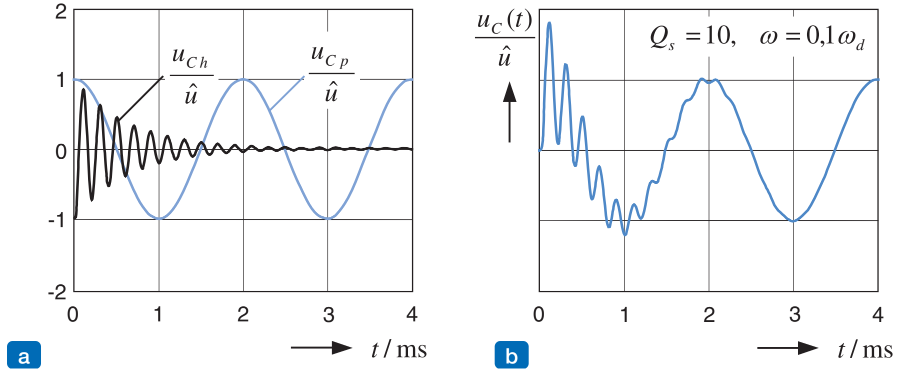


Abbildung 10.35: Einschwingverhalten des Serienschwingkreises bei sinusförmiger Quellenspannung

Ein anderes Verhalten stellt sich ein, wenn sich die beiden Frequenzen nur geringfügig unterscheiden. Für $\omega = 0{,}9\omega_d$ erhalten wir die in ▶Abb. 10.36 dargestellte Schwebung. Die beiden ausgewerteten Zahlenbeispiele zeigen die gleichen Merkmale, die wir auch schon bei den Überlagerungen in den Abb. 9.2 und 9.3 diskutiert haben.

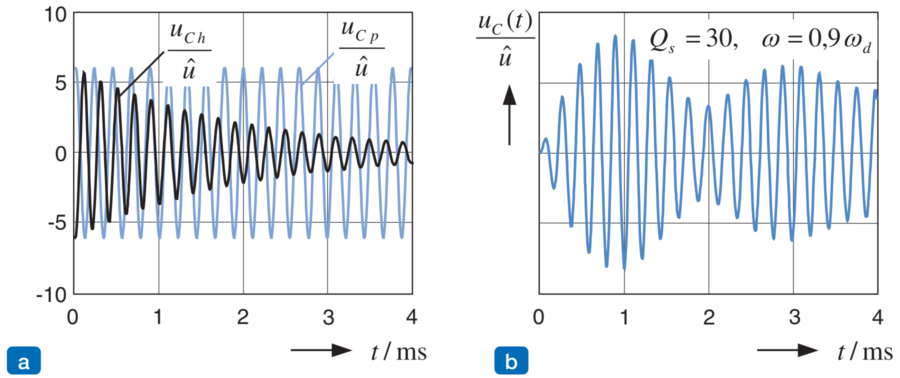


Abbildung 10.36: Einschwingverhalten des Serienschwingkreises bei sinusförmiger Quellenspannung

In den beiden Abb. 10.35 und 10.36 wurden unterschiedliche Güten $Q_s = 10$ bzw. $Q_s = 30$ zugrunde gelegt. Mit kleinerem Widerstand und damit größerer Güte steigt die Amplitude der Schwingung bei der partikulären Lösung. Die daraus resultierenden größeren Differenzen (10.119) haben eine größere Amplitude bei der homogenen Lösung zur Folge. Gleichzeitig reduziert sich die Abklingkonstante δ und der Ausgleichsvorgang dauert entsprechend länger.

ZUSAMMENFASSUNG

- In Netzwerken ohne Energiespeicher, also in reinen **Widerstandsnetzwerken**, können sich Ströme und Spannungen sprungartig ändern, d.h. das Netzwerk geht nach einem Schaltvorgang unmittelbar in den neuen Zustand über. Ein Ausgleichsvorgang findet nicht statt.
- In den **Speicherelementen** kann sich die Energie nicht sprungartig ändern, d.h. Kondensatorspannung und Spulenstrom müssen stetig sein.
- Enthält ein Netzwerk **Energiespeicher**, dann kann der zeitliche Verlauf der Ströme und Spannungen nach einem Schaltvorgang aus zwei Anteilen zusammengesetzt werden. Der erste Anteil beschreibt den **stationären Endzustand**, in den das Netzwerk nach Abklingen aller Ausgleichsvorgänge übergeht. Der zweite Anteil beschreibt den **Ausgleichsvorgang**, also den Übergang von dem Zustand vor dem Schalten zu dem stationären Endzustand. Dieser Anteil verschwindet für $t \to \infty$.
- In **Sonderfällen** kann der Ausgleichsvorgang entfallen, dann nämlich, wenn sich das Netzwerk bereits in einem Zustand befindet, der alle Randbedingungen nach dem Schaltvorgang erfüllt. Ein einfaches Beispiel ist das Ausschalten eines Transistors in einem Zweig, der bereits unmittelbar vor dem Schaltvorgang stromlos ist.
- Die von den **Ausgleichsvorgängen** benötigte Zeit hängt wesentlich von den durch die Netzwerkelemente festgelegten Zeitkonstanten ab.
- Das **Umspeichern** der Energie von einem Speicherelement in ein anderes ruft Verluste hervor. Diese sind in starkem Maße zeitabhängig.
- Schaltvorgänge in Netzwerken mit Induktivitäten und Kapazitäten können **Resonanzerscheinungen** hervorrufen. Diese sind umso stärker ausgeprägt, je größer die Güte der Schwingkreise bzw. je kleiner deren Dämpfung ist.

CWS COMPANION WEBSITE WWW.PEARSON-STUDIUM.DE

Lösungen

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.1 *RC*-Reihenschaltung an Rechteckspannung

Die *RC*-Reihenschaltung in ▶Abb. 10.37 ist über ein aus zwei Schaltern S_1 und S_2 bestehendes Netzwerk an eine Gleichspannungsquelle U angeschlossen. Die beiden Schalter sollen im **Gegentakt** betrieben werden, d.h. einer der beiden Schalter ist jeweils geschlossen und der andere Schalter geöffnet. Wir wollen annehmen, dass sich die Abfolge der Schaltzustände mit der Periodendauer T wiederholt. Im Zeitbereich $0 \le t < \delta T$ ist der Schalter S_1 geschlossen, im Zeitbereich $\delta T \le t < T$ ist der Schalter S_2 geschlossen.

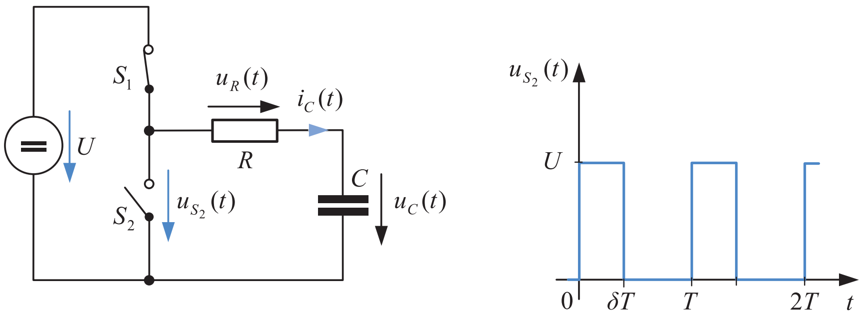


Abbildung 10.37: *RC*-Reihenschaltung an Rechteckspannung

1. Berechnen Sie für einen beliebigen Tastgrad $0 \le \delta \le 1$ den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung $u_C(t)$ und des Stromes $i_C(t)$ für die beiden folgenden Fälle:
   a. Anlaufverhalten des Netzwerks, wenn es erstmalig an die Rechteckspannung angeschlossen wird
   b. Eingeschwungener Zustand, bei dem alle Signalverläufe periodisch sind mit der Periodendauer T. Dieser Fall tritt ein, nachdem die Rechteckspannung $u_{S_2}(t)$ schon hinreichend lange an dem *RC*-Netzwerk anliegt und die Anlaufphase beendet ist.
2. Berechnen Sie den eingeschwungenen Zustand mithilfe der Fourier-Entwicklung und vergleichen Sie diese Lösung mit der Lösung für den Fall b) aus Teilaufgabe 1.

Aufgabe 10.2 Brückengleichrichter

Eine einfache Schaltung zur Umwandlung einer Wechselspannung in eine Gleichspannung besteht aus einem **Brückengleichrichter** und einem Speicherkondensator. Der Widerstand R in ▶Abb. 10.38 bildet den Verbraucher, der mit einer möglichst konstanten Gleichspannung versorgt werden soll. Die Spannung u_N entspricht der Netzwechselspannung $u_N(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ mit $\hat{u} = \sqrt{2}\ 230\text{ V}$ und $\omega = 2\pi f = 2\pi\ 50\text{ Hz}$. Zur Vereinfachung der Rechnung werden die Dioden als ideal angesehen. Bei einer Diodenspannung in Vorwärtsrichtung bilden sie einen Kurzschluss, bei einer Spannung in Sperrrichtung dagegen einen Leerlauf.

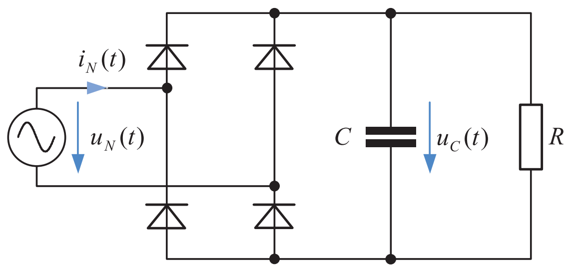


Abbildung 10.38: Netzgleichrichter

1. Beschreiben Sie die Funktionsweise der Schaltung.
2. Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf von Eingangsstrom $i_N(t)$ und Ausgangsspannung $u_C(t)$ in Abhängigkeit von den Werten C und R.
3. Berechnen Sie die Ausgangsleistung.
4. Der Kondensator besitzt jetzt die Kapazität $C = 100\ \mu\text{F}$. Stellen Sie die Zeitverläufe von $i_N(t)$ und $u_C(t)$ für die drei Ausgangsleistungen $P = 10\text{ W}$, 100 W und 1000 W dar.

Aufgabe 10.3 Spannungswandlerschaltung mit galvanischer Trennung zwischen Eingang und Ausgang

Die ▶Abb. 10.39 zeigt eine Schaltung zur Umwandlung einer Eingangsgleichspannung U in eine galvanisch getrennte Ausgangsgleichspannung U_0. Der Schalter wird in der Praxis durch einen Hochfrequenztransistor, z.B. einen MOSFET, realisiert und arbeitet üblicherweise mit einer Schaltfrequenz im Bereich $> 20\text{ kHz}$. Innerhalb einer Schaltperiode ist der Schalter im Zeitbereich $0 \le t < \delta T$ geschlossen und im Zeitbereich $\delta T \le t < T$ geöffnet. Die Primärseite des Transformators besitzt die Induktivität $L_p = N_p^2\, A_L$, auf der Sekundärseite gilt $L_s = N_s^2\, A_L$. Das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = N_p/N_s$ ist durch das Verhältnis der Windungszahlen gegeben. Der Ausgangskondensator ist so bemessen, dass die Spannung U_0 als konstant angesehen werden kann. Zur Vereinfachung der Berechnung werden der Transformator, der Schalter und auch die Diode als verlustfrei angenommen.

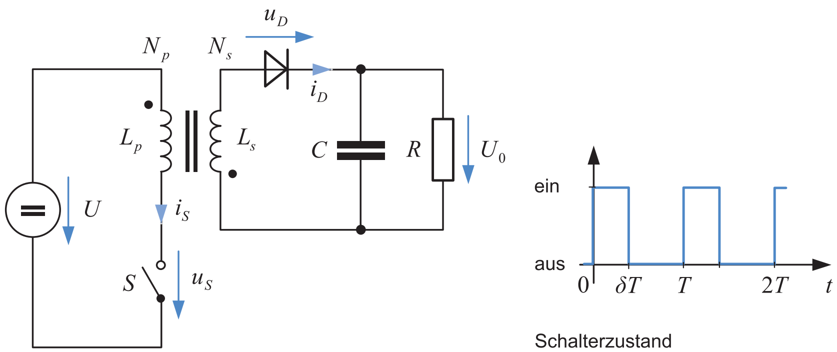


Abbildung 10.39: Sperrwandler

Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Spannungen U und U_0 sowie der zu übertragenden Leistung P die Spannungen $u_S(t)$, $u_D(t)$ und die Ströme $i_S(t)$, $i_D(t)$ als Funktion der Zeit für eine Schaltperiode.

Aufgabe 10.4 Einschaltvorgang beim Parallelschwingkreis

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter in ▶Abb. 10.40 geöffnet und der Gleichstrom I_0 auf den Parallelschwingkreis geschaltet.

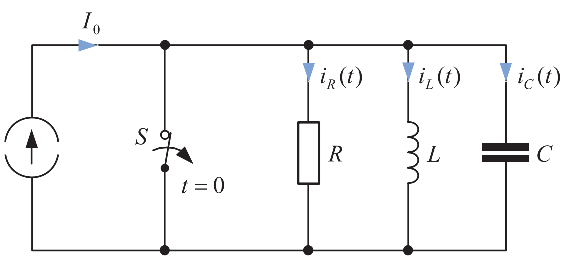


Abbildung 10.40: Parallelschwingkreis

Berechnen Sie für die Werte $L = 1$ mH und $C = 1$ nF die zeitabhängigen Ströme $i_R(t)$, $i_L(t)$ und $i_C(t)$ für die drei Fälle $R = 100\ \Omega$, $R = 500\ \Omega$ und $R = 2500\ \Omega$.

Die Laplace-Transformation

11

ÜBERBLICK

Einführung

» In diesem Kapitel werden wir mit der Laplace-Transformation eine mathematische Methode kennen lernen, die es uns erlaubt, Netzwerke zu analysieren, deren Quellen während einer begrenzten Dauer einen zeitlich beliebigen Strom- bzw. Spannungsverlauf aufweisen. Die in Kapitel 9 vorausgesetzte Periodizität des zeitlichen Verlaufs wird, wie auch bereits in Kapitel 10, fallen gelassen. Während die Berechnung der Schaltvorgänge in Kapitel 10 durch Lösen der im Zeitbereich geltenden gekoppelten Differentialgleichungen erfolgte, wird in diesem Kapitel, ähnlich wie bei der komplexen Wechselstromrechnung, zunächst eine Transformation in den Bildbereich durchgeführt. Das dabei entstehende lineare Gleichungssystem lässt sich in der Regel wesentlich einfacher lösen. Die Reduzierung des Gesamtaufwands wird zusätzlich dadurch begünstigt, dass sowohl die Transformation in den Bildbereich als auch die Rücktransformation in den Zeitbereich mithilfe von Korrespondenztabellen sehr einfach durchführbar ist. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- die zeitabhängigen Signalverläufe unter Berücksichtigung der Anfangswerte von Spulenstrom und Kondensatorspannung in den Bildbereich zu transformieren,
- die Berechnung der Laplace-Integrale durch Verwendung verschiedener Hilfssätze zu vereinfachen,
- die Transformation in den Bildbereich mithilfe von Korrespondenztabellen durchzuführen,
- die nach Auflösung des Gleichungssystems im Bildbereich erhaltenen Gleichungen in den Zeitbereich zurückzutransformieren,
- die dabei durchzuführende Integration gegebenenfalls unter Zuhilfenahme von Faltungssatz und Partialbruchzerlegung zu vereinfachen oder
- durch Verwendung von Korrespondenztabellen zu umgehen.

In Kap. 9 wurde die Darstellung periodischer Funktionen (Periodendauer T) durch Fourier-Reihen behandelt. Die unabhängige Betrachtung des Netzwerks für Gleichanteil, Grund- und Oberschwingungen und die anschließende lineare Überlagerung der Teillösungen erlaubte uns die Analyse von Netzwerken mit zeitlich periodischem Verlauf von Quellenstrom und Quellenspannung. In diesem Kapitel wollen wir versuchen, die Vorgehensweise bei der Anwendung der Fourier-Reihen auf die Netzwerkanalyse auch auf nicht periodische, insbesondere einmalige Vorgänge zu übertragen.

Wird ein Netzwerk einem einmaligen kurzzeitigen Spannungsverlauf der Dauer T_0 und beliebiger Zeitabhängigkeit ausgesetzt, dann können wir im Prinzip einen periodischen Signalverlauf erzwingen, indem wir eine Periodendauer $T > T_0$ definieren und den Spannungsverlauf nach Ablauf von T jeweils wiederholen (vgl. ▶Abb. 11.1). Für das so entstandene periodische Signal sind die Lösungsmethoden aus Kap. 9 bekannt. Wollen wir jetzt aber den Einfluss der willkürlich eingeführten Periodizität minimieren und nur die Netzwerkreaktion auf einen einzigen Spannungsimpuls untersuchen, dann müssen wir sicherstellen, dass sich das Netzwerk zu Beginn eines neuen Impulses bereits wieder im Ruhezustand befindet, ohne noch von den vorhergehenden Impulsen beeinflusst zu sein. Wir müssen daher den Zeitabstand $T - T_0$ zwischen den einzelnen Impulsen wegen des im Prinzip unendlich lange dauernden Ausgleichsvorganges ebenfalls unendlich lang wählen.

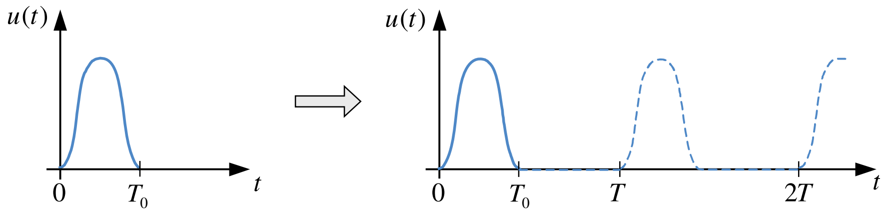


Abbildung 11.1: Umwandlung eines einmaligen Spannungsverlaufs in ein periodisches Signal

Ausgehend von der Lösung für den periodischen Fall ist also ein Grenzübergang $T \to \infty$ durchzuführen. Damit verbunden stellt sich die Frage, welche Auswirkungen dieser Grenzübergang auf die bisherige Fourier-Entwicklung hat.

11.1 Das Fourier-Integral

Wir beginnen die Untersuchungen mit der Reihendarstellung in Gl. (9.6)

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{a}_n \cos(n\omega t) + \hat{b}_n \sin(n\omega t) \right]. \tag{11.1}$$

Die zeitabhängige Funktion $u(t)$ wird, abgesehen von dem Mittelwert, dargestellt durch eine Grundschwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = \omega_1 = 2\pi/T$ und Oberschwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_n = n2\pi/T = n\omega_1$. Der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Kreisfrequenzen beträgt jeweils $\Delta\omega = \omega_1$.

Im ersten Schritt werden wir die Koeffizienten in Gl. (11.1) durch ihre Bestimmungsgleichungen (9.21) ersetzen. Da wir aber bisher in beiden Gleichungen den Parameter t für unterschiedliche Zwecke verwenden[1], werden wir die Bezeichnung bei den Bestimmungsgleichungen zur Vermeidung von Verwechslungen folgendermaßen ändern

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \hat{a}_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\cos(n\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$\hat{b}_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\sin(n\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{11.2}$$

Die gleichzeitige Änderung der Integrationsgrenzen von $0 \le \tau \le T$ auf $-T/2 \le \tau \le T/2$ hat aufgrund der Periodizität der Funktion keinen Einfluss auf die Koeffizientenberechnung. Setzen wir jetzt diese Bestimmungsgleichungen anstelle der Koeffizienten in Gl. (11.1) ein, dann können wir die Funktion $u(t)$ mit der Bezeichnung $\Delta\omega = \omega_1$ für den Abstand zwischen den Spektrallinien in der folgenden Weise darstellen

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\cos(n\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\cos(n\omega t)\right. \\ &\qquad \left. + \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\sin(n\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\sin(n\omega t)\right] \\ &= \Delta\omega\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\left[\frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\cos(\omega_n\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\cos(\omega_n t)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\sin(\omega_n\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\sin(\omega_n t)\right]. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Für einen beliebig gewählten, aber festen Zeitpunkt $t = t_0$ besitzt die Funktion auf der linken Seite der Gleichung einen bekannten Wert $u(t_0)$. Die in eckigen Klammern auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke stellen ein Linienspektrum dar, das wir für den gewählten Zeitpunkt t_0 auswerten und über der Frequenzachse auftragen können. Die Integrale entsprechen, abgesehen von den Vorfaktoren, den Koeffizienten $\hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ und sind somit bekannt. Die erste Klammer infolge des Gleichanteils liefert eine Linie bei der Frequenz Null, die Klammer in der Summe liefert die Linien bei den Frequenzen $\omega_n = n\omega_1$ mit $n = 1,2, \ldots$ Dieses Spektrum entspricht nicht dem bisher verwendeten Amplitudenspektrum, da die Werte der trigonometrischen Funktionen zum Zeitpunkt $t = t_0$ in das Ergebnis mit eingehen. Das Spektrum ist also abhängig von dem gewählten Zeitpunkt.

Multiplizieren wir die Länge dieser Spektrallinien mit ihrem Abstand $\Delta\omega$, dann erhalten wir eine unendliche Summe von Rechtecken. Die Integration bzw. Summation über diese Flächen ist entsprechend Gl. (11.3) identisch zu dem Wert $u(t_0)$ auf der linken Gleichungsseite.

1 In Gl. (11.1) stellt er einen bestimmten Zeitpunkt dar, zu dem die Funktion $u(t)$ beispielsweise berechnet werden kann, in Gl. (9.21) wird er als Integrationsvariable über die gesamte Periodendauer verwendet.

Zur Veranschaulichung betrachten wir als Beispiel die Fourier-Entwicklung der Rechteckschwingung Nr. 7 in Tab. H.1 mit einer angenommenen Impulsdauer $T_0 = \delta T = 0{,}2\text{ms}$. Zum Vergleich sollen die beiden in ▶Abb. 11.2 dargestellten Fälle mit $T = 1\text{ms}$, d.h. $f = 1\text{kHz}$ und $T = 4\text{ms}$, d.h. $f = 250\text{Hz}$ einander gegenübergestellt werden.

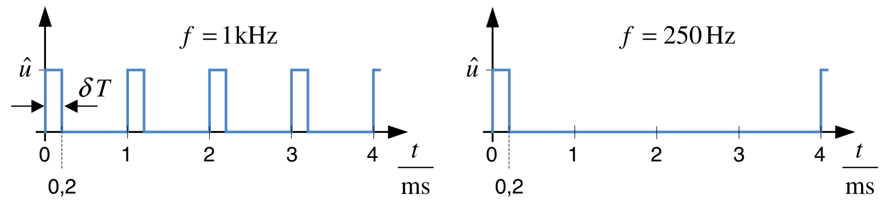


Abbildung 11.2: Rechteckimpulse mit unterschiedlichen Pausenzeiten

Wählen wir den Zeitpunkt $t_0 = \delta T/2$ für die Auswertung und Darstellung des Spektrums in Gl. (11.3), dann nimmt die Reihenentwicklung mithilfe von Additionstheoremen die einfache Form

$$\begin{aligned}\frac{u(\delta T/2)}{\hat{u}} = 1 &= \delta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\sin(n2\pi\delta)\cos(n\pi\delta) + \left[1-\cos(n2\pi\delta)\right]\sin(n\pi\delta)\right\} \\ &= \Delta\omega\left[\frac{\delta T}{2\pi}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\left[\frac{T}{n\pi^2}\sin(n\pi\delta)\right]\end{aligned} \tag{11.4}$$

an. Die ▶Abb. 11.3 zeigt auf der linken Seite das nach Gl. (11.4) berechnete Ergebnis für die Grundschwingungsfrequenz $f_1 = 1/T = 1\text{kHz}$. Die Werte der einzelnen Spektrallinien legen die Höhe der Rechtecke fest, ihr Abstand $\Delta\omega = 2\pi f_1$ entspricht der Breite der Rechtecke. Auf der rechten Seite ist das gleiche Ergebnis für $f_1 = 1/T = 250\text{Hz}$ dargestellt. Wegen der um den Faktor 4 größeren Periodendauer ist der Abstand zwischen den Spektrallinien um den Faktor 4 kleiner geworden. In beiden Fällen liefert das Integral über die markierte Fläche den Wert 1, entsprechend der linken Seite in Gl. (11.4).

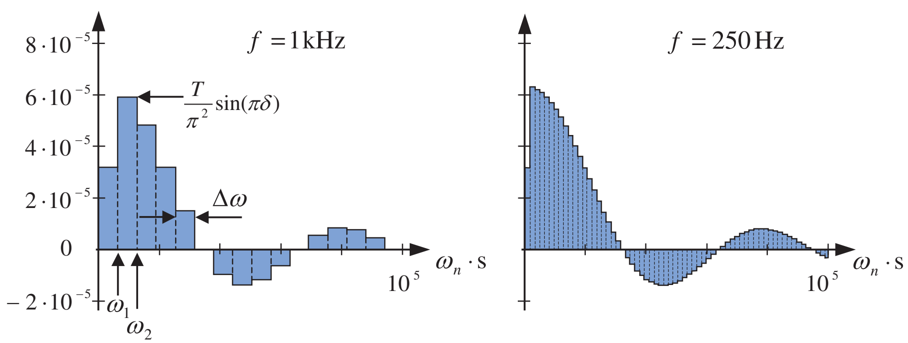


Abbildung 11.3: Spektrum bei gleicher Impulsbreite, aber unterschiedlichen Periodendauern

Aus diesen Darstellungen lassen sich die folgenden Erkenntnisse gewinnen:

- Die Grundschwingungsfrequenz ω_1 und die Abstände $\Delta\omega$ zwischen den Oberschwingungen streben mit wachsender Periodendauer T zu immer kleineren Werten.

- Im Grenzübergang $T \to \infty$ geht das diskrete Linienspektrum in ein kontinuierliches Spektrum über. Als Konsequenz wird die Summation in Gl. (11.3) für $T \to \infty$ in eine Integration übergehen.

Nach diesen Vorbetrachtungen knüpfen wir wieder an die Gl. (11.3) an und führen die Rechnung weiter. Die trigonometrischen Funktionen mit dem Argument $\omega_n t$ sind unabhängig von der Integrationsvariablen τ, so dass wir die Gl. (11.3) auf die Form

$$\begin{aligned} u(t) &= \Delta\omega \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \left[\frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)[\cos(\omega_n \tau)\cos(\omega_n t) + \sin(\omega_n \tau)\sin(\omega_n t)]\, \mathrm{d}\tau \right] \\ &= \Delta\omega \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \left[\frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\cos(\omega_n(\tau - t))\, \mathrm{d}\tau \right] \end{aligned} \tag{11.5}$$

bringen können. Wir betrachten jetzt den Grenzübergang $T \to \infty$ und wollen dabei voraussetzen, dass die Integrale endlich bleiben. Der erste Ausdruck auf der rechten Seite verschwindet, wenn die Funktion absolut integrabel ist, d.h. wenn das über den Bereich $-\infty \le \tau \le \infty$ gebildete Integral der Funktion $|u(t)|$ einen endlichen Wert besitzt. In diesem Fall gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \le \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| u(\tau) \right| \mathrm{d}\tau = 0\,. \tag{11.6}$$

Das Integral im zweiten Ausdruck ist eine Funktion von ω_n und soll wegen der besseren Übersichtlichkeit zunächst in der abgekürzten Form

$$g(\omega_n) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\cos(\omega_n(\tau - t))\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cos(\omega_n(\tau - t))\, \mathrm{d}\tau \tag{11.7}$$

geschrieben werden. Die Summation über die Produkte aus den Werten der diskreten Spektrallinien mit deren Abständen geht im Grenzübergang in eine Integration über, so dass wir die Beziehung

$$u(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} g(\omega_n)\, \Delta\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega)\, \mathrm{d}\omega \tag{11.8}$$

oder in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cos(\omega(\tau - t))\, \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}\omega \\ &= \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cos(\omega\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) \cos(\omega t) + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\sin(\omega\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) \sin(\omega t) \right] \mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{11.9}$$

erhalten. Die Summation über den diskreten Parameter n bei der Fourier-Reihe ist beim Fourier-Integral in eine Integration über den stetigen Parameter ω übergegangen.

Fassen wir das Ergebnis noch einmal zusammen:

Merke

Genügt eine Funktion $u(t)$ in jedem endlichen Intervall den Dirichlet'schen Bedingungen und besitzt das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| u(\tau) \right| \mathrm{d}\tau$$

einen endlichen Wert, dann konvergiert das Fourier-Integral und es gilt

$$\int_0^{\infty} \left[a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t) \right] \mathrm{d}\omega$$

$$= \begin{cases} u(t) & \text{bei Stetigkeitsstellen} \\ \frac{1}{2}\left[u(t+0)+u(t-0) \right] & \text{bei Sprungstellen} \end{cases}$$

$$\text{mit} \quad a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cos(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{und} \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\sin(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{11.10}$$

wobei $u(t + 0)$ und $u(t - 0)$ die beiden Grenzwerte an einer Unstetigkeitsstelle t bezeichnen.

In den Sonderfällen einer geraden Funktion $u_g(t)$ bzw. einer ungeraden Funktion $u_u(t)$ gilt

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} u(\tau)\cos(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad b(\omega) = 0 \quad \text{für} \quad u(t) = u_g(t) \tag{11.11}$$

bzw.

$$a(\omega) = 0\,, \qquad b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} u(\tau)\sin(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{für} \quad u(t) = u_u(t). \tag{11.12}$$

Ein Vergleich mit den Beziehungen (9.21) bzw. den Sonderfällen in Tab. 9.1 lässt den analogen Aufbau erkennen.

Entsprechend der komplexen Darstellung der Fourier-Reihe in Kap. 9.2.1 können wir auch das Fourier-Integral in eine komplexe Form überführen. Dazu knüpfen wir noch einmal an die erste Formulierung in Gl. (11.9) an. Wegen der geraden Funktion $\cos(\omega(\tau-t)) = \cos(\omega(t-\tau))$ liefert das Integral über $\mathrm{d}\omega$ in den Grenzen $-\infty \le \omega \le \infty$ den doppelten Wert, so dass auch die folgende Beziehung gilt:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cos(\omega(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}\omega\,. \tag{11.13}$$

Da die Integration mit der ungeraden Sinusfunktion über den Bereich $-\infty \le \omega \le \infty$ den Wert Null ergibt

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\sin(\omega(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}\omega\,, \tag{11.14}$$

kann die mit j multiplizierte Gl. (11.14) zur Gl. (11.13) addiert werden

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\left[\cos(\omega(t-\tau))+\mathrm{j}\sin(\omega(t-\tau))\right]\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Wir hatten zu Beginn des Kapitels den Parameter t in den Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten (9.21) durch τ ersetzt, um Verwechslungen beim Einsetzen der Bestimmungsgleichungen in die Fourier-Reihe zu vermeiden. Wenn wir die Gl. (11.15) jetzt in zwei separate Gleichungen zerlegen, dann können wir diese Umbenennung wieder rückgängig machen. Resultierend erhalten wir die beiden Beziehungen

$$\underline{U}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{11.16}$$

für die Transformation in den Frequenzbereich und

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{11.17}$$

für die Rücktransformation in den Zeitbereich. Bezüglich der Zuordnung des Faktors $1/(2\pi)$ zu einem der beiden Integrale gibt es in der Literatur keine einheitliche Vorgehensweise[2]. Mit der gleichen Berechtigung kann auch die folgende Darstellung verwendet werden oder eine beliebige andere Aufteilung auf zwei unterschiedliche Faktoren bei den beiden Integralen, deren Produkt wieder $1/(2\pi)$ ergibt

$$\underline{U}'(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}'(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{11.18}$$

Üblicherweise bezeichnet man $u(t)$ als **Originalfunktion** und $\underline{U}(\omega)$ als **Bildfunktion** oder **Spektralfunktion** von $u(t)$. Der Übergang vom Zeitbereich in den Frequenzbereich entsprechend der Gl. (11.16) wird als **Fourier-Transformation** bezeichnet, die Rückkehr vom Frequenzbereich in den Zeitbereich entsprechend der Gl. (11.17) heißt **inverse Fourier-Transformation**.

Tabelle 11.1

Fourier-Reihe und Fourier-Integral in komplexer Darstellung

Reihendarstellung	Integraldarstellung
$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\underline{c}}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}$	$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$
$\hat{\underline{c}}_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t$	$\underline{U}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$

2 In DIN 5487 wird die in den Gln. (11.16) und (11.17) angegebene Version empfohlen.

Zum Vergleich sind die komplexen Formen der Fourier-Reihe und des Fourier-Integrals in Tab. 11.1 nochmals gegenübergestellt.

Die Anwendung der Fourier-Transformation auf die Berechnung von Netzwerken kann auf ähnliche Weise veranschaulicht werden wie die Anwendung der komplexen Rechnung (vgl. Abb. 8.13).

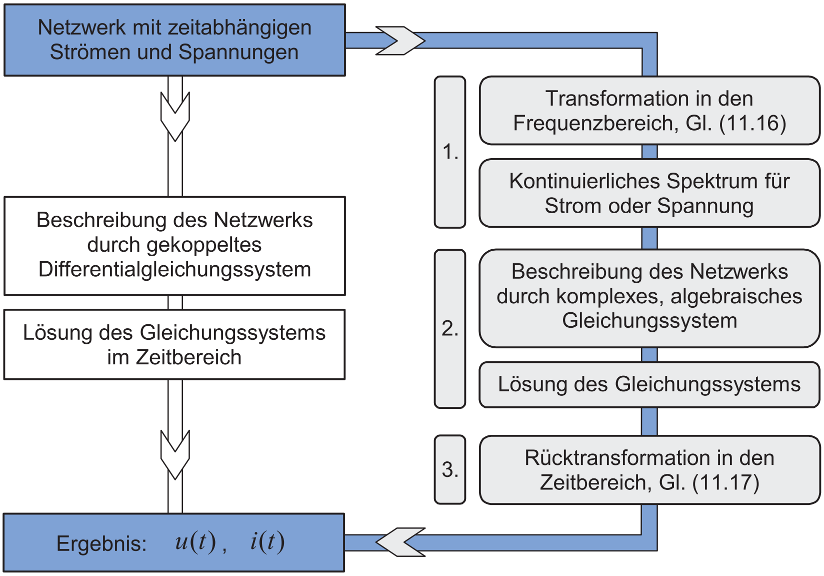


Abbildung 11.4: Gegenüberstellung der unterschiedlichen Vorgehensweisen

Der zeitlich nicht mehr periodische Verlauf von Quellenstrom oder Quellenspannung wird mithilfe der Gl. (11.16) in den Frequenzbereich transformiert. Das Ergebnis besteht jetzt nicht mehr aus harmonischen Schwingungen bei den diskreten Frequenzen $n\omega_1$, sondern es sind alle Frequenzen von $\omega = -\infty$ bis $\omega = +\infty$ vorhanden. Die hier auftretenden negativen Frequenzen sind ausschließlich eine Folge der mathematischen Umformungen und haben physikalisch keine Bedeutung.

Mit den komplexen Amplituden $\underline{U}(\omega)/2\pi$ entsprechend der oberen Zeile in Tab. 11.1 kann das Netzwerk unter Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung genauso wie bisher analysiert werden. Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt dann mithilfe der Gl. (11.17). Die Motivation für diese Vorgehensweise ist die gleiche wie bei der symbolischen Methode: Die Lösung des Gleichungssystems ist im Bildbereich in der Regel wesentlich einfacher. Für die Transformationen zwischen den beiden Bereichen stehen zum Teil Tabellen für die üblicherweise vorkommenden Funktionen zur Verfügung, so dass die Berechnung der Integrale entfällt. Bei der Benutzung von Transformationstabellen muss allerdings darauf geachtet werden, welche der Formeln (11.16), (11.17) oder (11.18) jeweils zugrunde gelegt sind.

Beispiel 11.1: Spektralfunktion für einen Rechteckimpuls

Wir kehren jetzt noch einmal zur Abb. 11.2 zurück und wollen die Spektralfunktion für den einmaligen Rechteckimpuls

$$u(t)=\begin{cases}\hat{u} & \text{für} \quad 0<t<\delta T \\ 0 & \quad -\infty<t<0 \quad \text{und} \quad \delta T<t<\infty\end{cases} \tag{11.19}$$

berechnen. Mit Gl. (11.16) erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{U}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \hat{u}\int_{0}^{\delta T} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{\hat{u}}{-\mathrm{j}\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\,\delta T}-1\right) \\ &= \frac{\hat{u}}{\mathrm{j}\omega}\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\omega\,\delta T}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\,\delta T}{2}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\,\delta T}{2}} \overset{(9.27)}{=} \frac{2\hat{u}}{\omega}\left(\sin\frac{\omega\,\delta T}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\,\delta T}{2}}\,.\end{aligned} \tag{11.20}$$

Für die Auswertung wählen wir die gleiche Impulsdauer $\delta T = 0{,}2\mathrm{ms}$ wie in Abb. 11.2. Um dieses Ergebnis mit der Abb. 11.3 vergleichen zu können, betrachten wir ausschließlich die Amplitude, da die Exponentialfunktion in Gl. (11.20) nur eine Phasendrehung verursacht, die durch eine Zeitverschiebung des Rechteckimpulses um $\delta T/2$ nach links – der Impuls liegt dann symmetrisch zu $t = 0$ – auch zu Null gemacht werden kann. Zusätzlich müssen wir den verbleibenden Ausdruck auf $\hat{u}$ normieren und den Faktor 2π nach Gl. (11.17) im Nenner berücksichtigen. Damit erhalten wir das in ▶Abb. 11.5 dargestellte kontinuierliche Spektrum

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\left|\underline{U}(\omega)\right|}{\hat{u}}=\frac{1}{\pi\,\omega}\sin\frac{\omega\,\delta T}{2} \tag{11.21}$$

als Funktion von ω. Es hat den gleichen Verlauf wie in Abb. 11.3, allerdings ist die Amplitude wegen der Verteilung auch auf den negativen Frequenzbereich um den Faktor 2 geringer.

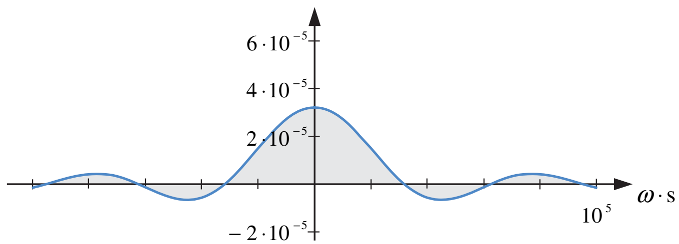


Abbildung 11.5: Kontinuierliches Spektrum eines Rechteckimpulses

Zum Abschluss wollen wir die Vorgehensweise nach Abb. 11.4 an einem einfachen Netzwerk demonstrieren. Die Kondensatorspannung $u_C(t)$ der *RC*-Reihenschaltung in ▶Abb. 11.6 soll für den auf der rechten Seite der Abbildung dargestellten einmaligen Spannungsimpuls mithilfe der Fourier-Transformation berechnet werden.

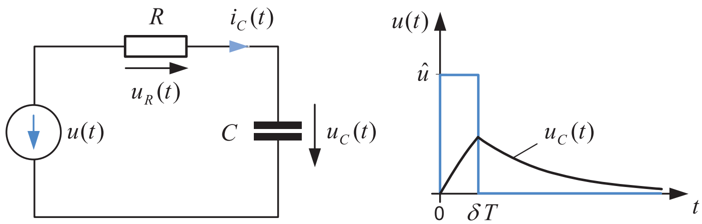


Abbildung 11.6: *RC*-Reihenschaltung an impulsförmiger Spannungsquelle

1. Schritt: Transformation der zeitabhängigen Quellenspannung in den Frequenzbereich

Die Fourier-Transformierte für diesen Rechteckimpuls übernehmen wir aus Gl. (11.20)

$$\underline{U}(\omega) = \frac{2\hat{u}}{\omega}\left(\sin\frac{\omega\,\delta T}{2}\right)e^{-j\frac{\omega\,\delta T}{2}} . \tag{11.22}$$

2. Schritt: Lösung des Gleichungssystems

Das Netzwerk besteht nur aus einer Masche, so dass wir auch nur eine einzige Gleichung erhalten. Das Verhältnis von der Kondensatorspannung zur Quellenspannung haben wir bereits in Gl. (8.76) angegeben

$$\underline{U}_C(\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC}\,\underline{U}(\omega) . \tag{11.23}$$

3. Schritt: Rücktransformation in den Zeitbereich

Mit Gl. (11.17) gilt

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{U}_C(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \overset{(11.23)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+j\omega RC}\,\underline{U}(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \\ &\overset{(11.22)}{=} \frac{\hat{u}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega(1+j\omega RC)}\sin\frac{\omega\,\delta T}{2}\,e^{j\omega\left(t-\frac{\delta T}{2}\right)}\,d\omega . \end{aligned} \tag{11.24}$$

Die Auswertung des komplexen Integrals liefert den in Abb. 11.6 bereits eingetragenen Kurvenverlauf[3]

$$u_C(t) = \hat{u}\cdot\begin{cases} 1-e^{-\frac{t}{RC}} & \text{für} \quad 0 \le t \le \delta T \\ e^{-\frac{t-\delta T}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}} & \quad\quad\;\; \delta T \le t \end{cases} . \tag{11.25}$$

3 Eine ausführliche Berechnung des Integrals erfolgt hier nicht, da an dieser Stelle lediglich die Vorgehensweise deutlich werden soll.

11.2 Der Übergang zur Laplace-Transformation[4]

Die Anwendbarkeit der Fourier-Transformation ist eng verknüpft mit der Existenz der Integrale. Wegen

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, \mathrm{d}t \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| u(t) \right| \mathrm{d}t \tag{11.26}$$

existiert die Fourier-Transformierte (11.16), sofern die Bedingung (11.6) erfüllt ist und das Integral über den Betrag der Funktion in dem Bereich $-\infty \le t \le \infty$ endlich bleibt. In diesem Fall existiert auch das Integral (11.17). Diese Voraussetzung ist aber schon bei einfachen Funktionen nicht mehr erfüllt. Beim Anschalten eines Netzwerks an eine Gleichspannung entspricht der zeitabhängige Verlauf der Quellenspannung einer Sprungfunktion.

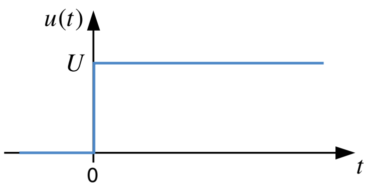


Abbildung 11.7: Sprungfunktion

Es ist offensichtlich, dass die Bedingung (11.26) für diesen Fall nicht erfüllt ist. Zur Beseitigung dieser Konvergenzprobleme werden zwei unterschiedliche Maßnahmen ergriffen. Die erste Maßnahme besteht darin, die Zeitfunktion $u(t)$ mit einer abklingenden Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{-\sigma t}$ mit $\sigma > 0$ zu multiplizieren, wobei σ einen frei wählbaren Parameter darstellt. Das Fourier-Integral über das Produkt aus Sprungfunktion und Exponentialfunktion konvergiert jetzt zwar für jeden positiven Wert σ, im allgemeinen Fall wird aber das Problem im Bereich $t < 0$ verschärft, da $\mathrm{e}^{-\sigma t}$ mit $t \to -\infty$ exponentiell ansteigt. Zur Beseitigung dieser Problematik wird als zweite Maßnahme jede Zeitfunktion $u(t)$ nur noch in dem Bereich $t > 0$ betrachtet und für $t < 0$ zu Null gesetzt. Dies entspricht auch der realen Situation, da jeder technische Vorgang zu einem bestimmten Zeitpunkt beginnt, der dann als $t = 0$ festgesetzt werden kann. Der konkrete zeitliche Ablauf der Vorgeschichte spielt keine Rolle mehr. Er beeinflusst den zukünftigen Ablauf nur noch durch die bei $t = 0$ vorliegenden Anfangswerte.

Die bisherige Zeitfunktion $u(t)$ wird also in der folgenden Weise modifiziert

$$u(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{e}^{-\sigma t}\, u(t) & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0\,. \end{cases} \tag{11.27}$$

Als Konsequenz erhalten wir sowohl eine geänderte Spektralfunktion $\underline{U}_\sigma(\omega)$, die mit Gl. (11.16) die folgende Form annimmt

$$\underline{U}_\sigma(\omega) = \int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-\sigma t}\, u(t) \right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty u(t)\, \mathrm{e}^{-(\sigma + \mathrm{j}\omega)\, t}\, \mathrm{d}t \tag{11.28}$$

4 Pierre Simon Marquis de Laplace, 1749 – 1827, franz. Mathematiker und Physiker.

als auch eine geänderte Rücktransformation nach Gl. (11.17)

$$e^{-\sigma t}\,u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_\sigma(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \quad \text{für} \quad t > 0\,. \tag{11.29}$$

Die von der Integrationsvariablen ω unabhängige Exponentialfunktion kann auch unter das Integralzeichen gezogen werden, so dass wir zunächst die Gleichung

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_\sigma(\omega)\, e^{\sigma t} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_\sigma(\omega)\, e^{(\sigma + j\omega)\,t}\, d\omega \tag{11.30}$$

erhalten. Der in den beiden Transformationsvorschriften (11.28) und (11.30) auftretende Ausdruck $\sigma + j\omega$ wird üblicherweise mit dem Buchstaben s abgekürzt und als **komplexe Frequenz** bezeichnet[5]. Damit können wir $\underline{U}(s)$ anstelle von $\underline{U}_\sigma(\omega)$ schreiben und wegen

$$s = \sigma + j\omega\,, \quad d\omega = \frac{1}{j}\,d s \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \omega_o = +\infty \\ \omega_u = -\infty \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} s_o = \sigma + j\infty \\ s_u = \sigma - j\infty \end{matrix} \tag{11.31}$$

erhalten wir die resultierenden Darstellungen

$$\boxed{\underline{U}(s) = \int_0^{\infty} u(t)\, e^{-st}\, dt} \quad \text{und} \quad \boxed{u(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \underline{U}(s)\, e^{st}\, ds} \quad \text{für} \quad t > 0\,. \tag{11.32}$$

Der Übergang von der Zeitfunktion $u(t)$ zur Spektralfunktion $\underline{U}(s)$ wird als **Laplace-Transformation** bezeichnet und vielfach mit dem folgenden Symbol abgekürzt:

$$\boxed{\underline{U}(s) = \mathbf{L}\{u(t)\}}\,. \tag{11.33}$$

Für die Rücktransformation bzw. inverse Laplace-Transformation ist die Schreibweise

$$\boxed{u(t) = \mathbf{L}^{-1}\{\underline{U}(s)\}} \tag{11.34}$$

üblich. Zur Unterscheidung zwischen Zeit- und Frequenzbereich werden die Begriffe **Originalfunktion** oder **Oberfunktion** für $u(t)$ und **Bildfunktion** oder **Unterfunktion** für $\underline{U}(s)$ verwendet.

Das Laplace-Integral können wir als Weiterentwicklung des Fourier-Integrals auffassen, insbesondere geht die Laplace-Transformation für den Sonderfall $\sigma = 0$ bzw. $s = j\omega$ wieder in die Fourier-Transformation über. An der Vorgehensweise bei der Berechnung von Netzwerken hat sich dadurch nichts geändert. In dem Ablaufplan in Abb. 11.4 sind lediglich die Transformationsvorschriften (11.16) und (11.17) durch die beiden Gln. (11.32) zu ersetzen. Der Vorteil der durch eine Modifikation aus der Fourier-Transformation hervorgegangenen Laplace-Transformation besteht darin, dass viele Netzwerksituationen berechnet werden können, bei denen die Fourier-Transformation aufgrund von Konvergenzproblemen versagt.

Bei der Sprungfunktion haben wir die Konvergenz mit einer abklingenden Exponentialfunktion erzwungen. Damit die Integrale auch in anderen betrachteten Fällen existieren, wollen wir voraussetzen, dass die zeitabhängigen Funktionen in den folgenden

5 Anstelle von s wird häufig auch der Buchstabe p verwendet.

Beispielen nicht schneller als eine Exponentialfunktion anwachsen. Für eine Zeitfunktion e^{at} ist die Konvergenz des Integrals durch eine Multiplikation mit $e^{-\sigma t}$ zu erreichen, wenn $\mathrm{Re}\{\sigma\} > \mathrm{Re}\{a\}$ gilt.

11.3 Die Berechnung von Netzwerken mit der Laplace-Transformation

Entsprechend dem Schema in Abb. 11.4 sind die drei Schritte

1. Transformation der zeitabhängigen Größen in den Frequenzbereich,
2. Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems und
3. Rücktransformation in den Zeitbereich

durchzuführen. Der große Vorteil dieser Vorgehensweise besteht wieder in der wesentlich einfacheren Auflösung des algebraischen, komplexen Gleichungssystems im Bildbereich gegenüber dem gekoppelten Differentialgleichungssystem im Zeitbereich. Ein geringerer Gesamtrechenaufwand ist aber nur dann zu erwarten, wenn der Übergang zwischen den Bereichen einfach bleibt. In der Praxis erfolgen die notwendigen Transformationen nur selten durch Auswertung der Integrale (11.32). Für die üblicherweise auftretenden Zeitfunktionen stehen umfangreiche Korrespondenztabellen zur Verfügung. In Kap. H.4 ist eine kleine Sammlung enthalten, wesentlich umfangreichere Tabellen können der Literatur, z.B. [4] und [31] entnommen werden.

In den folgenden Abschnitten wollen wir die drei Schritte etwas detaillierter betrachten und dabei einige Möglichkeiten kennen lernen, mit deren Hilfe die Transformationen auch ohne die Verwendung von Tabellen einfach durchführbar sind.

11.3.1 Transformation in den Frequenzbereich

Wir betrachten zunächst einige Beispiele, bei denen das Laplace-Integral auf direktem Weg berechnet werden soll, und beginnen mit der Sprungfunktion in Abb. 11.7. Diese ist definiert durch

$$u(t) = \begin{cases} U \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix} \tag{11.35}$$

und liefert mit der elementaren Rechnung

$$\mathbf{L}\{u(t)\} \overset{(11.32)}{=} \int_0^\infty u(t)\, e^{-st}\, dt \overset{(11.35)}{=} \frac{U}{-s} e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{U}{-s}(0-1) = \frac{U}{s} \tag{11.36}$$

die Korrespondenz Nr. 1 in Tab. H.2. Dieses Ergebnis gilt unter der Voraussetzung einer für $t \to \infty$ abklingenden Exponentialfunktion, also $\sigma > 0$. Bei der Rückkehr in den Zeitbereich mithilfe der inversen Laplace-Transformation liefert das Integral an der Sprungstelle $t = 0$ wie auch schon bei den Fourier-Reihen den arithmetischen Mittelwert von links- und rechtsseitigem Grenzwert. Zum besseren Verständnis betrachten wir noch einige spezielle Beispiele:

Beispiel 11.2: Laplace-Transformierte für ausgewählte Funktionen

a) Exponentialfunktion (Korrespondenz Nr. 4, a durch $-a$ ersetzt)

$$u(t) = \begin{cases} U\,\mathrm{e}^{at} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases} \tag{11.37}$$

$$\mathbf{L}\left\{U\,\mathrm{e}^{at}\right\} = U\int_0^\infty \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = U\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t = \frac{-U}{s-a}\,\mathrm{e}^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty = \frac{U}{s-a} \tag{11.38}$$

b) Trigonometrische Funktionen (Korrespondenzen Nr. 34 und 35)

$$u(t) = \begin{cases} U\sin(\omega t) & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases} \tag{11.39}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\left\{U\sin(\omega t)\right\} &= U\int_0^\infty \sin(\omega t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \overset{(9.27)}{=} \frac{U}{2\mathrm{j}}\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{U}{2\mathrm{j}}\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega)t} - \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\omega)t}\right)\mathrm{d}t = \frac{U}{2\mathrm{j}}\left[\frac{-\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega)t}}{s-\mathrm{j}\omega} + \frac{\mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\omega)t}}{s+\mathrm{j}\omega}\right]_0^\infty \\ &= \frac{U}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} - \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{U}{2\mathrm{j}}\,\frac{2\mathrm{j}\omega}{s^2+\omega^2} = U\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \end{aligned} \tag{11.40}$$

Das Ergebnis für die Kosinusfunktion erhalten wir ebenfalls mithilfe der Gl. (9.27) auf analoge Weise

$$u(t) = \begin{cases} U\cos(\omega t) & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases} \tag{11.41}$$

$$\mathbf{L}\left\{U\cos(\omega t)\right\} = \frac{U}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} + \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{U}{2}\,\frac{2s}{s^2+\omega^2} = U\,\frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{11.42}$$

c) Potenzfunktion (n sei eine natürliche Zahl) (Korrespondenz Nr. 3)

$$u(t) = \begin{cases} U\,t^n & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases} \tag{11.43}$$

Das auftretende Integral kann mithilfe der partiellen Integration berechnet werden

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\left\{u(t)\right\} &= \mathbf{L}\left\{U\,t^n\right\} = U\int_0^\infty t^n\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= U\left[-t^n\,\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty + U\,\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{n}{s}\,\mathbf{L}\left\{U\,t^{n-1}\right\} \end{aligned} \tag{11.44}$$

und führt auf eine Rekursionsformel, die nacheinander die Ergebnisse

$$\mathbf{L}\{U t^n\} = \frac{n}{s}\mathbf{L}\{U t^{n-1}\} = \frac{n(n-1)}{s^2}\mathbf{L}\{U t^{n-2}\} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{s^n}\mathbf{L}\{U t^0\} \quad (11.45)$$

bzw. zusammengefasst das Endergebnis

$$\mathbf{L}\{U t^n\} = \frac{n!}{s^n}\mathbf{L}\{U\} \overset{(11.36)}{=} U\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (11.46)$$

liefert.

In vielen Fällen wird die Berechnung des Laplace-Integrals durch die Anwendung bekannter Gesetzmäßigkeiten wesentlich erleichtert. Wir werden daher im Folgenden einige Hilfssätze herleiten und deren Gebrauch an praktischen Beispielen demonstrieren.

1. Lineare Überlagerung

Lässt sich eine Zeitfunktion als eine Summe aus einzelnen Originalfunktionen darstellen

$$u(t) = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \ldots + a_n u_n(t)\,, \quad (11.47)$$

dann gilt für die Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\{u(t)\} &\overset{(11.32)}{=} \int_0^\infty \left[a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \ldots + a_n u_n(t)\right] \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= a_1 \int_0^\infty u_1(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + a_2 \int_0^\infty u_2(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + \ldots + a_n \int_0^\infty u_n(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned} \quad (11.48)$$

bzw.

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}\{a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \ldots + a_n u_n(t)\} \\ &\quad = a_1 \mathbf{L}\{u_1(t)\} + a_2 \mathbf{L}\{u_2(t)\} + \ldots + a_n \mathbf{L}\{u_n(t)\}. \end{aligned} \quad (11.49)$$

2. Verschiebungssatz

Wir betrachten die Auswirkung einer zeitlichen Verschiebung der Funktion $u(t)$ um t_0 nach rechts auf der Zeitachse.

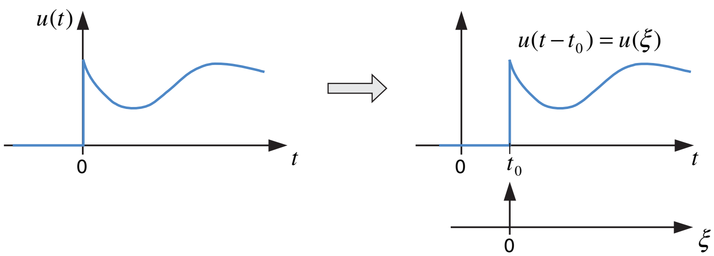


Abbildung 11.8: Zeitliche Verschiebung einer Funktion

Die ursprüngliche Funktion geht nach ▶Abb. 11.8 in die neue Funktion

$$u(\xi) = \begin{cases} u(t-t_0) \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} t > t_0\,, & \xi > 0 \\ t < t_0\,, & \xi < 0 \end{matrix} \tag{11.50}$$

über. Mit der Substitution

$$t - t_0 = \xi\,, \quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}\xi \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \xi_o = t_o - t_0 = \infty - t_0 = \infty \\ \xi_u = t_u - t_0 = t_0 - t_0 = 0 \end{matrix} \tag{11.51}$$

erhalten wir das Integral

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\{u(t-t_0)\} &= \int_{t_0}^{\infty} u(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} u(\xi)\,\mathrm{e}^{-s(\xi+t_0)}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{e}^{-st_0}\int_0^{\infty} u(\xi)\,\mathrm{e}^{-s\xi}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-st_0}\,\mathbf{L}\{u(\xi)\}\,. \end{aligned} \tag{11.52}$$

Die Laplace-Transformierte der Funktion $u(\xi)$ mit der eingetragenen ξ-Achse auf der rechten Seite der Abb. 11.8 ist aber identisch zu $\mathbf{L}\{u(t)\}$ auf der linken Seite der Abbildung, so dass resultierend

$$\boxed{\mathbf{L}\{u(t-t_0)\} = \mathrm{e}^{-st_0}\,\mathbf{L}\{u(t)\}} \tag{11.53}$$

mit $t_0 \geq 0$ und $u(t-t_0) = 0$ für $t < t_0$ gilt.

Beispiel 11.3: Rechteckimpuls

Der in ▶Abb. 11.9 dargestellte Rechteckimpuls lässt sich aus der Überlagerung einer Sprungfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ und einer weiteren Sprungfunktion mit negativer Amplitude zum verschobenen Zeitpunkt $t = \delta T$ zusammensetzen.

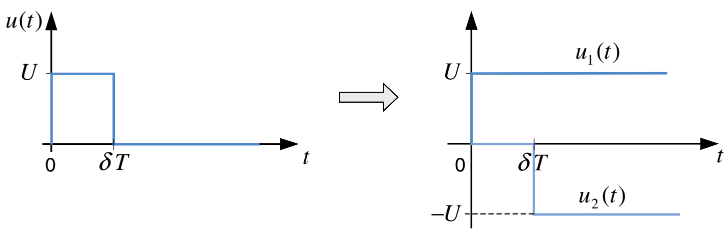


Abbildung 11.9: Zerlegung eines Rechteckimpulses

Für die Laplace-Transformierte erhalten wir durch Überlagerung und Verschiebung das Ergebnis

$$\mathbf{L}\{u(t)\} = \mathbf{L}\{u_1(t)\} + \mathbf{L}\{u_2(t)\} = \frac{U}{s} - \mathrm{e}^{-s\delta T}\frac{U}{s} = \frac{U}{s}\left(1 - \mathrm{e}^{-s\delta T}\right). \tag{11.54}$$

3. Dämpfungssatz

Gegeben sei eine Funktion $u(t)$ mit bekannter Bildfunktion $\mathbf{L}\{u(t)\}$. Gesucht ist die Auswirkung auf die Bildfunktion, wenn die Originalfunktion mit e^{-at} multipliziert wird. Diese Exponentialfunktion bewirkt für reelle Werte $a > 0$ ein Abklingen der Originalfunktion mit zunehmender Zeit. Aus dem Integral erhalten wir

$$\mathbf{L}\left\{u(t)\,\mathrm{e}^{-at}\right\} = \int_0^\infty u(t)\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty u(t)\,\mathrm{e}^{-(s+a)t}\,\mathrm{d}t \overset{(11.32)}{=} \underline{U}(s+a)\,. \tag{11.55}$$

In dem Ergebnis

$$\mathbf{L}\left\{u(t)\,\mathrm{e}^{-at}\right\} = \underline{U}(s+a) \tag{11.56}$$

darf a auch komplexe Werte annehmen. Die Bildfunktion zu der mit e^{-at} multiplizierten Ausgangsfunktion $u(t)$ erhalten wir, indem wir in der zu $u(t)$ gehörenden Bildfunktion $\mathbf{L}\{u(t)\}$ den Parameter s durch $s + a$ ersetzen.

Zwischen den Beziehungen (11.53) und (11.56) besteht eine interessante Analogie. Eine *Verschiebung der Originalfunktion* um t_0 nach rechts bewirkt eine *Dämpfung der Bildfunktion* mit e^{-st_0}. Andererseits bewirkt eine *Dämpfung der Originalfunktion* mit e^{-at} eine *Verschiebung bei der Bildfunktion*, in der der Parameter s durch $s + a$ zu ersetzen ist.

Beispiel 11.4: Abklingende Kosinusschwingung

Für die in ▶Abb. 11.10 dargestellte Funktion

$$u(t) = \begin{cases} U\,\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t) & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases} \tag{11.57}$$

ist die Laplace-Transformierte anzugeben (Korrespondenz Nr. 41).

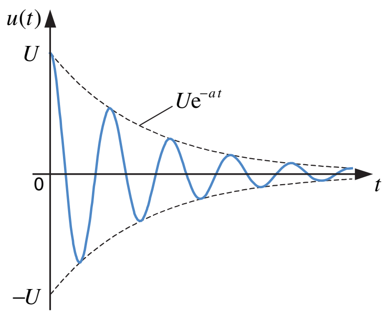


Abbildung 11.10: Abklingende Kosinusschwingung

Ausgehend von der Gl. (11.42) erhalten wir die gesuchte Korrespondenz unmittelbar durch Anwendung der Beziehung (11.56)

$$\mathbf{L}\left\{U\,\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t)\right\} = U\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\,. \tag{11.58}$$

4. Ähnlichkeitssatz

Die Multiplikation der Variablen t in der Originalfunktion mit einem reellen Faktor $a > 0$ bedeutet ein Zusammenschieben oder Auseinanderziehen der Ausgangsfunktion.

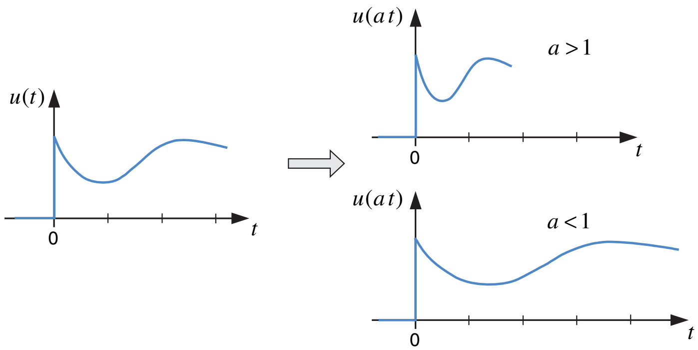


Abbildung 11.11: Stauchung und Streckung der Zeitachse

Mit der Substitution $at = \xi$ und $\mathrm{d}t = (1/a)\mathrm{d}\xi$ sowie den unveränderten Integrationsgrenzen erhalten wir das Integral

$$\mathbf{L}\{u(at)\} = \int_0^\infty u(at)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty u(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{11.59}$$

und damit das Ergebnis

$$\boxed{\mathbf{L}\{u(at)\} = \frac{1}{a}\underline{U}\left(\frac{s}{a}\right)} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{1}{a}\mathbf{L}\left\{u\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = \underline{U}(as)}\,. \tag{11.60}$$

Wird in der Originalfunktion die Variable t mit einem positiven reellen Faktor a multipliziert, dann muss in der zu $u(t)$ gehörenden Bildfunktion der Parameter s durch s/a ersetzt und das Ergebnis durch a dividiert werden.

Beispiel 11.5: Kosinusschwingung mit *n*-facher Frequenz

Es ist die Laplace-Transformierte zu der Funktion

$$u(t) = \begin{cases} \hat{U}\cos(n\omega t) & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases} \tag{11.61}$$

anzugeben. Im Prinzip muss in der Gl. (11.42) lediglich ω durch $n\omega$ ersetzt werden. Wir überprüfen diese Aussage mit dem Ähnlichkeitssatz und erhalten das erwartete Ergebnis

$$\mathbf{L}\{\hat{U}\cos(n\omega t)\} \overset{(11.60)}{=} \frac{\hat{U}}{n}\frac{s/n}{(s/n)^2 + \omega^2} = \hat{U}\frac{s}{s^2 + n^2\omega^2}\,. \tag{11.62}$$

5. Periodizität von Signalen

Bei einem periodischen Spannungsverlauf entspricht die zeitabhängige Signalform in der n-ten Periode der um $(n-1)T$ verschobenen Signalform aus der ersten Periode (▶Abb. 11.12).

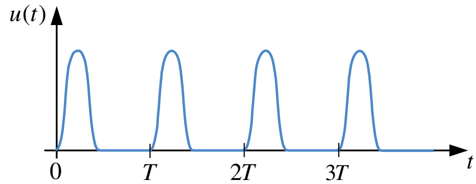


Abbildung 11.12: Periodische Signalform

Die Beschreibung der periodischen Spannung durch eine Überlagerung identischer, aber zeitverschobener Einzelimpulse führt mit dem Verschiebungssatz auf eine unendliche Summe

$$\mathbf{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[1+\mathrm{e}^{-sT}+\mathrm{e}^{-2sT}+\mathrm{e}^{-3sT}+\ldots\right]\int_0^T u(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,, \tag{11.63}$$

die nach Zusammenfassung der unendlichen Reihe das folgende Ergebnis liefert

$$\boxed{\mathbf{L}\{u(t)\} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T u(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}\,. \tag{11.64}$$

Zur Berechnung der Laplace-Transformierten eines periodischen Spannungsverlaufs genügt also die Berechnung des Laplace-Integrals (11.32) über den Bereich der ersten Periode $0 \le t \le T$.

Beispiel 11.6: Periodische Rechteckschwingung

Von der periodischen Rechteckschwingung in ▶Abb. 11.13 ist die Laplace-Transformierte anzugeben.

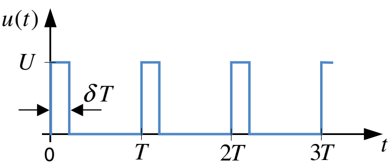


Abbildung 11.13: Periodische Rechteckschwingung

Die Bildfunktion eines einzelnen Impulses ist aus Gl. (11.54) bekannt und mit Gl. (11.64) erhalten wir unmittelbar das Gesamtergebnis

$$\mathbf{L}\{u(t)\} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\,\frac{U}{s}\left(1-\mathrm{e}^{-s\delta T}\right) = \frac{U}{s}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-s\delta T}}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\,. \tag{11.65}$$

6. Differentiationssatz für die Originalfunktion

Die Laplace-Transformierte einer nach der Zeit abgeleiteten Funktion kann mithilfe der partiellen Integration berechnet werden. Mit der Schreibweise $u'(t)$ für die zeitliche Ableitung gilt

$$\mathbf{L}\left\{u'(t)\right\} = \mathbf{L}\left\{\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[u(t)\,\mathrm{e}^{-st}\right]\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty u(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,. \quad (11.66)$$

Unter den beiden Voraussetzungen

1. $\lim\limits_{t\to\infty}\left[u(t)e^{-st}\right] = 0$ und

2. der rechtsseitige Grenzwert[6] $u(t \to 0) = u(+0)$ der Funktion $u(t)$ existiert

erhalten wir mit Gl. (11.32) das Ergebnis

$$\mathbf{L}\left\{u'(t)\right\} = s\,\mathbf{L}\left\{u(t)\right\} - u(+0) = s\underline{U}(s) - u(+0)\,. \quad (11.67)$$

Die Differentiation im Zeitbereich geht über in eine Multiplikation mit s im Bildbereich. In dieser Vereinfachung steckt der wesentliche Vorteil der Laplace-Transformation bei der Berechnung von Netzwerken bzw. bei der Lösung der entstehenden Differentialgleichungen (10.73). Der zusätzlich auftretende Wert $u(+0)$ erfasst die Anfangsbedingung beim Spulenstrom nach Gl. (7.4) bzw. bei der Kondensatorspannung nach Gl. (7.5).

Mit der gleichen Vorgehensweise erhalten wir die Laplace-Transformierte der zweiten zeitlichen Ableitung einer Funktion

$$\mathbf{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\} = \mathbf{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\} \overset{(11.67)}{=} s\,\mathbf{L}\left\{\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right\} - \left.\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=+0}\,. \quad (11.68)$$

Durch nochmalige Anwendung der Beziehung (11.67) folgt schließlich

$$\mathbf{L}\left\{u''(t)\right\} = s\left[s\underline{U}(s) - u(+0)\right] - u'(+0) = s^2\underline{U}(s) - s\,u(+0) - u'(+0)\,. \quad (11.69)$$

Die Verallgemeinerung auf die n-te zeitliche Ableitung der Funktion $u(t)$ liefert das Ergebnis

$$\mathbf{L}\left\{u^{(n)}(t)\right\} = s^n\underline{U}(s) - s^{n-1}u(+0) - s^{n-2}u'(+0) - \ldots - s\,u^{(n-2)}(+0) - u^{(n-1)}(+0)\,. \quad (11.70)$$

Die bei der Herleitung der Gl. (11.67) gemachten Voraussetzungen müssen in entsprechender Weise bei jedem weiteren Schritt ebenfalls erfüllt sein. Die Gl. (11.70) gilt somit unter den Voraussetzungen

1. $\lim\limits_{t\to\infty}\left[u(t)e^{-st}\right] = \lim\limits_{t\to\infty}\left[u'(t)e^{-st}\right] = \ldots = \lim\limits_{t\to\infty}\left[u^{(n-1)}(t)e^{-st}\right] = 0$ und

2. die rechtsseitigen Grenzwerte $u(+0), u'(+0), \ldots\ u^{(n-1)}(+0)$ existieren.

6 Unter dem rechtsseitigen Grenzwert wird der Wert verstanden, dem die Funktion $u(t \to 0)$ mit t von positiven Werten kommend zustrebt.

7. Integrationssatz für die Originalfunktion

Wir wollen jetzt die Laplace-Transformierte für das Integral einer Zeitfunktion berechnen. Mit der Definitionsgleichung (11.32) und unter Anwendung der partiellen Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} &= \int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\frac{-1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]\Bigg|_{0}^{\infty} - \left(\frac{-1}{s}\right)\int_{0}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned} \tag{11.71}$$

Unter den beiden Voraussetzungen

1. $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{-st}\right] = 0$ und

2. der Grenzwert $\lim\limits_{t\to 0}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$ existiert

erhalten wir mit Gl. (11.32) das Ergebnis

$$\mathbf{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{s}\mathbf{L}\{u(t)\}\,. \tag{11.72}$$

Verschwindet insbesondere das über den Bereich $-\infty < t \le 0$ gebildete Integral der Zeitfunktion, dann gilt die vereinfachte Beziehung

$$\mathbf{L}\left\{\int_{0}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathbf{L}\{u(t)\}\,. \tag{11.73}$$

Einer Integration im Zeitbereich entspricht eine Division durch s im Bildbereich. Die Erweiterung auf eine n-fache Integration im Zeitbereich bedeutet eine Division durch s^n im Bildbereich.

11.3.2 Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems

Die bisher abgeleiteten Zusammenhänge erlauben uns die Transformation zeitabhängiger Funktionen in den Bildbereich. Die Frage, an welcher Stelle des Rechenablaufs der Übergang in den Frequenzbereich vorgenommen werden sollte, lässt sich aber nicht eindeutig beantworten.

Eine erste Möglichkeit besteht darin, alle Maschen- und Knotengleichungen im Zeitbereich aufzustellen. Für die Zusammenhänge an den Komponenten werden die Gleichungen in Tab. 7.1 zugrunde gelegt. Diese Gleichungen werden zu einer linearen, inhomogenen DGL n-ter Ordnung entsprechend Gl. (10.73) mit nur noch einer Unbekannten zusammengefasst, die mithilfe des Differentiationssatzes und durch Anwendung der Korrespondenztabellen bei den Quellengrößen in den Bildbereich transformiert wird. Die Auflösung dieser algebraischen Gleichung nach der Laplace-Transformierten der gesuchten Netzwerkgröße ist auf einfache Weise durchführbar.

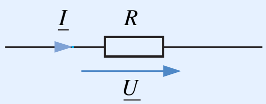
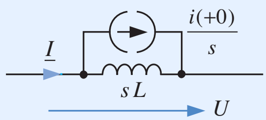
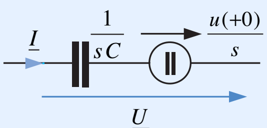
Als weitere Möglichkeiten können die Netzwerkgleichungen bereits im Bildbereich aufgestellt werden. Diese Vorgehensweise ist vergleichbar zur komplexen Wechselstromrechnung. Im ersten Schritt werden die Quellengrößen mit den Korrespondenztabellen in den Bildbereich transformiert. Mit den Kirchhoff'schen Gleichungen

$$\sum_{Masche} \underline{U}(s) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{Knoten} \underline{I}(s) = 0 \tag{11.74}$$

und den in Tab. 11.2 angegebenen Beziehungen an den Komponenten erhalten wir ein komplexes algebraisches Gleichungssystem, das nach der gesuchten Größe aufgelöst werden kann.

Tabelle 11.2

Strom- und Spannungsbeziehungen an den linearen passiven Netzwerkelementen

Komponente	Spannung	Strom	Gleichung
	$\underline{U} = R\,\underline{I}$	$\underline{I} = \underline{U}/R$	(11.75)
	$\underline{U} = sL\,\underline{I} - L\,i(+0)$	$\underline{I} = \frac{1}{sL}\underline{U} + \frac{i(+0)}{s}$	(11.76)
	$\underline{U} = \frac{1}{sC}\underline{I} + \frac{u(+0)}{s}$	$\underline{I} = sC\,\underline{U} - C\,u(+0)$	(11.77)

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Gleichungen in den beiden Tab. 8.2 und 11.2 besteht darin, dass in Tab. 11.2 die Anfangswerte von Kondensatorspannung und Spulenstrom berücksichtigt werden. Während die komplexe Rechnung einen quasistationären Zustand beschreibt, liefert die Laplace-Transformation Ergebnisse nur für einen einseitig begrenzten Zeitbereich, z.B. für $t > 0$. Die Vorgeschichte muss daher als Anfangsbedingung erfasst werden, bei der Transformation des Netzwerks in den Bildbereich durch die in Tab. 11.2 eingetragenen zusätzlichen Quellen.

Einen wichtigen Sonderfall erhalten wir, wenn sich das Netzwerk bei einem Einschaltvorgang in einem energielosen Anfangszustand befindet. In diesem Fall kann genauso wie bei der komplexen Wechselstromrechnung vorgegangen werden, es muss lediglich $j\omega$ durch die komplexe Frequenz s ersetzt werden. Die Zusammenhänge zwischen Strom und Spannung an den Netzwerkelementen, die Kirchhoff'schen Gleichungen, die Strom- und Spannungsteilerbeziehungen und auch die Gleichungen für die Reihen- und Parallelschaltung der Netzwerkelemente bleiben erhalten. Ein wesentlicher Unterschied besteht allerdings bei den Transformationsvorschriften zwischen Zeit- und Frequenzbereich.

Beispiel 11.7: Einschaltvorgang

Um diese Aussage zu verdeutlichen, betrachten wir das einfache *RC*-Netzwerk in ▶Abb. 11.14, das zum Zeitpunkt $t = 0$ erstmalig an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen wird.

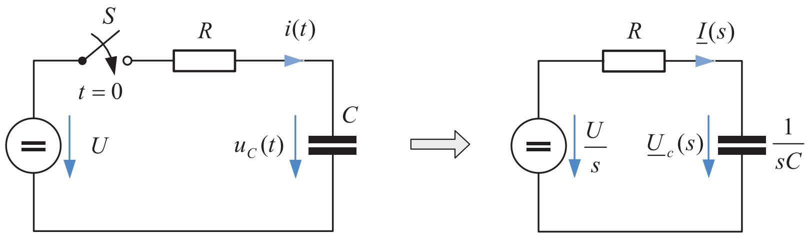


Abbildung 11.14: Aufladen eines Kondensators

Wir übertragen das Netzwerk direkt in den Bildbereich und erhalten aus der Spannungsteilergleichung die Beziehung

$$\underline{U}_C(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \frac{U}{s} = U \frac{1}{s(sRC+1)} \tag{11.78}$$

für die Kondensatorspannung. Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert mit der Korrespondenz Nr. 9 bereits das Ergebnis

$$u_C(t) = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{U}{s(sRC+1)}\right\} = U\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{11.79}$$

für den Einschaltvorgang (vgl. Gl. (10.8)).

11.3.3 Rücktransformation in den Zeitbereich

Für die Rücktransformation der algebraischen Gleichungen stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung. Die wichtigste und einfachste ist die direkte Anwendung der Korrespondenztabellen, so wie im vorangegangenen Beispiel gezeigt. Im Folgenden werden wir noch zwei weitere Möglichkeiten kennen lernen.

1. Faltungssatz

Lässt sich die Bildfunktion als ein Produkt zweier Bildfunktionen darstellen

$$\underline{U}(s) = \underline{U}_1(s) \cdot \underline{U}_2(s) = \mathbf{L}\{u_1(t)\} \cdot \mathbf{L}\{u_2(t)\}, \tag{11.80}$$

dann besteht die Originalfunktion $u(t)$ nicht aus dem Produkt der beiden einzelnen Originalfunktionen, sondern sie wird durch das so genannte **Faltungsintegral**

$$u(t) = \mathbf{L}^{-1}\{\underline{U}_1(s) \cdot \underline{U}_2(s)\} = \int_0^t u_1(\tau)\, u_2(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t u_1(t-\tau)\, u_2(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{11.81}$$

beschrieben. Zur besonderen Kennzeichnung wird das Symbol $*$ verwendet

$$u(t) = u_1(t) * u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau)\, u_2(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t u_1(t-\tau)\, u_2(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{11.82}$$

Beispiel 11.8: Rücktransformation der Korrespondenz Nr. 13

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{-1}\{\underline{U}(s)\} &\overset{\text{Nr.13}}{=} \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{as+1}\right\} \overset{\text{Nr.2, Nr.7}}{=} t * \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \\ &= \frac{1}{a}\int_0^t \tau\, \mathrm{e}^{-\frac{t-\tau}{a}}\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \int_0^t \tau\, \mathrm{e}^{\frac{\tau}{a}}\, \mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{11.83}$$

Nach Anwendung der partiellen Integration

$$\int_0^t \tau\, \mathrm{e}^{\frac{\tau}{a}}\, \mathrm{d}\tau = \tau\, a\, \mathrm{e}^{\frac{\tau}{a}}\Big|_0^t - a\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\tau}{a}}\, \mathrm{d}\tau = t\, a\, \mathrm{e}^{\frac{t}{a}} - a^2\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{a}} - 1\right) \tag{11.84}$$

erhalten wir die Originalfunktion entsprechend der Korrespondenz Nr. 13

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(as+1)}\right\} = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\left[t\, a\, \mathrm{e}^{\frac{t}{a}} - a^2\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{a}} - 1\right)\right] = t - a + a\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\,. \tag{11.85}$$

2. Partialbruchzerlegung

Bei umfangreicheren Netzwerken führt die Auflösung des Gleichungssystems in vielen Fällen auf eine gebrochen rationale Funktion

$$\underline{U}(s) = \frac{\underline{G}(s)}{\underline{N}(s)} \tag{11.86}$$

mit dem Zählerpolynom $\underline{G}(s)$ und dem Nennerpolynom $\underline{N}(s)$, die zunächst auf eine für die Anwendung der Korrespondenztabellen geeignete Form gebracht werden muss. Für die weitere Vorgehensweise setzen wir voraus, dass der Grad m des Zählerpolynoms kleiner ist als der Grad n des Nennerpolynoms. Ist dies nicht der Fall, dann kann der Zähler durch den Nenner dividiert werden, wobei ein Polynom vom Grad m–n abgespalten werden kann, so dass eine gebrochen rationale Funktion verbleibt. Diese lässt sich durch die **Partialbruchzerlegung** in einfache mithilfe der Tabellen transformierbare Ausdrücke zerlegen. Bezeichnen wir mit s_k und $k = 1 \dots n$ die Nullstellen des Nennerpolynoms $\underline{N}(s)$, dann kann dieses als Produkt der Linearfaktoren

$$\underline{N}(s) = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_k) \cdots (s - s_{n-1})(s - s_n) \tag{11.87}$$

geschrieben werden. Wir können annehmen, dass die beiden Polynome $\underline{G}(s)$ und $\underline{N}(s)$ teilerfremd sind, da gleiche Nullstellen gekürzt werden können. Bei den möglicherweise auftretenden Nullstellen müssen drei Fälle unterschieden werden:

Erster Fall: *Alle Nullstellen sind verschieden.*

In diesem Fall kann $\underline{U}(s)$ folgendermaßen dargestellt werden

$$\underline{U}(s) = \frac{\underline{G}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{A_n}{s - s_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{s - s_k}\,. \tag{11.88}$$

Zweiter Fall: *Es treten mehrfache Nullstellen auf.*

Besitzt das Nennerpolynom eine mehrfache Wurzel

$$\underline{N}(s) = (s - s_1)^n\,, \tag{11.89}$$

dann nimmt der Ansatz für die Partialbruchzerlegung die folgende Form an

$$\underline{U}(s) = \frac{\underline{G}(s)}{(s - s_1)^n} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{(s - s_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(s - s_1)^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(s - s_1)^k}\,. \tag{11.90}$$

Dritter Fall: *Es treten paarweise konjugiert komplexe Nullstellen auf.*

Der Ausdruck

$$s^2 + 2bs + a^2 = (s - s_1)(s - s_2) \tag{11.91}$$

besitzt für $a^2 > b^2$ zwei konjugiert komplexe Nullstellen

$$s_1 = -b + \mathrm{j}\sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{und} \quad s_2 = -b - \mathrm{j}\sqrt{a^2 - b^2} = s_1^*\,. \tag{11.92}$$

Die Teilbrüche können dann im Prinzip genauso wie in Gl. (11.88) aufgestellt werden. Um die Rechnung mit komplexen Größen zu vermeiden, kann aber auch ein einzelner Teilbruch verwendet werden, in dem die beiden Nullstellen bereits zusammengefasst sind.

Betrachten wir als Beispiel den Fall mit einer doppelten, konjugiert komplexen Nullstelle, dann ist der folgende Ansatz zu verwenden

$$\underline{U}(s) = \frac{\underline{G}(s)}{(s^2 + 2bs + a^2)^2} = \frac{A_1 + B_1 s}{s^2 + 2bs + a^2} + \frac{A_2 + B_s s}{(s^2 + 2bs + a^2)^2}\,. \tag{11.93}$$

Zur Bestimmung der unbekannten Konstanten A_k und B_k kann in allen drei Fällen die rechte Seite der Gleichung auf den Hauptnenner gebracht werden. Der Koeffizientenvergleich von dem so entstandenen Zähler mit dem Polynom $\underline{G}(s)$ liefert ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Konstanten.

Bei einfachen Nullstellen lässt sich die Auflösung eines Gleichungssystems vermeiden. Wird nämlich die Gl. (11.88) mit einem der Linearfaktoren $(s - s_k)$ multipliziert und anschließend der Grenzübergang $s \to s_k$ durchgeführt, dann verbleibt auf der rechten Gleichungsseite nur der Koeffizient A_k

$$\lim_{s \to s_k} \left[\frac{\underline{G}(s)}{\underline{N}(s)} (s - s_k) \right] = \underline{G}(s_k) \lim_{s \to s_k} \frac{s - s_k}{\underline{N}(s)} = A_k \tag{11.94}$$

und auf der linken Gleichungsseite erhält man durch Differentiation von Zähler und Nenner nach s entsprechend der l'Hospital'schen Regel das Ergebnis

$$A_k = \underline{G}(s_k) \frac{1}{\underline{N}'(s_k)} \,. \tag{11.95}$$

Die zugehörige Zeitfunktion

$$u(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{s - s_k} \right\} \overset{(11.95)}{=} \mathbf{L}^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{G}(s_k)}{\underline{N}'(s_k)} \frac{1}{s - s_k} \right\} \tag{11.96}$$

kann in diesem Fall mithilfe der Korrespondenz Nr. 4 unmittelbar angegeben werden

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{G}(s_k)}{\underline{N}'(s_k)} \, \mathrm{e}^{s_k t} \,. \tag{11.97}$$

Diese Beziehung ist als **Heaviside'scher Entwicklungssatz** bekannt.

Für die Rücktransformation existieren noch weitere Verfahren wie z.B. die Reihenentwicklung der Bildfunktion oder auch die direkte Berechnung der inversen Laplace-Transformation mit dem Integral (11.32). An dieser Stelle sei der Leser auf die entsprechende Literatur verwiesen, z.B. [1] und [4]. Fassen wir die durchzuführenden Schritte bei der Analyse eines Netzwerks abschließend noch einmal zusammen:

Erste Möglichkeit

1. Aufstellung des Gleichungssystems mit Knoten- und Maschenregel im Zeitbereich

2. (optional) Zusammenfassung der Gleichungen zu einer DGL n-ter Ordnung entsprechend Gl. (10.73)

3. Transformation des Gleichungssystems bzw. der DGL (10.73) in den Bildbereich mit dem Differentiationssatz

4. Auflösung des algebraischen Gleichungssystems nach der gesuchten Größe

5. Rücktransformation in den Zeitbereich, bevorzugt mit der Korrespondenztabelle

Zweite Möglichkeit (vgl. Beispiel 11.7)

1. Übertragung aller zeitabhängigen Größen in den Bildbereich
2. Berücksichtigung der Anfangswerte von Spulenstrom und Kondensatorspannung durch zusätzliche Quellen im Schaltbild entsprechend Tab. 11.2
3. Aufstellung des Gleichungssystems mit Knoten- und Maschenregel im Bildbereich
4. Auflösung des algebraischen Gleichungssystems nach der gesuchten Größe
5. Rücktransformation in den Zeitbereich, bevorzugt mit der Korrespondenztabelle

Beispiel 11.9: Einschaltvorgang

Wir wollen zum Abschluss nochmals die Vorgehensweise nach der ersten Möglichkeit an einer konkreten Schaltung demonstrieren. Eine *RC*-Reihenschaltung mit einem auf die Anfangsspannung u_{C0} aufgeladenen Kondensator wird gemäß ▶Abb. 11.15 zum Zeitpunkt $t = 0$ an eine zeitabhängige Spannungsquelle mit rampenförmigem Verlauf angeschlossen. Zu bestimmen ist der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung $u_C(t)$.

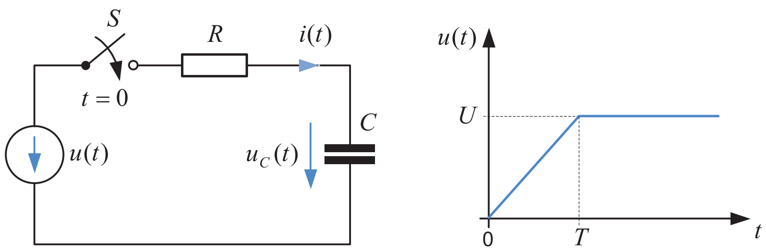


Abbildung 11.15: *RC*-Reihenschaltung an zeitabhängiger Spannungsquelle

Die Maschengleichung für dieses Netzwerk (entsprechend Gl. (10.73))

$$u(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) \tag{11.98}$$

muss in den Bildbereich transformiert werden

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\{u(t)\} &= RC\,\mathbf{L}\left\{\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right\} + \mathbf{L}\{u_C(t)\} \\ &\overset{(11.67)}{=} RC\left[s\underline{U}_C(s) - u_C(+0)\right] + \underline{U}_C(s)\,. \end{aligned} \tag{11.99}$$

Die Quellenspannung stellen wir nach ▶Abb. 11.16 als eine Überlagerung aus zwei zeitlich linear ansteigenden Spannungsverläufen dar, für die wir mit dem Verschiebungssatz die folgende Bildfunktion erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\{u(t)\} &= \mathbf{L}\{u_1(t)\} + \mathbf{L}\{u_2(t)\} \\ &= \mathbf{L}\{u_1(t)\} - \mathbf{L}\{u_1(t-T)\} \overset{\text{Nr.2}}{=} \frac{U}{T}\frac{1}{s^2}\left(1-\mathrm{e}^{-sT}\right).\end{aligned} \tag{11.100}$$

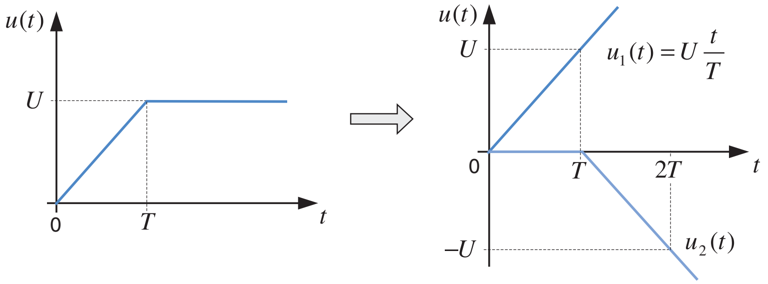


Abbildung 11.16: Zerlegung der Rampenfunktion

Mit $u_C(+0) = u_{C0}$ erhalten wir somit im Bildbereich die nach der Kondensatorspannung aufgelöste Beziehung

$$\underline{U}_C(s) = u_{C0}\frac{RC}{1+sRC} + \frac{U}{T}\frac{1}{(1+sRC)s^2} - \frac{U}{T}\frac{1}{(1+sRC)s^2}\mathrm{e}^{-sT}. \tag{11.101}$$

Nach Rücktransformation der ersten beiden Ausdrücke mit den Korrespondenzen Nr. 7 und Nr. 13 erhalten wir das Zwischenergebnis

$$u_C(t) = u_{C0}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + U\left(\frac{t}{T} - \frac{RC}{T} + \frac{RC}{T}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) - \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{U}{T}\frac{1}{(1+sRC)s^2}\mathrm{e}^{-sT}\right\}. \tag{11.102}$$

Für den verbleibenden Anteil liefert der Verschiebungssatz in Kombination mit der Korrespondenz Nr. 13 die gleiche Lösung wie bei dem zweiten Ausdruck, wobei jedoch t durch $(t-T)$ zu ersetzen ist. Damit gilt

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{U}{T}\frac{1}{(1+sRC)s^2}\mathrm{e}^{-sT}\right\} = \frac{U}{T}\cdot\begin{cases} 0 & \text{für } t < T \\ t-T-RC+RC\,\mathrm{e}^{-\frac{t-T}{RC}} & \text{für } t \geq T \end{cases}. \tag{11.103}$$

Die resultierende Gesamtlösung

$$\frac{u_C(t)}{U} = \frac{u_{C0}}{U}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + \begin{cases} \dfrac{t}{T} - \dfrac{RC}{T}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) & \text{für} \quad t < T \\ 1 - \dfrac{RC}{T}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t-T}{RC}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) & \phantom{\text{für}} \quad t \geq T \end{cases} \tag{11.104}$$

ist für den Anfangswert $u_{C0} = U/2$ und für verschiedene Zeitkonstanten RC in ▶Abb. 11.17 dargestellt.

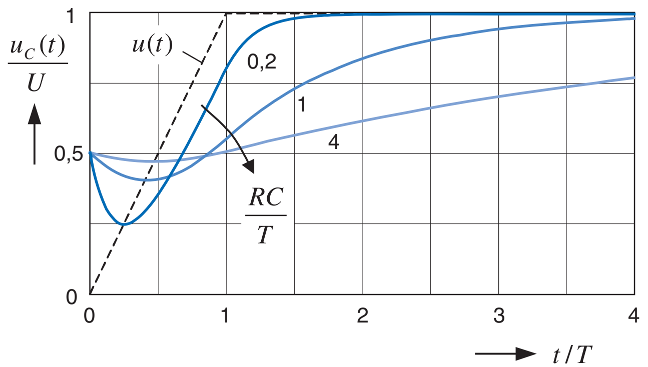


Abbildung 11.17: Zeitabhängiger Verlauf der Kondensatorspannung

ZUSAMMENFASSUNG

- Einmalige, sich nicht periodisch wiederholende **Spannungsverläufe** können als Sonderfall eines periodischen Signals mit unendlich langer Periodendauer aufgefasst werden.
- Da die **Abstände** zwischen den Spektrallinien bei der Fourier-Entwicklung dem Kehrwert der Periodendauer entsprechen, gehen die Abstände für $T \to \infty$ nach Null, d.h. das diskrete Eigenwertspektrum im Falle endlicher Periodendauer geht über in ein kontinuierliches Spektrum im Falle eines einmaligen, zeitlich begrenzten Spannungsverlaufs.
- Die **Fourier-Reihe** wird ersetzt durch das Fourier-Integral. Nicht nur bei der Transformation der Zeitfunktion in den Frequenzbereich müssen zur Bestimmung des Spektrums Integrale berechnet werden, sondern auch bei der umgekehrten Operation, nämlich der Transformation von dem Frequenzbereich in den Zeitbereich muss im Gegensatz zur Summation bei den Fourier-Reihen jetzt ebenfalls eine Integration über das kontinuierliche Spektrum durchgeführt werden.
- Zur Vermeidung von **Konvergenzproblemen** bei den Fourier-Integralen wird die zeitliche Funktion nur im Bereich $t > 0$ betrachtet. Die Information über die Vorgeschichte wird durch die Angabe der Anfangswerte von Kondensatorspannungen und Spulenströmen erfasst. Zusätzlich werden die Strom- bzw. Spannungsverläufe mit einer zeitlich abklingenden Exponentialfunktion multipliziert.
- Bei der dadurch entstehenden **Laplace-Transformation** ändern sich zwar die Integrale gegenüber der Fourier-Transformation, die prinzipielle Vorgehensweise bei der Analyse der Netzwerke bleibt aber unverändert.
- Die Transformation zwischen Zeit- und Frequenzbereich kann in vielen Fällen mithilfe von **Korrespondenztabellen** auf einfache Weise durchgeführt werden.
- Alternativ existieren eine Reihe von **Hilfssätzen** und mathematischen Vorgehensweisen, die die Lösung der Integrale vereinfachen.

COMPANION WEBSITE
Lösungen

Übungsaufgaben

Aufgabe 11.1 Sägezahnspannung an *RL*-Schaltung

Die Spannungsquelle in ▶Abb. 11.18 liefert die im rechten Teilbild dargestellte periodische Sägezahnspannung mit der Amplitude $\hat{u}$ und der Periodendauer T. Der Schalter wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen.

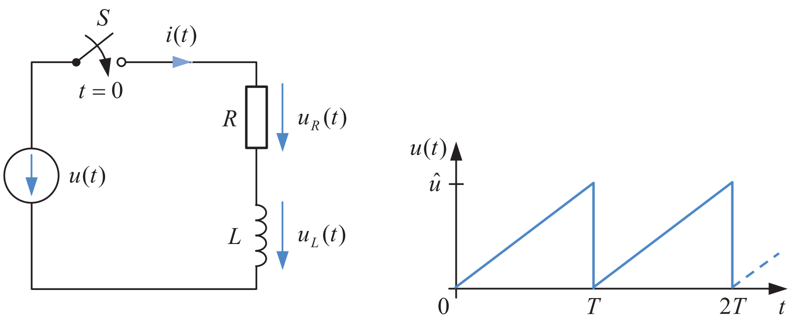


Abbildung 11.18: Sägezahnspannung an *RL*-Schaltung

1. Bestimmen Sie den Verlauf des Stromes $i(t)$ für den Zeitbereich $0 \le t \le 4T$. Stellen Sie den Zeitverlauf für $R = 10\ \Omega$, $L = 1$ mH, $\hat{u} = 10$ V und $T = 100$ µs dar.
2. Berechnen Sie den eingeschwungenen Zustand mithilfe der Fourier-Entwicklung und beurteilen Sie die beiden Lösungen.

Aufgabe 11.2 Nicht abgeglichener Spannungsteiler

Das Oszilloskop mit vorgeschaltetem Tastkopf nach ▶Abb. 11.19 wird zum Zeitpunkt $t = 0$ an eine Spannungsquelle mit dem in Abb. 11.19 dargestellten rechteckförmigen Zeitverlauf angeschlossen. In Kap. 8.4 wurden die Werte C_V und R_V berechnet, unter der Bedingung, dass die Spannung u_2 unabhängig von der Frequenz dem Wert u_1/n entspricht. In diesem Beispiel soll untersucht werden, welchen Spannungsverlauf das Oszilloskop anzeigt für den Fall, dass der Tastkopf nicht exakt abgeglichen ist.

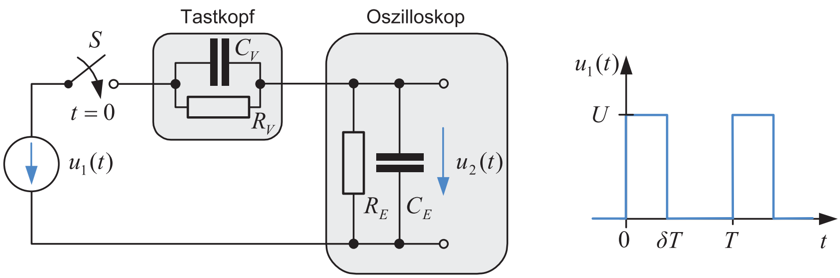


Abbildung 11.19: Oszilloskop mit Tastkopf

1. Berechnen Sie die Spannung $u_2(t)$ für den Zeitbereich $0 \le t \le T$.
2. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Spannung $u_2(t)$ dar. Dabei sollen folgende Werte gelten: $T = 100$ µs, $\delta = 0{,}5$, $n = 10$, $R_E = 1$ MΩ, $C_E = 10$ pF und $R_V = 9$ MΩ. Im abgeglichenen Zustand sollte der Kondensator C_V den Wert $C_E/9$ aufweisen. Für die Auswertung sollen die beiden um jeweils 10 % nach oben bzw. unten abweichenden Werte $C_{V1} = 1{,}1 C_E/9$ und $C_{V2} = 0{,}9 C_E/9$ verwendet werden.

Aufgabe 11.3 Transformator

Der Transformator in ▶Abb. 11.20 wird über einen Widerstand R_1 mit einer Spannungsquelle $u_0(t)$ verbunden, deren zeitlicher Spannungsverlauf auf der rechten Seite der Abbildung dargestellt ist.

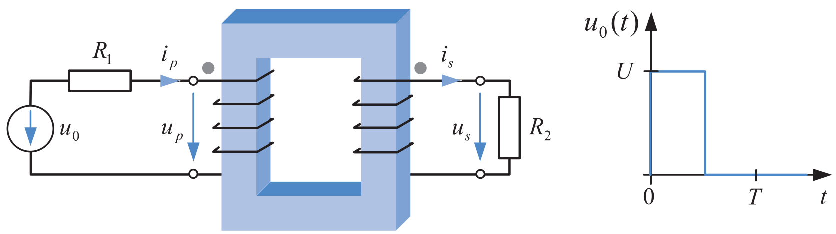


Abbildung 11.20: Transformator mit Rechteckimpuls am Eingang

1. Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Spannung $u_s(t)$ auf der Sekundärseite des Transformators.
2. Stellen Sie die Ausgangsspannung für den Zeitbereich $0 \le t \le 3T$ dar. Dabei sollen folgende Werte gelten: $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $L_{11} = L_{22} = 1$ mH und $T = 500$ µs. Als Koppelfaktor sollen die beiden Werte $k = 0{,}95$ und $k = 0{,}75$ verwendet werden.
3. Welchen Einfluss hat der Widerstand R_1? Stellen Sie die Ausgangsspannung für $k = 0{,}95$ bei den Werten $R_1 = 0{,}1\ \Omega$, $R_1 = 1\ \Omega$ und $R_1 = 10\ \Omega$ zum Vergleich dar.

Vektoren

A

ÜBERBLICK

In der Physik werden viele Größen durch Zahlenwert und Einheit vollständig beschrieben wie z.B. das Gewicht eines Körpers oder die Temperatur. Man spricht in diesem Fall von **skalaren** Größen. Daneben existieren **vektorielle** Größen, zu deren Beschreibung neben Zahlenwert und Einheit auch noch die Richtung benötigt wird. Betrachten wir z.B. die Bewegung eines Flugkörpers, dann besitzt dieser zu jedem Zeitpunkt nicht nur eine momentane Geschwindigkeit $v(t)$, sondern auch eine Bewegungsrichtung. Während die gerichteten Größen durch Vektoren dargestellt werden, erfolgt die Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge durch vektorielle Größengleichungen. Die gerichtete Strecke $\vec{\mathbf{s}}$ kann z.B. als das Produkt aus gerichteter Geschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}}$ und Zeit t berechnet werden

$$\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot t \,. \tag{A.1}$$

In einer vektoriellen Gleichung erfüllen Zahlenwerte, Einheiten und Richtung unabhängig voneinander die Gleichheitsbeziehung.

Zeichnerisch werden Vektoren durch Pfeile dargestellt, deren Richtung die Richtung des Vektors angibt und deren Länge den Betrag des Vektors beschreibt (▶Abb. A.1). Zwei Vektoren werden als gleich bezeichnet, wenn sowohl ihr Betrag, ihre Orientierung im Raum als auch ihr Durchlaufsinn gleich sind. In der Physik unterscheidet man zwischen **freien Vektoren** und **gebundenen Vektoren**. Bei freien Vektoren spielt die Position ihres Anfangspunktes keine Rolle, d.h. sie können frei im Raum verschoben werden. Zwei gleiche Vektoren können so durch paralleles Verschieben zur Deckung gebracht werden. Als Beispiel für die gebundenen Vektoren können die Feldvektoren angesehen werden, die z.B. Betrag und Richtung einer ortsabhängigen Feldstärke beschreiben und damit einer bestimmten Stelle im Raum zugeordnet sind. Bei gebundenen Vektoren können Betrag und Richtung in jedem Punkt des Raumes unterschiedlich sein.

Unter einem Vektor $-\vec{\mathbf{a}}$ versteht man einen Vektor mit dem gleichen Betrag wie $+\vec{\mathbf{a}}$, aber mit entgegengesetzter Richtung.

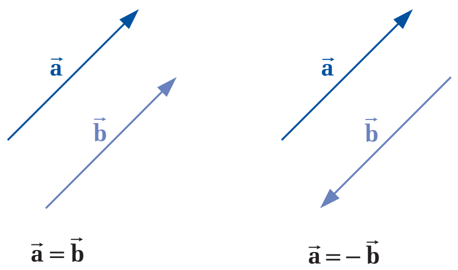


Abbildung A.1: Gleiche und entgegengesetzt gleiche Vektoren

In vielen Fällen werden unterschiedliche Vektoren benötigt, die aber den gleichen Angriffspunkt haben, z.B. kann man sich mehrere Vektoren vorstellen, die ausgehend von dem Ursprung eines Koordinatensystems zu verschiedenen Punkten im dreidimensionalen Raum zeigen. Diese Vektoren werden als **Ortsvektoren** bezeichnet.

A.1 Einheitsvektoren

Ein Vektor vom Betrag 1 wird Einheitsvektor genannt. Jeder Vektor kann als Produkt aus einem Betrag (seiner Länge) und einem in Richtung des Vektors zeigenden **Einheitsvektor** dargestellt werden

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{a}\, a = \vec{\mathbf{e}}_a\, a\,. \tag{A.2}$$

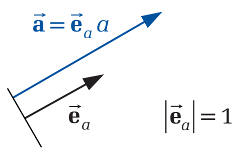


Abbildung A.2: Einheitsvektor

Den in Richtung eines Vektors $\vec{\mathbf{a}}$ zeigenden Einheitsvektor $\vec{\mathbf{e}}_a$ kann man nach Gl. (A.2) berechnen, indem man den Vektor durch seinen Betrag a dividiert.

A.2 Einfache Rechenoperationen mit Vektoren

A.2.1 Addition und Subtraktion von Vektoren

Zwei Vektoren werden addiert, indem man den zweiten Vektor parallel so verschiebt, dass sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt des ersten Vektors zusammenfällt. Der resultierende Vektor (Summenvektor) ist ein neuer Vektor, dessen Anfangspunkt mit dem Anfangspunkt des ersten Vektors und dessen Endpunkt mit dem Endpunkt des zweiten Vektors zusammenfällt.

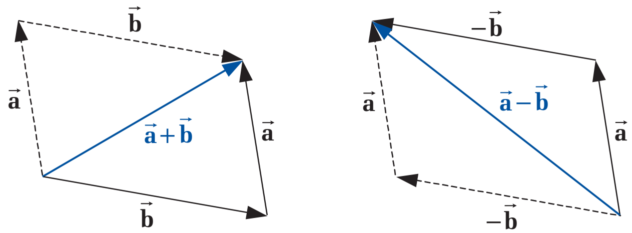


Abbildung A.3: Vektoraddition und -subtraktion

Aus der ▶Abb. A.3 ist unmittelbar zu erkennen, dass für die Vektoraddition das kommutative Gesetz gilt

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\,. \tag{A.3}$$

Zur Berechnung des Differenzvektors $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ bildet man zunächst den Vektor $-\vec{\mathbf{b}}$, indem man bei dem Vektor $\vec{\mathbf{b}}$ die Richtung umkehrt. Dieser neue Vektor wird dann zum Vektor $\vec{\mathbf{a}}$ gemäß der Vorschrift

$$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + \left(-\vec{\mathbf{b}}\right) \tag{A.4}$$

addiert (Abb. A.3).

A.2.2 Multiplikation von Vektor und Skalar

Bezeichnet man mit p eine positive reelle Zahl, dann versteht man unter dem Produkt $p\vec{\mathbf{a}}$ einen Vektor mit der gleichen Richtung wie $\vec{\mathbf{a}}$, dessen Länge $p|\vec{\mathbf{a}}| = pa$ sich aber um den Faktor p geändert hat. Handelt es sich bei p um eine negative reelle Zahl, dann versteht man unter dem Produkt $p\vec{\mathbf{a}}$ einen neuen Vektor der Länge $|p|a$, jetzt aber mit entgegengesetzter Richtung zu dem ursprünglichen Vektor $\vec{\mathbf{a}}$. Für den Sonderfall $p = 0$ erhält man aus dem Produkt $p\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$ den Nullvektor $\vec{\mathbf{0}}$ mit der Länge 0, dessen Richtung unbestimmt ist.

A.3 Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt $\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}}$ zweier Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ ist definiert als

$$\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}} \overset{(A.2)}{=} a\vec{\mathbf{e}}_a \bullet b\vec{\mathbf{e}}_b = ab\, \vec{\mathbf{e}}_a \bullet \vec{\mathbf{e}}_b = ab \cos\alpha\,, \tag{A.5}$$

wobei α den von den beiden Vektoren eingeschlossenen Winkel bezeichnet, sofern beide Vektoren an dem gleichen Anfangspunkt beginnen. Das Ergebnis dieser Berechnung ist ein Skalar. Der Winkel α liegt zwischen 0 und 180°, d.h. der Kosinus dieses Winkels ist eindeutig.

Die Länge $b\cos\alpha$ kann interpretiert werden als die Länge der Strecke, die man bei einer Projektion des Vektors $\vec{\mathbf{b}}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{\mathbf{a}}$ erhält.

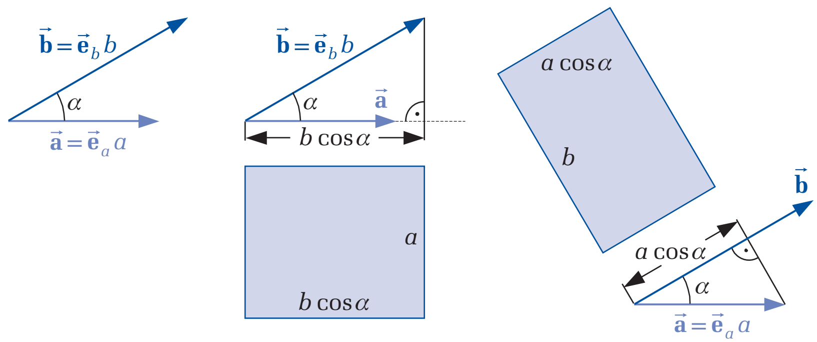


Abbildung A.4: Skalarprodukt

Das Skalarprodukt entspricht also dem Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen a und $b\cos\alpha$. Mit der gleichen Berechtigung kann auch der Vektor $\vec{\mathbf{a}}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{\mathbf{b}}$ projiziert werden. Das Produkt aus der Länge dieser Projektion $a\cos\alpha$ mit der Länge b ergibt wiederum ein Rechteck mit geändertem Seitenverhältnis, jedoch gleichem Flächeninhalt.

Aus der Beziehung (A.5) bzw. aus der ▶Abb. A.4 ist unmittelbar zu erkennen, dass das Skalarprodukt kommutativ ist

$$\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{a}}\,. \tag{A.6}$$

Für parallele bzw. senkrecht aufeinanderstehende Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ erhält man die Sonderfälle

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} &= ab & & \vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} &= 0 & \text{für} \quad & \vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} &= -ab & & \vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{b}}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Einige Anwendungen des Skalarproduktes werden in Kapitel C.1 beschrieben.

A.4 Das Vektorprodukt

Zur Beschreibung einiger physikalischer Zusammenhänge wie z.B. bei der Berechnung der Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter (vgl. Kap. 5.2) oder bei der Berechnung des Drehmomentes wird noch eine andere Verknüpfung von Vektoren benötigt, die als Vektorprodukt oder auch **Kreuzprodukt** bezeichnet wird.

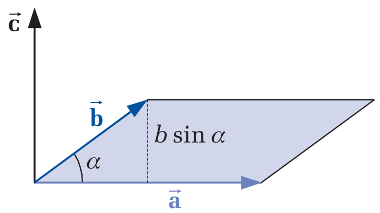


Abbildung A.5: Vektorprodukt

Das vektorielle Produkt $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$ der beiden Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ ist ein Vektor $\vec{\mathbf{c}}$, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ aufgespannten Ebene steht und dessen Richtung so festgelegt ist, dass die drei Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ ein Rechtssystem bilden. Beim Drehen des Vektors $\vec{\mathbf{a}}$ in Richtung des Vektors $\vec{\mathbf{b}}$ erfährt eine Rechtsschraube eine Vorwärtsbewegung in Richtung des Vektors $\vec{\mathbf{c}}$. Man kann sich diesen Zusammenhang auch auf einfache Weise mit den Fingern der rechten Hand veranschaulichen. Zeigt der Daumen in Richtung des Vektors $\vec{\mathbf{a}}$ und der Zeigefinger in Richtung des Vektors $\vec{\mathbf{b}}$, dann zeigt der senkrecht auf der von den beiden Fingern gebildeten Ebene stehende Mittelfinger in Richtung des Vektors $\vec{\mathbf{c}}$.

Als Betrag des Vektors $\vec{\mathbf{c}}$ definiert man das Produkt $ab\sin\alpha$, das gemäß ▶Abb. A.5 dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{c}} \qquad \text{mit} \qquad |\vec{\mathbf{c}}| = ab\sin\alpha\,. \tag{A.8}$$

Der zwischen den Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ eingeschlossene Winkel α liegt in dem Wertebereich $0 \le \alpha \le 180°$.

Wird der Vektor $\vec{\mathbf{b}}$ in Richtung des Vektors $\vec{\mathbf{a}}$ gedreht, dann zeigt die so entstehende Rechtsschraube in die entgegengesetzte Richtung, so dass allgemein

$$\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}} = -\left(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\right) \tag{A.9}$$

gilt. Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ.

Für parallele bzw. senkrecht aufeinanderstehende Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ gelten die beiden Sonderfälle

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} &= \vec{\mathbf{0}} \\ \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} &= \vec{\mathbf{e}}_c\, ab \end{aligned} \qquad \text{für} \qquad \begin{aligned} &\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}} \;\text{ und }\; \vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{b}} \\ &\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}}. \end{aligned} \tag{A.10}$$

A.5 Zerlegung eines Vektors in seine Komponenten

In der Abb. A.3 wurde ein Vektor durch Summation aus zwei anderen Vektoren berechnet. In diesem Abschnitt soll der umgekehrte Vorgang, nämlich die Zerlegung eines gegebenen Vektors in zwei oder mehr einzelne Vektoren, man spricht in diesem Zusammenhang von den Komponenten des Vektors, gezeigt werden. In der Praxis tritt häufig der Fall auf, dass die Richtungen der einzelnen Komponenten bereits vorgegeben sind, wobei üblicherweise die Einschränkung gilt, dass die Komponenten senkrecht aufeinanderstehen. Die einfachste Aufgabe ist beispielsweise die Zerlegung eines beliebigen Vektors in drei Komponenten, von denen jede parallel zu einer Achse des kartesischen Koordinatensystems verläuft (siehe Kap. B.1). Bezeichnet man mit $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x}$, $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}$, $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}$ die Einheitsvektoren in Richtung der entsprechenden Achsen x, y, z, dann besteht die Aufgabe bei der Zerlegung eines Vektors $\vec{\mathbf{a}}$ darin, die Längen der einzelnen Komponenten a_x, a_y, a_z so zu bestimmen, dass deren Summation wieder den ursprünglichen Vektor ergibt

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} a_\mathrm{x} + \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} a_\mathrm{y} + \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} a_\mathrm{z}\,. \tag{A.11}$$

Als Beispiel betrachten wir die in ▶Abb. A.6 dargestellte Zerlegung des in der xy-Ebene liegenden Vektors $\vec{\mathbf{a}}$ in die beiden Komponenten in Richtung der im Bild ebenfalls dargestellten Einheitsvektoren $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x}$ und $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}$.

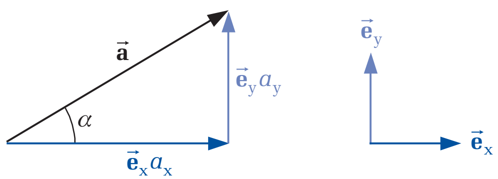


Abbildung A.6: Vektorzerlegung

Die Länge a_x entspricht offenbar der Projektion des Vektors $\vec{\mathbf{a}}$ auf die parallel zu $\vec{\mathbf{e}}_x$ verlaufende Linie. Mit dem in der Abbildung eingetragenen Winkel α ist diese Länge durch den Ausdruck $a\cos\alpha$ gegeben, den man mit der Definition des Skalarproduktes nach Gl. (A.5) in der folgenden Form schreiben kann

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{e}}_x \overset{(A.5)}{=} a\cos\alpha = a_x \quad \to \quad a_x = \vec{\mathbf{e}}_x\cdot\vec{\mathbf{a}}\,. \tag{A.12}$$

Die Komponente des Vektors $\vec{\mathbf{a}}$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{\mathbf{e}}_x$ kann nach ▶Abb. A.7 dargestellt werden als ein Produkt aus dem Einheitsvektor $\vec{\mathbf{e}}_x$ und der Länge a_x.

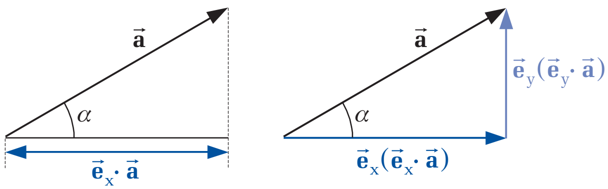


Abbildung A.7: Vektorzerlegung

Führt man diese Betrachtung für alle drei Komponenten durch, dann kann die Vektorzerlegung in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{e}}_x a_x + \vec{\mathbf{e}}_y a_y + \vec{\mathbf{e}}_z a_z = \vec{\mathbf{e}}_x\left(\vec{\mathbf{e}}_x\cdot\vec{\mathbf{a}}\right) + \vec{\mathbf{e}}_y\left(\vec{\mathbf{e}}_y\cdot\vec{\mathbf{a}}\right) + \vec{\mathbf{e}}_z\left(\vec{\mathbf{e}}_z\cdot\vec{\mathbf{a}}\right). \tag{A.13}$$

A.6 Vektorbeziehungen in Komponentendarstellung

In diesem Abschnitt sollen die bisher angegebenen Beziehungen nochmals mithilfe der Komponentenzerlegung (A.11) formuliert werden.

$$\vec{\mathbf{a}} \pm \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{e}}_x\left(a_x \pm b_x\right) + \vec{\mathbf{e}}_y\left(a_y \pm b_y\right) + \vec{\mathbf{e}}_z\left(a_z \pm b_z\right) \tag{A.14}$$

$$p\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{e}}_x p a_x + \vec{\mathbf{e}}_y p a_y + \vec{\mathbf{e}}_z p a_z \tag{A.15}$$

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = \left(\vec{\mathbf{e}}_x a_x + \vec{\mathbf{e}}_y a_y + \vec{\mathbf{e}}_z a_z\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{e}}_x b_x + \vec{\mathbf{e}}_y b_y + \vec{\mathbf{e}}_z b_z\right) \overset{(A.7)}{=} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,. \tag{A.16}$$

Für den Sonderfall zweier gleicher Vektoren folgt aus Gl. (A.16)

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}} = \left|\vec{\mathbf{a}}\right|^2 = a^2 = a_x^{\;2} + a_y^{\;2} + a_z^{\;2} \quad \to \quad a = \sqrt{a_x^{\;2} + a_y^{\;2} + a_z^{\;2}}\,. \tag{A.17}$$

Vorsicht: Aus der Gleichung $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}$ folgt im Allgemeinen nicht $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{c}}$. Da es sich beim Skalarprodukt (A.16) um eine Summation der Produkte aus den einzelnen Komponenten handelt, darf $\vec{\mathbf{a}}$ nicht gekürzt werden.

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} &= \left(\vec{\mathbf{e}}_x a_x + \vec{\mathbf{e}}_y a_y + \vec{\mathbf{e}}_z a_z\right)\times\left(\vec{\mathbf{e}}_x b_x + \vec{\mathbf{e}}_y b_y + \vec{\mathbf{e}}_z b_z\right) \\
&= a_x b_x \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{e}}_x\right)}_{\vec{\mathbf{0}}} + a_y b_x \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_y \times \vec{\mathbf{e}}_x\right)}_{-\vec{\mathbf{e}}_z} + a_z b_x \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_x\right)}_{\vec{\mathbf{e}}_y} \\
&\quad + a_x b_y \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{e}}_y\right)}_{\vec{\mathbf{e}}_z} + a_y b_y \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_y \times \vec{\mathbf{e}}_y\right)}_{\vec{\mathbf{0}}} + a_z b_y \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_y\right)}_{-\vec{\mathbf{e}}_x} \\
&\quad + a_x b_z \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{e}}_z\right)}_{-\vec{\mathbf{e}}_y} + a_y b_z \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_y \times \vec{\mathbf{e}}_z\right)}_{\vec{\mathbf{e}}_x} + a_z b_z \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_z\right)}_{\vec{\mathbf{0}}} \\
&= \vec{\mathbf{e}}_x \left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \vec{\mathbf{e}}_y \left(a_z b_x - a_x b_z\right) + \vec{\mathbf{e}}_z \left(a_x b_y - a_y b_x\right)
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

A.7 Formeln zur Vektorrechnung

Nachstehend sind einige Beziehungen angegeben, die (falls bisher nicht abgeleitet) mithilfe der Komponentenzerlegung leicht überprüft werden können.

Distributivität:

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\left(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}\right) = \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}} \tag{A.19}$$

$$\vec{\mathbf{a}}\times\left(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}\right) = \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}} \tag{A.20}$$

Assoziativität bezüglich der Multiplikation mit einer Zahl:

$$p\left(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}\right) = \left(p\vec{\mathbf{a}}\right)\cdot\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}\cdot\left(p\vec{\mathbf{b}}\right) \tag{A.21}$$

$$p\left(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right) = \left(p\vec{\mathbf{a}}\right)\times\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}\times\left(p\vec{\mathbf{b}}\right) \tag{A.22}$$

Mehrfache Produkte:

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\left(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}\right) = \vec{\mathbf{c}}\cdot\left(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right) = \vec{\mathbf{b}}\cdot\left(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{a}}\right) \tag{A.23}$$

$$\vec{\mathbf{a}}\times\left(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}\right) = \vec{\mathbf{b}}\left(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}\right)-\vec{\mathbf{c}}\left(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}\right) \tag{A.24}$$

$$\left(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{d}}\right) = \left(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}\right)\left(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{d}}\right) - \left(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{d}}\right)\left(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}}\right) \tag{A.25}$$

$$\left(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right)^2 = \left(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right) = a^2b^2 - \left(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}\right)^2 \tag{A.26}$$

Orthogonale Koordinatensysteme

B

ÜBERBLICK

Die Position eines Punktes P im dreidimensionalen Raum bezogen auf einen anderen willkürlich gewählten Bezugspunkt Q kann mithilfe eines von Q nach P zeigenden Vektors eindeutig gekennzeichnet werden. Eine vollständige mathematische Beschreibung dieses Vektors kann durch Angabe der Koordinaten von Anfangspunkt Q und Endpunkt P erfolgen. Unter den Koordinaten eines Punktes versteht man Zahlenwerte zur Festlegung seiner Position im Raum. Alternativ zu diesen Koordinaten kann der Vektor auch durch die Angabe seiner drei Komponenten eindeutig beschrieben werden. Diese werden üblicherweise so gewählt, dass sie senkrecht aufeinanderstehen, man spricht dann davon, dass diese Komponenten zueinander **orthogonal** sind.

Sowohl zur Angabe der Koordinatenwerte als auch bei der Zerlegung des Vektors in seine Komponenten bedient man sich der Koordinatensysteme. Es erweist sich in der Praxis als sehr zweckmäßig, ein der jeweiligen Problemstellung angepasstes Koordinatensystem zu verwenden. Bei den in den folgenden Abschnitten betrachteten drei Fällen, nämlich den kartesischen Koordinaten, den Zylinderkoordinaten und den Kugelkoordinaten handelt es sich um orthogonale Rechtssysteme, d.h. die in Richtung wachsender Koordinatenwerte weisenden Einheitsvektoren $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$ stehen senkrecht aufeinander und erfüllen somit die Bedingung der **Orthogonalität**

$$\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\mathbf{e}}_3 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 = 0 \,. \tag{B.1}$$

Bei einem Rechtssystem liefert das Vektorprodukt zweier aufeinander folgender Einheitsvektoren den jeweils nächsten Einheitsvektor, so dass die nachstehenden Gleichungen gelten:

$$\vec{\mathbf{e}}_1 \times \vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_3 \,, \quad \vec{\mathbf{e}}_2 \times \vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\mathbf{e}}_1 \,, \quad \vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_2 \,. \tag{B.2}$$

B.1 Das kartesische Koordinatensystem

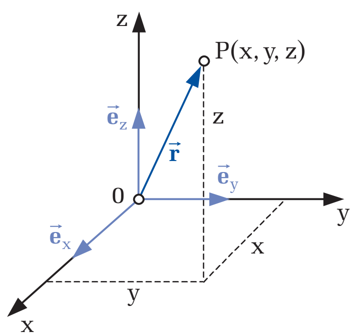


Abbildung B.1: Das kartesische Koordinatensystem

Den einfachsten Fall stellt das kartesische Koordinatensystem dar, bei dem die als x-, y- und z-Achse bezeichneten geradlinigen Koordinatenachsen zueinander orthogonal sind. Ihr gemeinsamer Schnittpunkt wird als Koordinatenursprung bzw. direkt als Ursprung bezeichnet. Die Richtung wachsender Koordinatenwerte wird für die Achsen so festgelegt, dass die Einheitsvektoren $\vec{\mathbf{e}}_x$, $\vec{\mathbf{e}}_y$, $\vec{\mathbf{e}}_z$, die jeweils parallel zu den durch den betreffenden Index gekennzeichneten Koordinatenachsen verlaufen, im Sinne der Gl. (B.2) ein Rechtssystem bilden. Dreht man die positive x-Achse auf dem kürzesten Weg in Richtung der positiven y-Achse, d.h. gegen den Uhrzeigersinn, dann erhält man bei gleichzeitiger Verschiebung in Richtung der positiven z-Achse eine Rechtsschraube.

Eine Besonderheit beim kartesischen Koordinatensystem besteht darin, dass die Richtung der Einheitsvektoren aufgrund der geradlinigen Koordinaten x, y, z konstant, d.h. unabhängig von deren Position im Raum ist.

Als Koordinatenflächen erhält man die drei orthogonal zueinander angeordneten Ebenen $x = \text{const}$ (entspricht der y-z-Ebene), $y = \text{const}$ (entspricht der x-z-Ebene) und $z = \text{const}$ (entspricht der x-y-Ebene).

Der Raumpunkt P wird bezogen auf den Koordinatenursprung 0 durch den **Ortsvektor** $\vec{\mathbf{r}}$ der Länge $r = |\vec{\mathbf{r}}|$ beschrieben

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{e}}_x x + \vec{\mathbf{e}}_y y + \vec{\mathbf{e}}_z z \qquad \text{mit} \qquad r = |\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{B.3}$$

Die differentielle Änderung des Ortsvektors $d\vec{\mathbf{r}}$ beim Fortschreiten vom Punkt P(x,y,z) um die elementaren Strecken dx, dy, dz in Richtung der gleichnamigen Koordinaten

$$d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{e}}_x dx + \vec{\mathbf{e}}_y dy + \vec{\mathbf{e}}_z dz \tag{B.4}$$

wird vektorielles Wegelement genannt. Seine Länge ist durch die Beziehung

$$|d\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \tag{B.5}$$

gegeben.

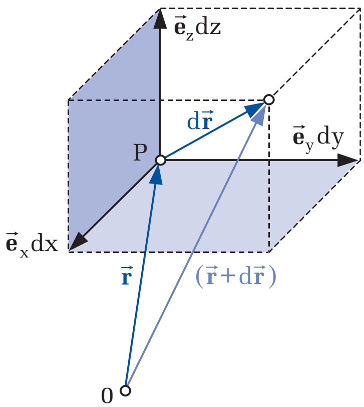


Abbildung B.2: Vektorielles Wegelement

B.2 Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme

Bevor wir die Zylinder- und Kugelkoordinaten behandeln, sollen einige allgemein gültige Zusammenhänge für krummlinige orthogonale Koordinatensysteme u_1, u_2, u_3 abgeleitet werden. Diese sind durch die im Allgemeinen bekannten Definitionsgleichungen

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \qquad y = y(u_1, u_2, u_3), \qquad z = z(u_1, u_2, u_3) \tag{B.6}$$

mit den kartesischen Koordinaten verknüpft.

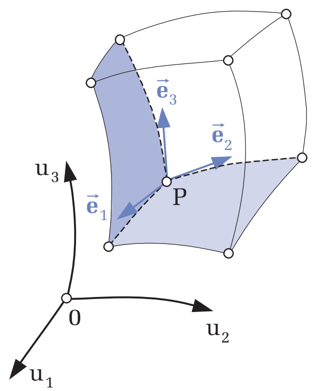


Abbildung B.3: Krummlinige Koordinaten

Das in ▶Abb. B.3 dargestellte Volumen wird durch die sechs beliebig geformten Koordinatenflächen begrenzt, auf denen jeweils eine der Koordinaten u_i mit $i = 1,2,3$ konstant ist. Die Einheitsvektoren $\vec{\mathbf{e}}_i$, die die Gleichungen (B.1) und (B.2) erfüllen, zeigen in Richtung der Tangenten, die an die durch den Raumpunkt $P(u_1,u_2,u_3)$ des Ortsvektors $\vec{\mathbf{r}}$ verlaufenden Koordinaten u_i gelegt werden. Die Richtung dieser Tangenten und damit auch die Richtung der Einheitsvektoren ist durch die Änderung des Ortsvektors $\partial\vec{\mathbf{r}}/\partial u_i$ nach der jeweiligen Koordinate u_i gegeben[1]. Normiert man diesen Ausdruck auf seinen Betrag $|\partial\vec{\mathbf{r}}/\partial u_i|$, dann lässt sich die folgende Darstellung für die Einheitsvektoren angeben

$$\vec{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_i}\right|}\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_i} \qquad \text{mit} \qquad h_i = \left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_i}\right|. \tag{B.7}$$

1 Unter dem Ausdruck $\partial\vec{\mathbf{r}}/\partial u_i$ wird die partielle Ableitung, d.h. die Änderungsgeschwindigkeit des Ortsvektors $\vec{\mathbf{r}}(u_1,u_2,u_3)$ nach u_1 bzw. u_2 oder u_3 verstanden, wobei die jeweils anderen beiden Koordinaten konstant gehalten werden. Betrachten wir als Beispiel den Fall $i = 2$, dann gilt

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u_2} = \lim_{\Delta u_2\to 0}\frac{\vec{\mathbf{r}}(u_1,u_2+\Delta u_2,u_3)-\vec{\mathbf{r}}(u_1,u_2,u_3)}{\Delta u_2}.$$

Entsprechend Gl. (B.7) hängt also die Richtung der Einheitsvektoren im allgemeinen Fall von den Koordinaten (u_1,u_2,u_3), d.h. von der Lage des Raumpunktes P ab. Die als metrische Faktoren bezeichneten Werte $h_i(u_1,u_2,u_3)$ findet man mithilfe der Definitionsgleichungen (B.6) aus

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u_i}\right)^2 \overset{(B.3)}{=} \left(\vec{\mathbf{e}}_x \frac{\partial x}{\partial u_i} + \vec{\mathbf{e}}_y \frac{\partial y}{\partial u_i} + \vec{\mathbf{e}}_z \frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2 \tag{B.8}$$

beziehungsweise

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2} \,. \tag{B.9}$$

Bildet man nun das totale Differential $d\vec{\mathbf{r}}$ des Ortsvektors $\vec{\mathbf{r}}$, das einer Änderung der Koordinatenwerte u_1, u_2, u_3 um du_1, du_2, du_3 entspricht, dann erhält man unter Einbeziehung der Gl. (B.7) das folgende Ergebnis (▶Abb. B.4)

$$d\vec{\mathbf{r}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u_3} du_3 \overset{(B.7)}{=} \vec{\mathbf{e}}_1 h_1 \, du_1 + \vec{\mathbf{e}}_2 h_2 \, du_2 + \vec{\mathbf{e}}_3 h_3 \, du_3 \,. \tag{B.10}$$

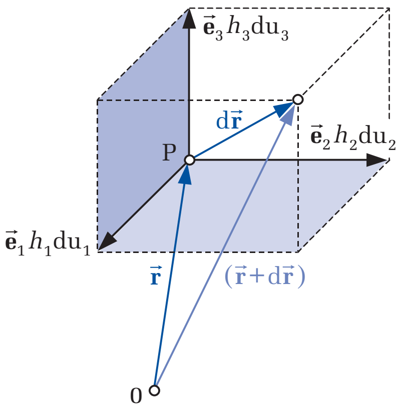


Abbildung B.4: Vektorielles Wegelement in krummlinigen Koordinaten

Für den Betrag des vektoriellen Wegelementes gilt mit Gl. (A.17) die Beziehung

$$|d\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2} \,. \tag{B.11}$$

Das elementare Volumenelement erhält man durch Multiplikation der Seitenlängen gemäß Abb. B.4

$$dV = h_1 h_2 h_3 \, du_1 du_2 du_3 \,. \tag{B.12}$$

B.3 Die Zylinderkoordinaten

Beim Übergang von kartesischen Koordinaten zu Zylinderkoordinaten bleibt die z-Koordinate unverändert, während die Position eines Punktes P(x,y) in einer Ebene $z = \text{const}$ jetzt durch die beiden in ▶Abb. B.5 eingetragenen Koordinaten ρ und φ beschrieben wird. Die Koordinate ρ kennzeichnet den Abstand des Punktes von der z-Achse, der Winkel φ wird definitionsgemäß beginnend bei der positiven x-Achse entgegen dem Uhrzeigersinn gezählt. Der positiven x-Achse ist der Wert $\varphi = 0$ zugeordnet, der negativen x-Achse der Wert $\varphi = \pi$. Die Definitionsgleichungen (B.6) für die Koordinaten des Kreiszylinders ($u_1 = \rho$, $u_2 = \varphi$, $u_3 = z$) können unmittelbar der Abb. B.5 entnommen werden

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi & & 0 \le \rho < \infty \\ y &= \rho\sin\varphi & \quad \text{mit} \quad & 0 \le \varphi < 2\pi \\ z &= z\,. & & \end{aligned} \tag{B.13}$$

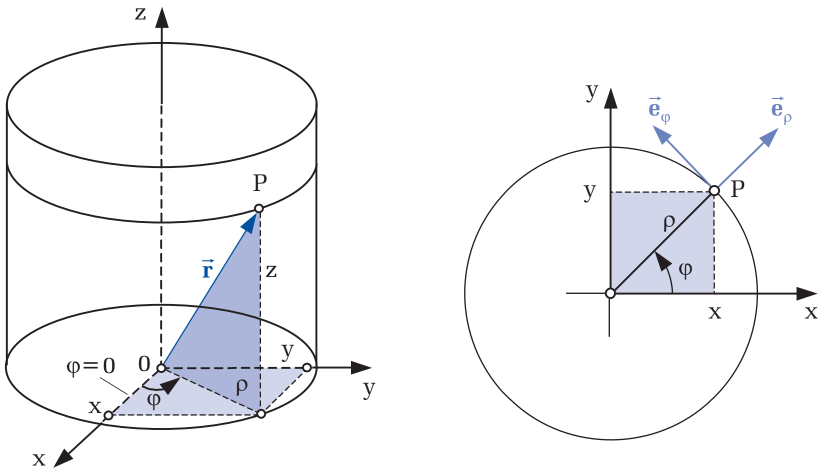


Abbildung B.5: Zylinderkoordinaten

Die metrischen Faktoren können durch Einsetzen der Definitionsgleichungen (B.13) in die Gl. (B.9) berechnet werden

$$\begin{aligned} h_1 &= h_\rho = 1 \\ h_2 &= h_\varphi = \rho \\ h_3 &= h_z = 1\,. \end{aligned} \tag{B.14}$$

Für das vektorielle Wegelement folgt unmittelbar mit Gl. (B.10)

$$d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{e}}_\rho d\rho + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \rho d\varphi + \vec{\mathbf{e}}_z dz \tag{B.15}$$

und für das Volumenelement mit Gl. (B.12)

$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz\,. \tag{B.16}$$

Mit dem Ortsvektor (B.3)

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{e}}_x \rho \cos\varphi + \vec{\mathbf{e}}_y \rho \sin\varphi + \vec{\mathbf{e}}_z z \tag{B.17}$$

und den metrischen Faktoren (B.14) werden aus Gl. (B.7) die Einheitsvektoren bestimmt

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{e}}_1 &= \vec{\mathbf{e}}_\rho = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \rho} = \vec{\mathbf{e}}_x \cos\varphi + \vec{\mathbf{e}}_y \sin\varphi \\ \vec{\mathbf{e}}_2 &= \vec{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\rho\,\partial \varphi} = -\vec{\mathbf{e}}_x \sin\varphi + \vec{\mathbf{e}}_y \cos\varphi \\ \vec{\mathbf{e}}_3 &= \vec{\mathbf{e}}_z \,. \end{aligned} \tag{B.18}$$

Ein Vergleich der Beziehungen (B.17) und (B.18) zeigt, dass der Ortsvektor in Zylinderkoordinaten die nachstehende Form annimmt

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{e}}_\rho \rho + \vec{\mathbf{e}}_z z \,. \tag{B.19}$$

B.4 Die Kugelkoordinaten

Bei den Kugelkoordinaten ($u_1 = r$, $u_2 = \vartheta$, $u_3 = \varphi$) beschreibt die erste Koordinate r den Abstand eines Punktes $P(r,\vartheta,\varphi)$ vom Ursprung. Die Koordinatenfläche $r = \text{const}$ entspricht einer konzentrisch um den Ursprung liegenden Kugelfläche. Der Winkel ϑ wird von der positiven z-Achse und dem vom Ursprung zum Punkt P zeigenden Ortsvektor eingeschlossen. Er wird definitionsgemäß beginnend bei der positiven z-Achse gezählt und durchläuft den Wertebereich $0 \le \vartheta \le \pi$. Der positiven z-Achse ist der Wert $\vartheta = 0$ zugeordnet, der negativen z-Achse der Wert $\vartheta = \pi$. Alle Punkte auf der Kugel mit gleichem Wert ϑ liegen auf einem Breitenkreis, z.B. gilt für alle Punkte auf dem Äquator $\vartheta = \pi/2$. Die Koordinate φ ist identisch mit der entsprechenden Koordinate im Zylinderkoordinatensystem.

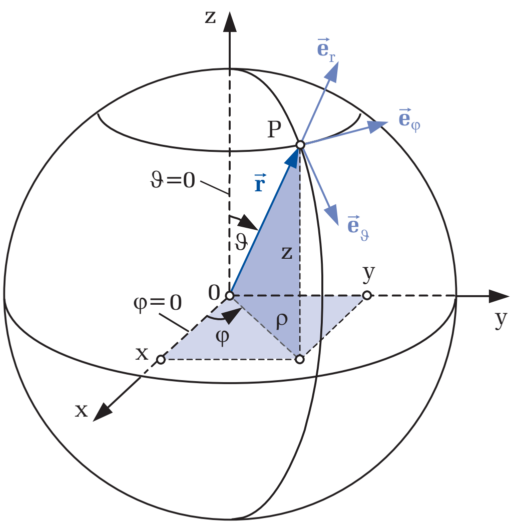


Abbildung B.6: Kugelkoordinaten

Ein Punkt $P(r,\vartheta,\varphi)$ auf der Kugeloberfläche hat die z-Koordinate $z = r\cos\vartheta$ und den Abstand $\rho = r\sin\vartheta$ von der z-Achse. Setzt man diesen Abstand in die Gl. (B.13) ein, dann stellt man fest, dass die Kugelkoordinaten mit den kartesischen Koordinaten über die Definitionsgleichungen (B.6) in der Form

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi & & 0 \le r < \infty \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi & \quad\text{mit}\quad & 0 \le \vartheta \le \pi \\ z &= r\cos\vartheta & & 0 \le \varphi < 2\pi \end{aligned} \tag{B.20}$$

verknüpft sind. Die metrischen Faktoren können durch Einsetzen der Definitionsgleichungen (B.20) in die Gl. (B.9) berechnet werden

$$\begin{aligned} h_1 &= h_r &&= 1 \\ h_2 &= h_\vartheta &&= r \\ h_3 &= h_\varphi &&= r\sin\vartheta\,. \end{aligned} \tag{B.21}$$

Für das vektorielle Wegelement folgt unmittelbar mit Gl. (B.10)

$$d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{e}}_r\,dr + \vec{\mathbf{e}}_\vartheta\,r\,d\vartheta + \vec{\mathbf{e}}_\varphi\,r\sin\vartheta\,d\varphi \tag{B.22}$$

und für das Volumenelement mit Gl. (B.12)

$$dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi\,. \tag{B.23}$$

Mit dem Ortsvektor (B.3)

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{e}}_x\,r\sin\vartheta\cos\varphi + \vec{\mathbf{e}}_y\,r\sin\vartheta\sin\varphi + \vec{\mathbf{e}}_z\,r\cos\vartheta \tag{B.24}$$

und den metrischen Faktoren (B.21) werden aus Gl. (B.7) die Einheitsvektoren bestimmt

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{e}}_1 &= \vec{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial r} = \vec{\mathbf{e}}_x\sin\vartheta\cos\varphi + \vec{\mathbf{e}}_y\sin\vartheta\sin\varphi + \vec{\mathbf{e}}_z\cos\vartheta \\ \vec{\mathbf{e}}_2 &= \vec{\mathbf{e}}_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\vartheta} = \vec{\mathbf{e}}_x\cos\vartheta\cos\varphi + \vec{\mathbf{e}}_y\cos\vartheta\sin\varphi - \vec{\mathbf{e}}_z\sin\vartheta \\ \vec{\mathbf{e}}_3 &= \vec{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = -\vec{\mathbf{e}}_x\sin\varphi + \vec{\mathbf{e}}_y\cos\varphi\,. \end{aligned} \tag{B.25}$$

Durch Vergleich der Beziehung (B.24) mit der 1. Zeile in Gl. (B.25) erkennt man direkt den einfachen Zusammenhang für den Ortsvektor in Kugelkoordinaten

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{e}}_r\,r\,. \tag{B.26}$$

Ergänzungen zur Integralrechnung

ÜBERBLICK

C

In diesem Kapitel soll nicht die Integralrechnung wiederholt werden, da vorausgesetzt werden kann, dass der Leser mit diesem Thema hinreichend vertraut ist. Allerdings werden wir feststellen, dass die Lösung elektrotechnischer Fragestellungen mithilfe der Felder sehr oft auf Ausdrücke der Form

$$\int_C \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathrm{P_A}}^{\mathrm{P_B}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \qquad \text{oder} \qquad \oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \tag{C.1}$$

bzw.

$$\iint_A \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \qquad \text{oder} \qquad \oiint_A \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \tag{C.2}$$

führt. Das erste Integral, das sich entlang einer Kontur C, z.B. von einem Anfangspunkt $\mathrm{P_A}$ bis zu einem Endpunkt $\mathrm{P_B}$ erstreckt, wird als **Linienintegral** oder Kurvenintegral bezeichnet. Handelt es sich bei dem Integrationsweg C um eine geschlossene Kontur, d.h. Anfangs- und Endpunkt fallen zusammen ($\mathrm{P_A} = \mathrm{P_B}$), dann wird das Integralzeichen mit einem Ring dargestellt und das Linienintegral wird als **Ringintegral** bezeichnet.

Handelt es sich bei dem Flächenintegral (C.2) um eine geschlossene Fläche A, dann bezeichnen wir diese als Hüllfläche, das Integral wird wieder mit einem Ring dargestellt und als **Hüllflächenintegral** bezeichnet.

C.1 Das Linienintegral einer vektoriellen Größe

Zur Berechnung des Linienintegrals einer Funktion von z.B. zwei Veränderlichen $f(\mathrm{x,y})$ entlang eines zwischen den Endpunkten $\mathrm{P_A}$ und $\mathrm{P_B}$ liegenden Kurvenbogens der Kontur C wird der Kurvenbogen in n Teilstücke Δs_i mit $i = 1 \ldots n$ zerlegt. Auf jedem Teilstück wird ein Punkt P_i mit den Koordinaten $\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i$ ausgewählt.

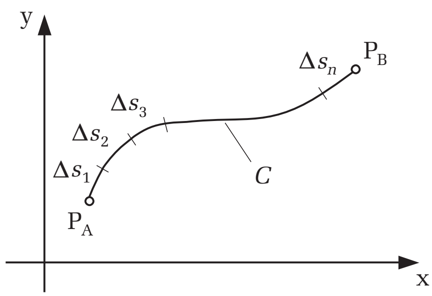


Abbildung C.1: Berechnung des Linienintegrals

Summiert man die Produkte aus den in den Punkten P_i vorliegenden Funktionswerten $f(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)$ mit den Bogenlängen Δs_i, dann erhält man einen Näherungswert für das zu berechnende Integral

$$\int_{\mathrm{P_A}}^{\mathrm{P_B}} f(\mathrm{x,y})\,\mathrm{d}s \approx \sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\,\Delta s_i \,. \tag{C.3}$$

Die Abweichung der endlichen Summe von dem Wert des Integrals wird umso geringer, je feiner die Unterteilung der Kontur C gewählt wird. Lässt man die Anzahl der Teilstücke n nach Unendlich gehen, wobei gleichzeitig $\Delta s_i \to 0$ für alle i gelten soll, dann nähert sich die Summe einem Grenzwert (vorausgesetzt der Grenzwert existiert und ist von der Wahl der Bogenlängen Δs_i und den Punkten P_i unabhängig), den man als das zwischen den Punkten $\mathrm{P_A}$ und $\mathrm{P_B}$ entlang der Kontur C gebildete Linienintegral bezeichnet

$$\int_{\mathrm{P_A}}^{\mathrm{P_B}} f(\mathrm{x,y})\,\mathrm{d}s = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\,\Delta s_i \,. \tag{C.4}$$

Bei dem bisherigen Beispiel haben wir eine skalare Funktion $f(\mathrm{x,y})$ integriert. Häufig tritt aber der Fall auf, dass eine beliebig gerichtete vektorielle Größe $\vec{\mathbf{E}}(\mathrm{x,y,z})$ entlang eines jetzt ebenfalls gerichteten Wegelementes $\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$ zu integrieren ist. Der einzige Unterschied gegenüber der Gl. (C.4) besteht darin, dass zunächst das Skalarprodukt $\vec{\mathbf{E}}\bullet\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$ für jeden elementaren Wegabschnitt zu berechnen ist. Praktisch bedeutet das, dass wir an jeder Stelle des Integrationsweges die Projektion des Vektors $\vec{\mathbf{E}}$ auf die Richtung des Wegelementes $\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$ bilden, oder anders ausgedrückt, wir integrieren nur jeweils die tangential zum Wegelement verlaufende Komponente des Vektors $\vec{\mathbf{E}}$.

Betrachten wir die Vorgehensweise noch einmal im Detail. Der zwischen den Punkten $\mathrm{P_A}$ und $\mathrm{P_B}$ verlaufende Weg wird entsprechend ▶Abb. C.2 in n vektorielle Wegelemente $\Delta\vec{\mathbf{s}}_i$ mit $i = 1 \ldots n$ unterteilt. Auf jedem tangential zum Integrationsweg verlaufenden Wegelement wird wieder ein Punkt P_i mit den Koordinaten x_i, y_i, z_i gewählt, in dem die vektorielle Größe den Wert $\vec{\mathbf{E}}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i,\mathrm{z}_i)$ aufweist und mit dem Wegelement $\Delta\vec{\mathbf{s}}_i$ den Winkel α_i einschließt.

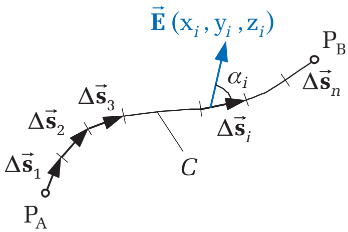


Abbildung C.2: Linienintegral einer vektoriellen Größe

Für jedes Wegelement kann das Skalarprodukt

$$\vec{\mathbf{E}}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i,\mathrm{z}_i)\bullet\Delta\vec{\mathbf{s}}_i = \left|\vec{\mathbf{E}}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i,\mathrm{z}_i)\right|\left|\Delta\vec{\mathbf{s}}_i\right|\cos(\alpha_i) \tag{C.5}$$

bestimmt werden. Analog zur Gl. (C.3) liefert die Summation der Beiträge (C.5) von $i = 1$ bis $i = n$ einen Näherungswert für das Integral

$$\int_{\mathrm{P_A}}^{\mathrm{P_B}} \vec{\mathbf{E}}\bullet\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \approx \sum_{i=1}^{n}\left|\vec{\mathbf{E}}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i,\mathrm{z}_i)\right|\left|\Delta\vec{\mathbf{s}}_i\right|\cos(\alpha_i)\,. \tag{C.6}$$

Der Grenzwert für $\Delta\vec{\mathbf{s}}_i \to \vec{\mathbf{0}}$ bzw. $n \to \infty$ liefert dann wieder das exakte Ergebnis

$$\int\limits_{P_A}^{P_B} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{\mathbf{E}}(x_i, y_i, z_i)\right| \left|\Delta\vec{\mathbf{s}}_i\right| \cos(\alpha_i)\,. \tag{C.7}$$

Zum besseren Verständnis betrachten wir ein einfaches Beispiel aus der Physik. Eine kleine Kugel rollt, von einer Laufrille geführt, auf einem halbkreisförmigen Bogen vom Anfangspunkt P_A zum Endpunkt P_B. Gleichzeitig wirkt auf die Kugel eine ortsunabhängige Kraft $\vec{\mathbf{F}}$ in Richtung der Verbindungslinie der beiden Punkte P_A und P_B (▶Abb. C.3). Wir wollen die Frage untersuchen, welche Arbeit an der Kugel infolge der Kraft $\vec{\mathbf{F}}$ verrichtet wird.

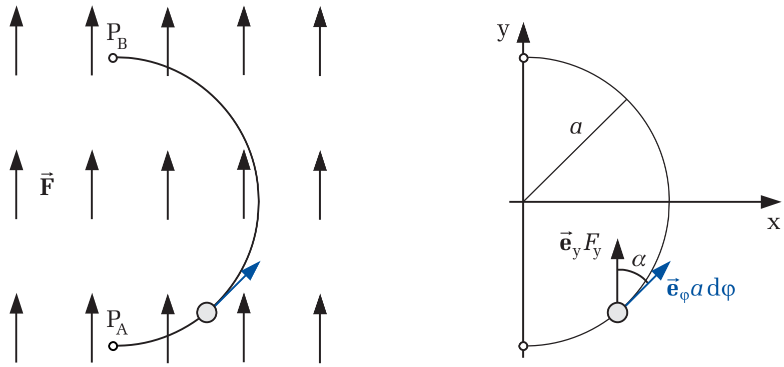


Abbildung C.3: Bewegungsvorgang im Kraftfeld

Zur Beschreibung des Bewegungsvorgangs wählen wir das zylindrische Koordinatensystem mit dem Ursprung im Mittelpunkt des Kreises. Die Kugel bewegt sich in Richtung wachsender φ-Werte auf einem Halbkreis mit konstantem Radius $\rho = a$. Die vorgegebene Kraft lässt sich am einfachsten mit einer kartesischen Komponente $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{e}}_y F_y$ beschreiben. An jeder Stelle auf dem Halbkreis ist der Winkel α zwischen der Bewegungsrichtung $\vec{\mathbf{e}}_\varphi$ und der Kraftrichtung $\vec{\mathbf{e}}_y$ bekannt. Um die von $\vec{\mathbf{F}}$ längs des Kreisbogens geleistete Arbeit W zu bestimmen, muss die Kraft in zwei Komponenten zerlegt werden, eine Komponente in Richtung der Bewegung $\vec{\mathbf{e}}_\varphi$ und eine weitere senkrecht dazu in Richtung $\vec{\mathbf{e}}_\rho$. Da nur die in Richtung der Bewegung wirkende Kraftkomponente einen Beitrag zur Arbeit leistet, benötigen wir das Skalarprodukt aus der vektoriellen Kraft und dem gerichteten Wegelement, dessen Integration vom Anfangspunkt P_A bis zum Endpunkt P_B mit Gl. (C.7) das nachstehende Ergebnis liefert

$$\begin{aligned} W &= \int\limits_{P_A}^{P_B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{\mathbf{e}}_y F_y \cdot \vec{\mathbf{e}}_\varphi a\,d\varphi \\ &= aF_y \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_\rho \sin\varphi + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \cos\varphi\right)}_{\vec{\mathbf{e}}_y} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\varphi\,d\varphi = aF_y \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi = 2aF_y\,. \end{aligned} \tag{C.8}$$

C.2 Der Fluss eines Vektorfeldes

In diesem Abschnitt soll die Bedeutung der Flächenintegrale (C.2) untersucht werden. Zum leichteren Verständnis betrachten wir auch hier wieder ein Beispiel aus der Physik.

In einem räumlich ausgedehnten Bereich bewegt sich Wasserdampf mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{e}}_x v_x$ in Richtung der willkürlich gewählten Koordinate x. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Wassermoleküle mit einer konstanten Dichte im Volumen verteilt sind. Befinden sich M Moleküle in einem Volumen von 1 m^3, dann ist die Dichte durch das Verhältnis $\eta = M/\text{m}^3$ gegeben. Wir wollen jetzt die Frage beantworten, wie viele Moleküle pro Zeiteinheit eine vorgegebene Fläche A in einer vorgegebenen Richtung durchströmen. Die Fläche stellen wir uns durch einen dünnen Rechteckrahmen der Seitenlängen a und h begrenzt vor, den wir unter einem Winkel α bezogen auf die Bewegungsrichtung der Moleküle in den strömenden Wasserdampf halten.

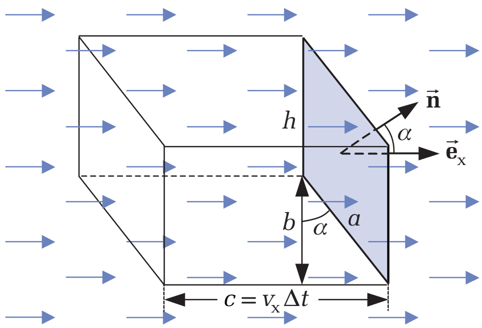


Abbildung C.4: Fluss durch eine ebene Fläche

In einem Zeitintervall Δt legen die Moleküle eine Strecke $c = v_x \Delta t$ zurück. Die von dem Rahmen begrenzte Fläche wird in dem Zeitintervall von allen Molekülen durchströmt, die sich in dem dargestellten Prisma befinden. Die Anzahl m der in dem Prisma enthaltenen Moleküle ist aus dem Produkt der Moleküldichte mit dem Volumen des Prismas (Produkt aus Grundfläche bc und Höhe h) gegeben

$$m = \eta V = \eta hbc = \eta h(a\cos\alpha)(v_x \Delta t) = \eta v_x A\cos\alpha\ \Delta t\,. \tag{C.9}$$

Die Anzahl m der die Fläche durchströmenden Moleküle ist erwartungsgemäß proportional zu dem betrachteten Zeitintervall Δt. Das konstante Verhältnis $m/\Delta t$, das die Summe der Moleküle angibt, die pro Zeiteinheit die Fläche A durchströmen, bezeichnen wir als Fluss Ψ

$$\Psi = \frac{m}{\Delta t} = \eta v_x A\cos\alpha\,. \tag{C.10}$$

Das in Gl. (C.10) enthaltene Produkt $v_x \cos\alpha$ ist aber nach Gl. (A.5) darstellbar als Skalarprodukt aus dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{e}}_x v_x$ mit einem Einheitsvektor, wir wollen ihn mit $\vec{\mathbf{n}}$ bezeichnen, der mit $\vec{\mathbf{v}}$ den Winkel α einschließt. Dreht man die beiden den Winkel α einschließenden Strecken a und b in ihrer Ebene um 90°, dann ist aus der ▶Abb. C.4 unmittelbar zu erkennen, dass die Strecke b parallel zu $\vec{\mathbf{e}}_x$ und die Strecke a parallel zu $\vec{\mathbf{n}}$ verläuft. Der Einheitsvektor $\vec{\mathbf{n}}$ steht somit senkrecht auf der Fläche A und wird allgemein als **Flächennormale** bezeichnet. Er zeigt in die Richtung, in die der Fluss die Fläche durchströmt. Die Gl. (C.10) kann mit dem Skalarprodukt in der Form

$$\Psi = \eta v_x A \vec{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{n}} = \eta \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}} A \tag{C.11}$$

dargestellt werden. Den Ausdruck $\vec{\mathbf{n}}A$ fasst man zusammen zu einer vektoriellen (gerichteten) Fläche $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{n}}A$, deren Betrag dem Flächeninhalt A entspricht und deren Richtung $\vec{\mathbf{n}}$ senkrecht auf der Fläche steht. Zusammengefasst erhält man den Fluss aus dem Skalarprodukt einer vektoriellen Größe $\vec{\mathbf{B}} = \eta\vec{\mathbf{v}}$ mit einer vektoriellen Fläche $\vec{\mathbf{A}}$. Den zur Abkürzung eingeführten Vektor $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{e}}_x \eta v_x$ bezeichnet man als Flussdichte (Fluss pro Fläche).

In dem bisher betrachteten Fall sind wir von einer homogenen Flussdichte ausgegangen. Sowohl die Geschwindigkeit der Wassermoleküle als auch ihre Dichte waren ortsunabhängig. Als zusätzlicher Sonderfall war die Fläche eben, d.h. auch die Flächennormale $\vec{\mathbf{n}}$ zeigte unabhängig von der Position auf der Fläche immer in die gleiche Richtung. Wir wollen die Aufgabenstellung jetzt dahingehend erweitern, dass wir den Fluss durch eine gekrümmte Fläche berechnen, wobei gleichzeitig die Flussdichte ortsabhängig sein soll (▶Abb. C.5).

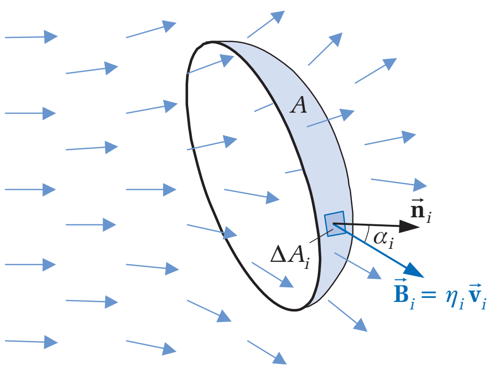


Abbildung C.5: Fluss durch eine gekrümmte Fläche

In einem ersten Schritt wird die Fläche A in elementare Flächenelemente ΔA_i mit $i = 1 \dots n$ unterteilt, die so klein gewählt werden, dass ihre Krümmung zu vernachlässigen ist. Damit kann jedem Flächenelement eindeutig eine Flächennormale $\vec{\mathbf{n}}_i$ zugeordnet werden, die senkrecht auf ΔA_i steht. Mit der Festlegung einer Richtung, in der die Fläche von dem Fluss durchströmt wird, d.h. der Fluss wird in dieser Richtung positiv gezählt, ist auch die Richtung von $\vec{\mathbf{n}}_i$ eindeutig festgelegt[1]. Wählt man auf jedem Flächenelement einen Punkt P_i, in dem die Flussdichte den Wert $\vec{\mathbf{B}}_i$ aufweist, und nimmt man weiterhin an, dass die Flussdichte überall auf dem elementaren Flächenelement ΔA_i den gleichen konstanten Wert $\vec{\mathbf{B}}_i$ besitzt, dann kann der von dem Flächenelement ΔA_i gelieferte elementare Beitrag zum Fluss analog zu der Situation in Abb. C.4 aus dem Skalarprodukt $\Delta\Psi_i = \vec{\mathbf{B}}_i \bullet \Delta\vec{\mathbf{A}}_i$ berechnet werden. Eine Näherungslösung für den gesamten Fluss Ψ durch die Fläche A erhält man durch Summation dieser Beiträge über alle Flächenelemente

$$\Psi \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta\Psi_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{B}}_i \bullet \Delta\vec{\mathbf{A}}_i \; . \tag{C.12}$$

Die Abweichung der endlichen Summe von dem gesuchten Wert wird umso geringer, je feiner die Unterteilung der Fläche A gewählt wird. Lässt man die Anzahl der Teilflächen n nach Unendlich gehen, wobei gleichzeitig $\Delta A_i \to 0$ für alle i gelten soll, dann nähert sich die Summe einem Grenzwert, den man als das über die Fläche A gebildete Oberflächenintegral bezeichnet und das dem Fluss durch diese Fläche entspricht

$$\Psi = \iint_A \vec{\mathbf{B}} \bullet \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \lim_{\substack{\Delta A_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{B}}_i \bullet \Delta\vec{\mathbf{A}}_i \; . \tag{C.13}$$

Wir betrachten noch zwei Sonderfälle zu dieser Gleichung, bei denen der Rechenaufwand etwas geringer wird:

- Sind die beiden Vektoren $\vec{\mathbf{B}}$ und $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$ überall gleich gerichtet (parallel), dann ist der eingeschlossene Winkel α Null und es gilt die vereinfachte Beziehung:

$$\Psi = \iint_A B \,\mathrm{d}A \; . \tag{C.14}$$

- Ist zusätzlich B überall auf A konstant, dann gilt

$$\Psi = B \iint_A \mathrm{d}A = B\,A \, . \tag{C.15}$$

  Die Integration geht dann in eine einfache Multiplikation der Flussdichte B mit dem Flächeninhalt A über.

1 In vielen Fällen wird der Fluss berechnet, der aus einem Volumen heraustritt, d.h. die Oberfläche des Volumens wird von dem Fluss *nach außen* durchsetzt. Die Flächennormale zeigt dann ebenfalls *nach außen*.

Physikalische Grundbegriffe

D

ÜBERBLICK

D.1 Physikalische Größen

Jede physikalische Größe ist gekennzeichnet durch eine Quantität (**Zahlenwert** bzw. Vielfaches einer Einheit) und eine Qualität (**Einheit** bzw. Dimension).

Beispiel: $l = 18{,}3$ m Zahlenwert = 18,3 Einheit = m

Zur besonderen Kennzeichnung der Einheit wird die eckige Klammer verwendet.

Beispiel: $[l]$ = m bedeutet: die Einheit der Länge l ist Meter.

Die zulässigen Einheiten und ihre Definitionen sind gesetzlich geregelt. Seit 1960 wird das international vereinbarte System der **SI-Basiseinheiten** (SI = Système International d'Unités) verwendet.

Tabelle D.1

SI-Einheiten

Basisgröße	Basiseinheit	
	Name	Zeichen
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
el. Stromstärke	Ampère	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Die als MKSA-System (Meter-Kilogramm-Sekunde-Ampère) bezeichneten ersten vier Basisgrößen reichen zur Beschreibung der mechanischen und elektromagnetischen Vorgänge aus. Bei der Festlegung physikalischer Größen als Basisgrößen muss darauf geachtet werden, dass sie alle voneinander unabhängig sind. Ist die eine aus den anderen ableitbar, dann kann sie keine Basisgröße sein. Zusätzlich muss das Basissystem vollständig sein, d.h. alle weiteren physikalischen Größen müssen sich aus den Basisgrößen zusammensetzen.

Aus den Basiseinheiten lassen sich durch Multiplikation, Division und Potenzierung **abgeleitete Einheiten** bilden, die ihrerseits einen eigenen Namen bzw. ein eigenes Zeichen besitzen können.

Beispiele

[Ladung] = Coulomb mit 1 C = 1 As

[Kraft] = Newton mit 1 N = 1 kg·m/s^2

Die **Dimension** einer Größe gibt den Zusammenhang zwischen der betreffenden Größe und den Basisgrößen an. Für die Dimension der Geschwindigkeit (= Weg/Zeit) gilt demnach dim $v = \dim (l \cdot t^{-1}) = \text{m/s}$. Die Bezeichnungen l und t sind die vereinbarten Symbole für Länge und Zeit.

Tabelle D.2

Beispiele für physikalische Größen und ihre Einheiten

Physikalische Größe mit Bezeichnung		Name der SI-Einheit und zugehörige Abkürzung		Definitionen und Umrechnungen
Kraft	F	Newton	(N)	1 N = 1 kg m/s^2 = 1 VAs/m
Energie	W	Joule	(J)	1 J = 1 Nm = 1 Ws = 1 VAs
Leistung	P	Watt	(W)	1 W = 1 Nm/s = 1 VA
Frequenz	f	Hertz	(Hz)	1 Hz = 1/s
Spannung	U	Volt	(V)	1 V = 1 W/A
Widerstand	R	Ohm	(Ω)	1 Ω = 1 V/A = 1 W/A^2
Ladung	Q	Coulomb	(C)	1 C = 1 As
Elektrische Feldstärke	E	---		1 V/m = 1 W/(Am)
Elektrische Flussdichte	D	---		1 C/m^2 = 1 As/m^2
Kapazität	C	Farad	(F)	1 F = 1 C/V = 1 As/V
Magnetischer Fluss	Φ	Weber	(Wb)	1 Wb = 1 Vs
Magnetische Flussdichte	B	Tesla	(T)	1 T = 1 Wb/m^2 = 1 Vs/m^2
Magnetische Feldstärke	H	---		1 A/m
Induktivität	L	Henry	(H)	1 H = 1 Wb/A = 1 Vs/A

Eine abgeleitete Einheit heißt **kohärent** (zusammenhängend), wenn sie mit dem Faktor 1 aus den Basiseinheiten gebildet wird. Die inkohärenten Einheiten (z.B. 1 PS = 75 kp m/s = 735,49875 W) sind nicht Bestandteil der SI-Einheiten, d.h. im SI-Einheitensystem ergeben sich alle abgeleiteten Einheiten ausschließlich durch Multiplikation und Division ohne zusätzliche Zahlenfaktoren aus den Basiseinheiten.

Neben den SI-Einheiten existieren aber auch noch einige andere Einheiten, deren Verwendung in speziellen Gebieten zweckmäßig ist und deren Zusammenhang mit den SI-Einheiten auf experimentellem Wege ermittelt und daher nicht durch einen einfachen Zahlenwert angegeben werden kann. Als Beispiel seien das Elektronenvolt (eV) und die atomare Masse-Einheit (u) genannt.

Ein **Elektronenvolt** eV entspricht der kinetischen Energie, die ein Elektron beim Durchlaufen einer Potentialdifferenz von 1 V im Vakuum gewinnt

$$1\,\mathrm{eV} = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}\,. \tag{D.1}$$

Die **atomare Masse-Einheit** u wird angegeben in kg und entspricht 1/12 der Masse eines Kohlenstoffisotops ^{12}C

$$1\,\mathrm{u} = 1{,}66057 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\,. \tag{D.2}$$

Zur Kennzeichnung der Masse eines Atoms m_A verwendet man die relative Atommasse A_r, die z.B. für Kupfer $A_r = 63{,}54$ beträgt und die dem mittleren Massewert des natürlichen Isotopengemischs von Kupfer entspricht. Für die mittlere Masse eines Kupferatoms erhält man den Wert

$$m_A = A_r \cdot \mathrm{u} = 1{,}055 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}\,. \tag{D.3}$$

Ist der Zahlenwert einer physikalischen Größe unpraktisch groß oder klein, so kann eine Zehnerpotenz der Einheit verwendet werden, so dass die Zahlenwerte zwischen 0,1 und 1000 liegen. Dies wird durch die folgenden Vorsätze gekennzeichnet:

Tabelle D.3

Umrechnungsfaktoren

Potenz	Name	Zeichen	Potenz	Name	Zeichen
10^{15}	Peta	P	10^{-3}	Milli	m
10^{12}	Tera	T	10^{-6}	Mikro	µ
10^{9}	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{6}	Mega	M	10^{-12}	Piko	p
10^{3}	Kilo	k	10^{-15}	Femto	f

Unter Berücksichtigung des in der Tabelle nicht enthaltenen Faktors $10^0 = 1$ entsprechen die Abstufungen zwischen jeweils zwei benachbarten Vorsätzen dem Faktor 10^3. Von den früher verwendeten zusätzlichen Vorfaktoren 10^2 (Hekto), 10^1 (Deka), 10^{-1} (Dezi) und 10^{-2} (Zenti) wird nur noch der Faktor 10^{-2} bei der Länge (Zentimeter) benutzt[1]. Eine Besonderheit bildet die SI-Basiseinheit Kilogramm (kg). Die Vorsätze werden nicht auf kg, sondern auf die Einheit Gramm (g) angewendet. Beispielsweise werden 10^{-3} g als mg und nicht als µkg bezeichnet.

D.2 Physikalische Gleichungen

D.2.1 Größengleichungen

Physikalische Gesetze und Definitionen werden durch **Größengleichungen** ausgedrückt.

Beispiele

Grundgesetz der Mechanik:

Kraft = Masse · Beschleunigung ↔ $F = m \cdot a$

Definition der Geschwindigkeit:

Geschwindigkeit = zeitliche Ableitung des Weges ↔ $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$

Definition der Beschleunigung:

Beschleunigung = zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit ↔ $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$

Die in den Größengleichungen auftretenden Formelzeichen können verschiedene Werte (Zahlenwert · Einheit) annehmen. Die Größengleichungen gelten daher unabhängig von der gewählten Einheit. In diesen Gleichungen werden die Einheiten genauso wie algebraische Größen behandelt.

Beispiel

Bei einer konstanten Geschwindigkeit $v = 25$ m/s kann der in $t = 400$ s zurückgelegte Weg s berechnet werden: $s = v \cdot t = 25$ m/s · 400 s = 10 000 m = 10 km.

Genauso kann mit den Einheiten km und h und den entsprechenden Zahlenwerten gerechnet werden, ohne dass die Gleichung $s = v \cdot t$ ihre Gültigkeit verliert.

Die Einheit der berechneten Größe (des Weges im vorstehenden Beispiel) ergibt sich automatisch als Folge der eingesetzten Einheiten bei den gegebenen Größen (Geschwindigkeit und Zeit).

1 Bei der kombinierten Schreibweise von Einheiten und Vorsätzen beziehen sich die Exponenten immer auf den gesamten Ausdruck, z.B. bedeutet $\mu s^2 = (\mu s)^2$ oder $km^2 = (km)^2$ und nicht $\mu(s)^2$ bzw. $k(m)^2$.

D.2.2 Zugeschnittene Größengleichungen

Gelegentlich werden auch **zugeschnittene Größengleichungen** verwendet, in denen jede Größe durch die ihr zugeordnete Einheit dividiert auftritt. Als Beispiel sei die in Kap. 2.6 abgeleitete Beziehung für den Gleichstromwiderstand R eines Kupferrunddrahtes

$$R = \frac{\rho_R \, l}{\pi \, a^2} \tag{D.4}$$

der Länge l und des Radius a betrachtet. Mit dem spezifischen Widerstand von Kupfer

$$\rho_R = 0{,}0178 \, \frac{\Omega \, \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \tag{D.5}$$

nach Tabelle 2.1 und mit dem Drahtdurchmesser $d = 2a$ lässt sich die Gleichung zur Berechnung des Widerstandes unmittelbar auf den in der Praxis üblichen Fall zuschneiden, bei dem der Durchmesser des Kupferdrahtes in mm angegeben wird

$$R = \frac{\rho_R \, l}{\pi \, a^2} = \frac{0{,}0178}{\pi} \frac{l}{(d/2)^2} \frac{\Omega \, \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} = 22{,}66 \cdot 10^{-3} \, \Omega \frac{l/\mathrm{m}}{(d/\mathrm{mm})^2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{R}{\mathrm{m}\Omega} = 22{,}66 \cdot \frac{l/\mathrm{m}}{(d/\mathrm{mm})^2} \,. \tag{D.6}$$

Als Ergebnis liefert diese Gleichung den Widerstand direkt in Milliohm, wenn die Länge l in Meter und der Drahtdurchmesser d in Millimeter eingesetzt werden. Betrachten wir ein einfaches Beispiel. Für einen 5 m langen Kupferdraht mit einem Durchmesser von 1 mm lässt sich der ohmsche Widerstand auf etwa 113 mΩ abschätzen. Die Gleichung behält ihre Gültigkeit aber auch für den Fall, dass andere Einheiten verwendet werden, sofern die entsprechenden Umrechnungen zwischen den Einheiten berücksichtigt werden.

Komplexe Zahlen

ÜBERBLICK

E

Die Berechnung der Wechselstromschaltungen kann zwar mit den zeitabhängigen Strom- und Spannungsverläufen durchgeführt werden, die wiederholte Anwendung der Additionstheoreme ist jedoch sehr mühsam. Demgegenüber stellt die symbolische Rechnung eine wesentlich elegantere Vorgehensweise mit deutlich reduziertem Aufwand dar (vgl. Beispiel 8.2). Bei dieser Methode wird jede zeitabhängige Größe durch einen so genannten komplexen Zeiger symbolisiert. Darunter versteht man eine gerichtete, mit einer Pfeilspitze versehene Strecke von dem Koordinatenursprung zu einem durch eine komplexe Zahl festgelegten Punkt in der komplexen Ebene. Die symbolische Methode basiert also auf der Anwendung der komplexen Rechnung. In diesem Kapitel werden daher die Bezeichnungen und die Rechenregeln für die komplexen Zahlen den Erfordernissen des Kapitels 8 entsprechend in komprimierter Form zusammengestellt.

E.1 Bezeichnungen

Eine komplexe Zahl[1] $\underline{z} = x + \mathrm{j}\,y$ besteht aus einem Realteil x und einem Imaginärteil y. Die reellen Zahlen x und y heißen kartesische Koordinaten von $\underline{z}$. Um Verwechslungen mit dem Momentanwert des Stromes i zu vermeiden, wird in der Elektrotechnik der Buchstabe j als imaginäre Einheit verwendet

$$\mathrm{j} = +\sqrt{-1} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{j}^2 = -1. \tag{E.1}$$

Die komplexen Zahlen werden in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, der so genannten komplexen Ebene – auch als Gauss'sche Zahlenebene bezeichnet – dargestellt. Der Realteil wird entlang der reellen Achse von links nach rechts und der Imaginärteil mit j als Einheit entlang der imaginären Achse von unten nach oben aufgetragen. Der komplexen Zahl wird der Punkt mit den Koordinaten (x, y) oder der in ▶Abb. E.1 eingezeichnete Zeiger vom Ursprung zum Punkt $\underline{z}$ zugeordnet.

Zwei komplexe Zahlen $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j}\,y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + \mathrm{j}\,y_2$ sind dann und nur dann gleich, wenn sowohl die Realteile als auch die Imaginärteile gleich sind. Aus $\underline{z}_1 = \underline{z}_2$ folgt $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.

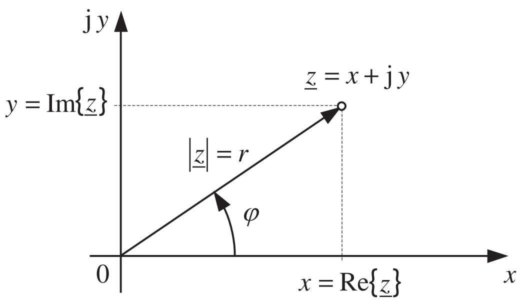


Abbildung E.1: Komplexe Zahlenebene

1 Die komplexen Zahlen werden durch einen untergesetzten Strich gekennzeichnet.

Die Zerlegung von $\underline{z}$ in einen Real- und einen Imaginärteil ist völlig analog zur Zerlegung eines Vektors $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{e}}_x a_x + \vec{\mathbf{e}}_y a_y$ in seine beiden kartesischen Komponenten a_x und a_y. So wie der Vektor auch in den Koordinaten des Kreiszylinders dargestellt werden kann, so kann auch der Punkt $\underline{z}$ in der komplexen Ebene durch seine Polarkoordinaten r (Länge des Zeigers) und φ (Winkel zwischen dem Zeiger und der reellen Achse) beschrieben werden. Aus der Abb. E.1 können folgende Zusammenhänge für die Umrechnungen zwischen den beiden Darstellungen abgelesen werden

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \tag{E.2}$$

beziehungsweise

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{mit} \quad r \geq 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \tag{E.3}$$

Bei der Berechnung des Argumentes φ ist die Periodizität der tan-Funktion mit π zu beachten. Für den zwischen 0 und 2π gelegenen Winkel treten die folgenden Fallunterscheidungen auf:

$$\begin{aligned}
&x < 0, \quad \varphi = \pi + \arctan y/x \\
&x = 0, \quad \varphi = \begin{cases} \pi/2 & \text{für} \quad y > 0 \\ 3\pi/2 & \phantom{\text{für}} \quad y < 0 \end{cases} \\
&x > 0, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan y/x & \text{für} \quad y > 0 \\ 2\pi + \arctan y/x & \phantom{\text{für}} \quad y < 0\,. \end{cases}
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Die aus dieser Umrechnung resultierende trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl

$$\underline{z} = r\cos\varphi + \mathrm{j}\,r\sin\varphi \tag{E.5}$$

kann mit Hilfe der **Euler'schen Formel**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi \tag{E.6}$$

auch in der Exponentialform geschrieben werden

$$\underline{z} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}. \tag{E.7}$$

Aus den Beziehungen (E.5) und (E.7) folgen mit $r = 1$ unmittelbar die Sonderfälle

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi} = 1, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} = \mathrm{j}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} = -1, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}3\pi/2} = -\mathrm{j}. \tag{E.8}$$

In der Gl. (E.5) ist der Winkel φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Wegen $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi} = 1$ kann jede komplexe Zahl $\underline{z} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ auch in der Form

$$\underline{z} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi + k2\pi)} = r\left[\cos(\varphi + k2\pi) + \mathrm{j}\sin(\varphi + k2\pi)\right] \quad \text{mit} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{E.9}$$

geschrieben werden.

Zwei komplexe Zahlen heißen zueinander **konjugiert komplex**, wenn sie sich nur durch das Vorzeichen ihres Imaginärteils unterscheiden. In der Gauss'schen Zahlenebene findet man die konjugiert komplexe Zahl durch Spiegelung der komplexen Zahl an der reellen Achse. Zur Kennzeichnung einer konjugiert komplexen Zahl wird ein hochgestellter Stern verwendet

$$\begin{aligned} \underline{z} &= x + \mathrm{j}y = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \\ \underline{z}^* &= x - \mathrm{j}y = r(\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi) = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\,. \end{aligned} \tag{E.10}$$

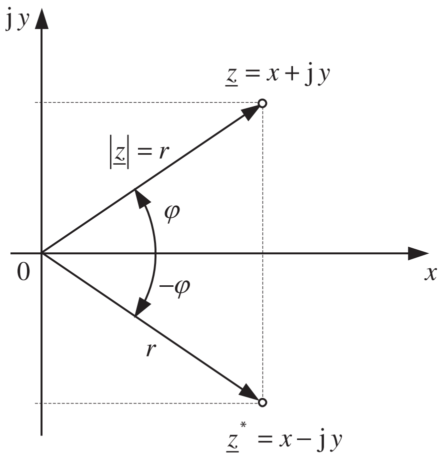


Abbildung E.2: Konjugiert komplexe Zahlen

Fassen wir die Bezeichnungen noch einmal zusammen:

Merke

$x = \mathrm{Re}\{\underline{z}\}$	**Realteil** von $\underline{z}$
$y = \mathrm{Im}\{\underline{z}\}$	**Imaginärteil** von $\underline{z}$
$r = \lvert\underline{z}\rvert$	**Betrag** von $\underline{z}$ (Länge des Zeigers)
$\varphi = \arg\{\underline{z}\}$	**Argument** von $\underline{z}$
$\underline{z} = x + \mathrm{j}y$	algebraische Darstellung (Normalform)
$\underline{z} = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$	trigonometrische Darstellung
$\underline{z} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$	Exponentialdarstellung

E.2 Rechenoperationen

Bei der **Addition** bzw. **Subtraktion** von komplexen Zahlen werden die Real- und Imaginärteile addiert bzw. subtrahiert. Mit $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j}\,y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + \mathrm{j}\,y_2$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 + \underline{z}_2 &= x_1 + x_2 + \mathrm{j}(y_1 + y_2) \\ \underline{z}_1 - \underline{z}_2 &= x_1 - x_2 + \mathrm{j}(y_1 - y_2)\,. \end{aligned} \tag{E.11}$$

Die Zeiger werden geometrisch addiert bzw. subtrahiert, analog zur Vorgehensweise bei den Vektoren.

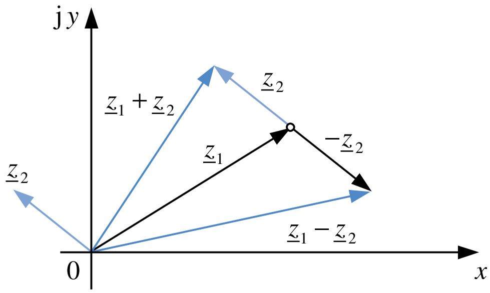


Abbildung E.3: Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Die **Multiplikation** zweier komplexer Zahlen $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j}y_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}$ und $\underline{z}_2 = x_2 + \mathrm{j}y_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$ liefert mit der algebraischen Darstellung das Ergebnis

$$\underline{z}_1\underline{z}_2 = (x_1 + \mathrm{j}\,y_1)(x_2 + \mathrm{j}\,y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{j}(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{E.12}$$

Die Multiplikation der komplexen Zahlen in der Exponentialdarstellung

$$\underline{z}_1\,\underline{z}_2 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}\,r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = r_1r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] \tag{E.13}$$

lässt erkennen, dass die Beträge multipliziert und die Winkel addiert werden.

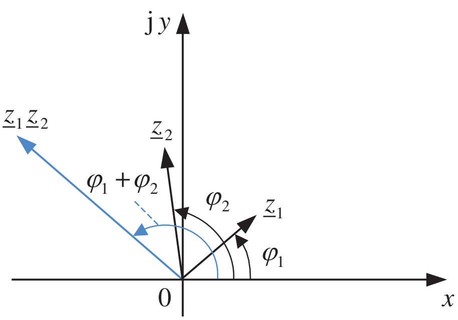


Abbildung E.4: Multiplikation komplexer Zahlen

Für das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen gilt

$$\underline{z}\,\underline{z}^* = (x + \mathrm{j}\,y)(x - \mathrm{j}\,y) = x^2 + y^2 = |\underline{z}|^2 = r^2. \tag{E.14}$$

Bei der **Division** zweier in algebraischer Darstellung vorliegender komplexer Zahlen $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j}\,y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + \mathrm{j}\,y_2$ wird der Bruch mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners erweitert, so dass für Real- und Imaginärteil des Quotienten das Ergebnis

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{x_1 + \mathrm{j}\,y_1}{x_2 + \mathrm{j}\,y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{j}\,y_1)(x_2 - \mathrm{j}\,y_2)}{(x_2 + \mathrm{j}\,y_2)(x_2 - \mathrm{j}\,y_2)} = \frac{1}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}\left[x_1 x_2 + y_1 y_2 + \mathrm{j}(x_2 y_1 - x_1 y_2)\right] \quad (E.15)$$

folgt. Als Sonderfall dieser Gleichung ergibt sich der Kehrwert einer komplexen Zahl zu

$$\frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{x + \mathrm{j}\,y} = \frac{x - \mathrm{j}\,y}{(x + \mathrm{j}\,y)(x - \mathrm{j}\,y)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{j}\frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (E.16)$$

Mit $x = 0$ und $y = 1$ folgt aus dieser Gleichung unmittelbar

$$\frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}. \quad (E.17)$$

Ausgehend von der Exponentialdarstellung stellt man fest, dass die Beträge dividiert und die Winkel subtrahiert werden

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]. \quad (E.18)$$

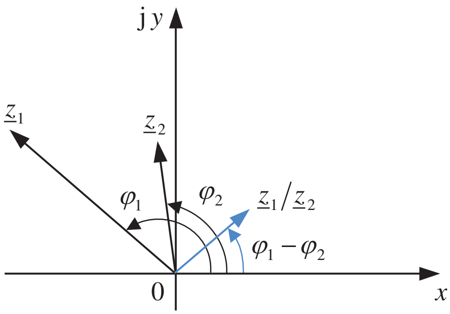


Abbildung E.5: Division komplexer Zahlen

Bei der symbolischen Rechnung hat die Multiplikation mit j bzw. die Division durch j eine besondere Bedeutung. Für die Multiplikation folgt aus der Gl. (E.13) unmittelbar

$$\mathrm{j}\,\underline{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}\,r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi + \pi/2)}, \quad (E.19)$$

d.h. der Zeiger $\underline{z}$ wird um den Winkel $\pi/2$ in mathematisch positiver Richtung (Gegenuhrzeigersinn) gedreht. Die Division durch j (= Multiplikation mit –j) bedeutet eine Drehung des Zeiger $\underline{z}$ um den Winkel $-\pi/2$, d.h. in mathematisch negativer Richtung (Uhrzeigersinn).

Merke

Multiplikation mit j bedeutet Drehung um $\pi/2$.

Division durch j bzw. Multiplikation mit –j bedeutet Drehung um $-\pi/2$.

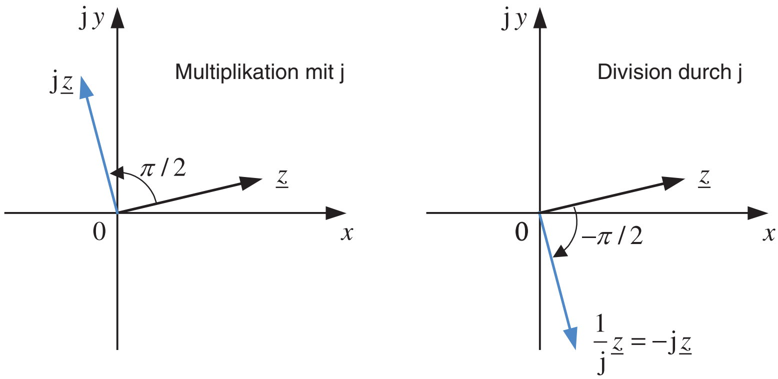


Abbildung E.6: Multiplikation mit j und Division durch j

Beim **Potenzieren** komplexer Zahlen geht man ebenfalls von der Exponentialdarstellung aus

$$\underline{z}^n = \left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right)^n = r^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}. \tag{E.20}$$

Der Betrag der komplexen Zahl wird mit dem Exponenten potenziert, während der Winkel mit dem Exponenten multipliziert wird. Die Darstellung der Beziehung (E.20) in der trigonometrischen Form ist als **Moivre'sche Formel** bekannt

$$\underline{z}^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} = r^n\left(\cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi\right). \tag{E.21}$$

Unter der n-ten **Wurzel** aus einer komplexen Zahl $\sqrt[n]{\underline{z}}$ versteht man eine komplexe Zahl $\underline{z}_k$, die der Gleichung $\underline{z}_k{}^n = \underline{z}$ genügt. Während im Reellen die n-te Wurzel einer positiven reellen Zahl x eindeutig als die positive Zahl definiert ist, deren n-te Potenz die Zahl x ergibt (beispielsweise gilt $\sqrt[4]{16} = +2$ und nicht $\sqrt[4]{16} = -2$), wird im Bereich der komplexen Zahlen auf diese Eindeutigkeit verzichtet.

Durch Anwendung der Gl. (E.20) lässt sich leicht bestätigen, dass die n-te Potenz aller Zahlen $r^{1/n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi+k2\pi)/n}$ mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ wieder dem Wert $\underline{z} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ entspricht. Anscheinend gibt es unendlich viele Wurzeln. Man stellt aber fest, dass die Wurzeln für $k = 0, \pm n, \pm 2n, ..$ identisch sind. Ebenso sind die Wurzeln für $k = 1, \pm n+1, \pm 2n+1, ..$ identisch, usw. In der Praxis beschränkt man sich daher auf die n Hauptwerte. Die n Lösungen der Gleichung $\underline{z}_k = \sqrt[n]{\underline{z}}$ sind also durch den Ausdruck

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \underline{z}_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi+k2\pi)/n} \qquad \text{mit} \qquad k = 0, ..\, n-1 \tag{E.22}$$

gegeben, der in der trigonometrischen Darstellung die Form

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+k2\pi}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{\varphi+k2\pi}{n}\right) \tag{E.23}$$

annimmt.

Beispiel E.1: Wurzeln einer komplexen Zahl

Zu berechnen sind alle Werte $\underline{z}_k = \sqrt[4]{\mathrm{j}}$.

Ausgangspunkt ist die Gl. (E.22). Mit $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$ nach Gl. (E.8) erhält man nacheinander die Ergebnisse

$$\begin{aligned}
\underline{z}_0 &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2)/4} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/8} \\
\underline{z}_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2+2\pi)/4} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}5\pi/8} \\
\underline{z}_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2+4\pi)/4} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}9\pi/8} \\
\underline{z}_3 &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2+6\pi)/4} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}13\pi/8}\,.
\end{aligned}$$

Der Wert $\underline{z}_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2+8\pi)/4} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/8+2\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/8}$ entspricht wieder dem Wert $\underline{z}_0$. Die vier Wurzeln liegen auf dem Einheitskreis und teilen ihn in vier gleiche Teile.

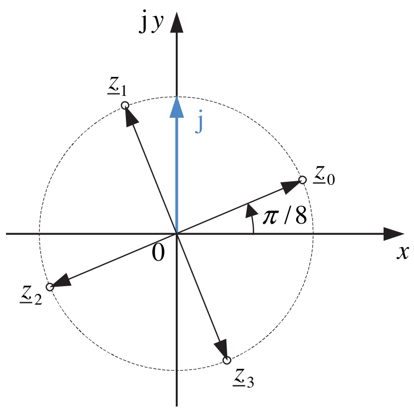


Abbildung E.7: Darstellung der Werte $\sqrt[4]{\mathrm{j}}$ in der komplexen Ebene

Ergänzungen zu den Ortskurven

F

ÜBERBLICK

F.1 Beweis für die Gültigkeit des ersten Verfahrens

Es soll gezeigt werden, dass der in Abb. 8.49 eingetragene Zeiger $\underline{Y}$ dem Kehrwert von $\underline{Z}$ entspricht.

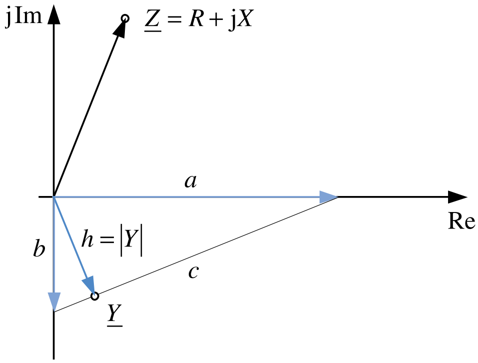


Abbildung F.1: Erstes Verfahren, Schritt 1

Im ersten Schritt werden die beiden Kehrwerte

$$\frac{1}{R} = a \quad \text{und} \quad \frac{1}{jX} = -j\frac{1}{X} = -jb \tag{F.1}$$

entlang der beiden Achsen aufgetragen. Die Verbindungslinie c zwischen den beiden Endpunkten bildet die Hypotenuse des mit den beiden Seiten a und b gebildeten rechtwinkligen Dreiecks. Aus dem Satz von Pythagoras und der Berechnung der doppelten Fläche des Dreiecks folgen die beiden Zusammenhänge

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad ab = hc. \tag{F.2}$$

Im zweiten Schritt betrachten wir nur noch das Dreieck in einem etwas vergrößerten Maßstab.

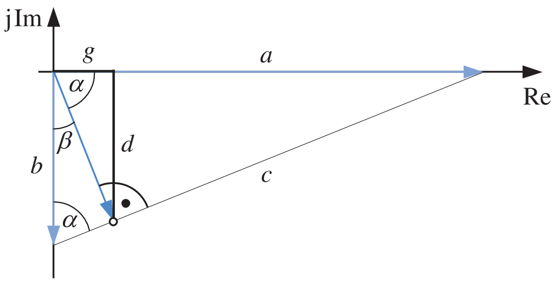


Abbildung F.2: Erstes Verfahren, Schritt 2

Wegen $\beta = \pi/2 - \alpha$ lässt sich aus den Winkelsummen in den einzelnen Dreiecken leicht überprüfen, dass die beiden eingetragenen Winkel α gleich groß sind. Mit der in ▶Abb. F.1 eingetragenen Höhe h gelten die beiden Beziehungen

$$\sin\alpha = \frac{h}{b} = \frac{d}{h} \quad \to \quad d = \frac{h^2}{b} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{h}{a} = \frac{g}{h} \quad \to \quad g = \frac{h^2}{a}, \tag{F.3}$$

die mit Hilfe der beiden Gln. (F.1) und (F.2) auf die Form

$$d = \frac{h^2}{b} \overset{(F.2)}{=} \frac{a^2 b}{c^2} \overset{(F.2)}{=} \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} = \frac{1/b}{1/b^2 + 1/a^2} \overset{(F.1)}{=} \frac{X}{R^2 + X^2} \tag{F.4}$$

bzw.

$$g = \frac{h^2}{a} \overset{(F.2)}{=} \frac{ab^2}{c^2} \overset{(F.2)}{=} \frac{ab^2}{a^2 + b^2} = \frac{1/a}{1/b^2 + 1/a^2} \overset{(F.1)}{=} \frac{R}{R^2 + X^2} \tag{F.5}$$

gebracht werden können. Der gesuchte Kehrwert der komplexen Zahl $\underline{Z}$ ist nach Gl. (8.26) durch den Ausdruck

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + \mathrm{j}X} = \frac{R}{R^2 + X^2} + \mathrm{j}\frac{-X}{R^2 + X^2} \overset{(F.4,F.5)}{=} g - \mathrm{j}d \tag{F.6}$$

gegeben und entspricht in der in Gl. (F.6) bereits angegebenen Form dem in ▶Abb. F.2 dargestellten Zeiger der Länge h.

F.2 Beweis für die Gültigkeit des 2. Verfahrens

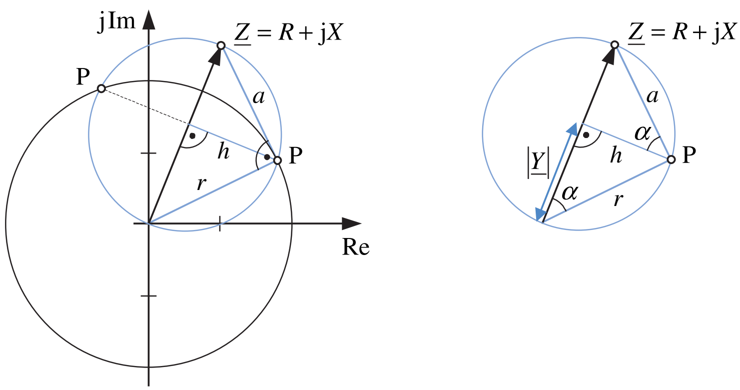


Abbildung F.3: Zweites Verfahren, Schritte 1 und 2

Die Tangente von dem Punkt $\underline{Z}$ an den Einheitskreis besitze die Länge a. Diese bildet mit dem eingezeichneten Radius r einen rechten Winkel. Ähnlich wie beim ersten Verfahren lässt sich aus den Winkelsummen in den einzelnen Dreiecken auf der rechten Seite der ▶Abb. F.3 leicht überprüfen, dass die beiden eingetragenen Winkel α gleich groß sind. Mit der Höhe h des Dreiecks kann die folgende Beziehung aufgestellt werden

$$\cos\alpha = \frac{|\underline{Y}|}{r} = \frac{h}{a} \quad \rightarrow \quad |\underline{Y}| = \frac{rh}{a}, \tag{F.7}$$

die mit dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks

$$h|\underline{Z}| = ar \quad \rightarrow \quad \frac{h}{a} = \frac{r}{|\underline{Z}|} \tag{F.8}$$

den Zusammenhang

$$|\underline{Y}| = \frac{rh}{a} = \frac{r^2}{|\underline{Z}|} \tag{F.9}$$

liefert. Mit dem Radius $r = 1$ des Einheitskreises haben wir bereits die Länge für den Kehrwert von $\underline{Z}$ gefunden. Nach Gl. (8.27) unterscheiden sich die Winkel φ und ψ der komplexen Größen $\underline{Z}$ und $\underline{Y}$ nur durch das Vorzeichen, so dass der gefundene Punkt

$$\frac{1}{|\underline{Z}|} e^{j\varphi} = |\underline{Y}| e^{j\varphi} = \underline{Y}^* \tag{F.10}$$

dem konjugiert komplexen Wert von $\underline{Y}$ entspricht und daher noch an der reellen Achse gespiegelt werden muss.

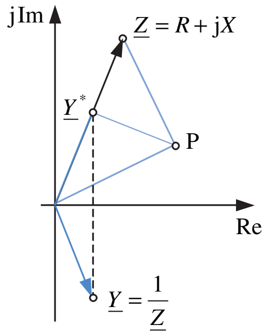


Abbildung F.4: Zweites Verfahren, Schritt 3

F.3 Die Inversion einer Geraden durch den Nullpunkt

In diesem und in den folgenden Abschnitten bezeichnen wir mit $\underline{a} = a_r + ja_i = |\underline{a}|e^{j\varphi_a}$ und $\underline{b} = b_r + jb_i = |\underline{b}|e^{j\varphi_b}$ zwei komplexe Zahlen, die in der angegebenen Weise durch Real- und Imaginärteil oder durch Betrag und Phase dargestellt werden können. Sei p ein reeller Parameter, der den Wertebereich $-\infty < p < \infty$ durchläuft, dann beschreibt das Produkt

$$\underline{z}(p) = p\underline{a} = p|\underline{a}|e^{j\varphi_a} \tag{F.11}$$

eine Gerade in der komplexen Ebene $\underline{z} = x + jy$, die durch den Punkt $\underline{a}$ (für $p = 1$) und den Ursprung (für $p = 0$) verläuft und mit der reellen Achse den Winkel φ_a einschließt (▶Abb. F.5). Beim Kehrwert

$$\frac{1}{\underline{z}(p)} = \frac{1}{p\underline{a}} = \frac{1}{p|\underline{a}|} e^{-j\varphi_a} \tag{F.12}$$

beeinflusst der Parameter p ebenfalls nur den Betrag und nicht das Argument, so dass die invertierte Ortskurve wieder eine Gerade ist, die mit der reellen Achse den Winkel $-\varphi_a$ einschließt. Zur Vermeidung von Verwechslungen wird die invertierte Ortskurve in einer zweiten komplexen Ebene dargestellt, für die die Bezeichnung $\underline{w} = u + jv$ gewählt wird. Alle Punkte, die vorher im 1. Quadranten lagen, liegen jetzt im 4. Quadranten und alle Punkte aus dem 3. Quadranten liegen jetzt im 2. Quadranten. Die Punkte auf der Ortskurve $\underline{z}(p)$ für $p \to \pm\infty$ liegen bei der invertierten Ortskurve im Ursprung.

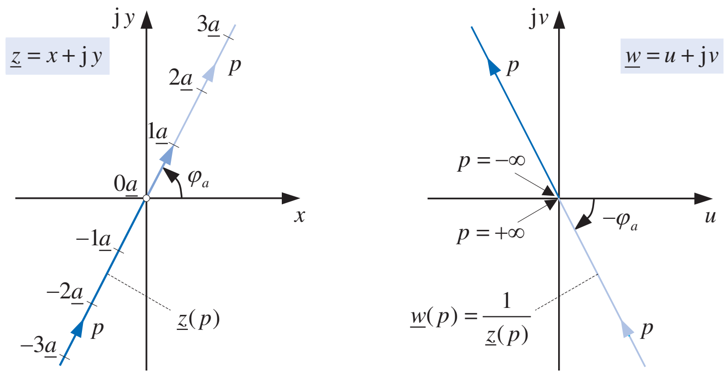


Abbildung F.5: Inversion einer Geraden durch den Nullpunkt

F.4 Die Inversion einer Geraden, die nicht durch den Nullpunkt verläuft

Die allgemeine Darstellung für eine Gerade, die nicht durch den Ursprung verläuft, erhält man auf einfache Weise dadurch, dass die bisherige durch Gl. (F.11) beschriebene Gerade insgesamt um einen konstanten Wert $\underline{b}$ verschoben wird, wobei $\varphi_b \neq \varphi_a$ gelten soll. Die Gleichung für diese Gerade lautet jetzt

$$\underline{z}(p) = \underline{b} + p\underline{a} = \underline{b} + p\left|\underline{a}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_a}. \tag{F.13}$$

Der Punkt $\underline{z}(0)$ liegt jetzt nicht mehr im Ursprung, sondern an der Spitze des Zeigers $\underline{b}$. Allgemein beschreibt $\underline{z}(p)$ einen Zeiger vom Ursprung zu dem Punkt auf der Ortskurve mit dem Wert p (vgl. ▶Abb. F.6 mit dem Beispiel $p = -2$).

In der Gl. (F.13) sind natürlich auch die folgenden Sonderfälle enthalten:

- $\underline{b} = 0 \to \underline{z}(p) = p\left|\underline{a}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_a}$ Gerade durch den Nullpunkt, der Wert für $p = 0$ liegt im Ursprung.
- $\varphi_b = \varphi_a \to \underline{z}(p) = \left(\left|\underline{b}\right| + p\left|\underline{a}\right|\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_a}$ Gerade durch den Nullpunkt, der Wert für $p = 0$ liegt an der Stelle $\underline{b}$.
- $a_i = 0 \to \underline{z}(p) = \underline{b} + pa_r$ Gerade parallel zur reellen Achse,
- $a_r = 0 \to \underline{z}(p) = \underline{b} + \mathrm{j}pa_i$ Gerade parallel zur imaginären Achse.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Inversion der Ortskurve (F.13) einen Kreis ergibt. Unter der stillschweigenden Annahme, dass diese Aussage zutrifft, werden wir zunächst die Position des Kreismittelpunktes in der $\underline{w}$-Ebene $\underline{w}_M = u_M + \mathrm{j}v_M$ sowie dessen Radius r bestimmen und anschließend nachweisen, dass die Funktion

$$\underline{w}(p) = \frac{1}{\underline{z}(p)} = \frac{1}{\underline{b} + p\underline{a}} = \frac{1}{b_r + pa_r + \mathrm{j}(b_i + pa_i)} = u(p) + \mathrm{j}v(p) \tag{F.14}$$

mit

$$u(p) = \frac{b_r + pa_r}{(b_r + pa_r)^2 + (b_i + pa_i)^2} \quad \text{und} \quad v(p) = \frac{-(b_i + pa_i)}{(b_r + pa_r)^2 + (b_i + pa_i)^2} \tag{F.15}$$

tatsächlich die Kreisgleichung erfüllt.

Zunächst stellen wir fest, dass die im Unendlichen liegenden Punkte $\underline{z}(p \to \pm\infty)$ bei der Inversion in den Ursprung der $\underline{w}$-Ebene fallen. Außerdem muss derjenige Punkt in der $\underline{z}$-Ebene, der den kürzesten Abstand vom Ursprung hat, in der $\underline{w}$-Ebene den größten Abstand zum Ursprung aufweisen. Wir wollen zunächst die Positionen dieser beiden mit $\underline{z}_0$ und $\underline{w}_0$ bezeichneten Punkte bestimmen (vgl. Abb. F.6 und F.7).

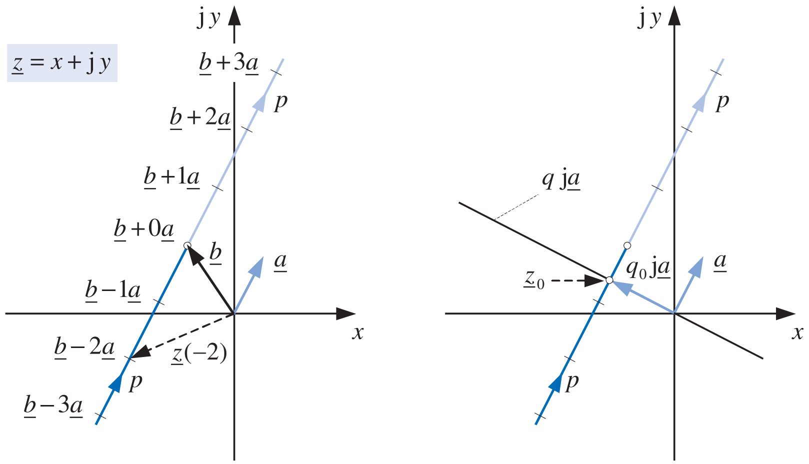


Abbildung F.6: Zur Inversion einer Geraden

Der gesuchte Punkt $\underline{z}_0$ liegt einerseits auf der Ortskurve (F.13), andererseits muss er auf einer Geraden liegen, die die Ortskurve senkrecht schneidet und durch den Ursprung geht. Da diese Gerade auch senkrecht auf dem Zeiger $\underline{a}$ steht, kann sie mit einem reellen Parameter q in der Form $q\,\mathrm{j}\underline{a}$ geschrieben werden (vgl. rechtes Teilbild in Abb. F.6). Aus der Forderung

$$\underline{z}_0 = \underline{b} + p_0\underline{a} \overset{!}{=} q_0\,\mathrm{j}\underline{a} \quad \to \quad \begin{aligned} b_r + p_0 a_r &= -q_0\, a_i \\ b_i + p_0 a_i &= +q_0\, a_r \end{aligned} \tag{F.16}$$

können die beiden Zahlen

$$p_0 = -\frac{b_r a_r + b_i a_i}{a_r^{\,2} + a_i^{\,2}} \quad \text{und} \quad q_0 = \frac{-b_r a_i + b_i a_r}{a_r^{\,2} + a_i^{\,2}} \tag{F.17}$$

bestimmt werden, so dass der Punkt

$$\underline{z}_0 = \underline{b} + p_0\underline{a} \overset{\text{(F.17)}}{=} \frac{b_r a_i - b_i a_r}{a_r^{\,2} + a_i^{\,2}}\left(a_i - \mathrm{j}a_r\right) \tag{F.18}$$

und auch sein Kehrwert

$$\underline{w}_0 = \frac{1}{\underline{z}_0} = \frac{a_i + \mathrm{j}a_r}{b_r a_i - b_i a_r} \tag{F.19}$$

bekannt sind. Der Mittelpunkt des Kreises liegt bei

$$\underline{w}_M = \underline{w}_0/2 = u_M + \mathrm{j}v_M \quad \text{mit} \quad u_M = \frac{1}{2}\frac{a_i}{b_r a_i - b_i a_r}\,, \quad v_M = \frac{1}{2}\frac{a_r}{b_r a_i - b_i a_r} \tag{F.20}$$

und für den Radius muss gelten

$$r = \left|\frac{\underline{w}_0}{2}\right| = \sqrt{u_M^{\,2} + v_M^{\,2}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a_r^{\,2} + a_i^{\,2}}}{\left|b_r a_i - b_i a_r\right|}. \tag{F.21}$$

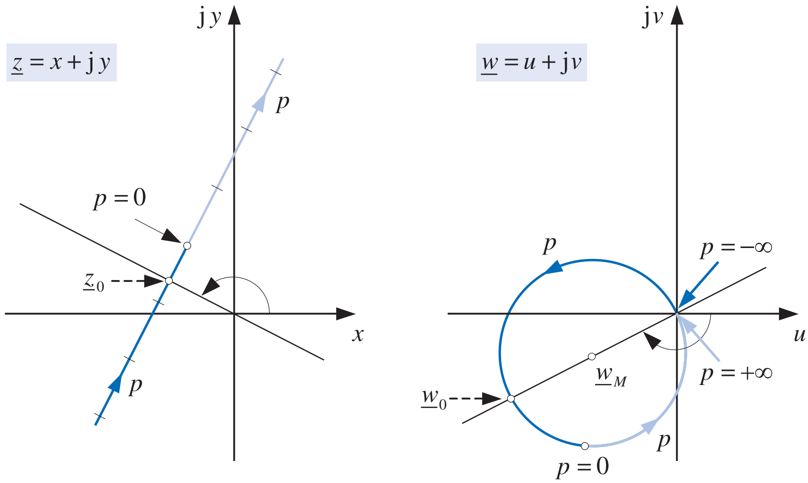


Abbildung F.7: Inversion einer Geraden

Die Gleichung für einen Kreis um den Ursprung mit Radius r lautet

$$u^2 + v^2 = r^2. \tag{F.22}$$

Liegt der Kreismittelpunkt an der Stelle u_M, v_M, dann liegen alle diejenigen Punkte u, v auf einem Kreis mit Radius r, die die Gleichung

$$(u - u_M)^2 + (v - v_M)^2 = r^2 \tag{F.23}$$

erfüllen. Der Nachweis, dass die Inversion der Ortskurve (F.13) einen Kreis ergibt, lässt sich nun auf einfache Weise erbringen, wenn gezeigt werden kann, dass die Gl. (F.23) mit den bereits berechneten Mittelpunktskoordinaten nach Gl. (F.20), dem Radius nach Gl. (F.21) sowie den von dem Parameter p abhängigen Koordinaten $u(p)$ und $v(p)$ nach Gl. (F.15) erfüllt ist. Es muss also gelten

$$\left[u(p) - \frac{1}{2}\frac{a_i}{b_r a_i - b_i a_r}\right]^2 + \left[v(p) - \frac{1}{2}\frac{a_r}{b_r a_i - b_i a_r}\right]^2 = \frac{1}{4}\frac{a_r^{\,2} + a_i^{\,2}}{\left(b_r a_i - b_i a_r\right)^2}. \tag{F.24}$$

Durch Einsetzen der Beziehungen für $u(p)$ und $v(p)$ und Ausmultiplizieren lässt sich die Richtigkeit dieser Gleichung leicht bestätigen.

Damit ist der Nachweis erbracht, dass die Inversion einer nicht durch den Ursprung verlaufenden Geraden einen Kreis ergibt, der aber seinerseits durch den Ursprung verläuft (und umgekehrt). Es ist leicht einzusehen, dass der Radius des Kreises (F.21) umso größer wird, je kleiner der minimale Abstand $\left|\underline{z}_0\right|$ zwischen der Geraden und dem Ursprung wird. Im Grenzübergang $\left|\underline{z}_0\right| \to 0$ bzw. $\underline{b} \to 0$ gilt für den Kreisradius $r \to \infty$, d.h. die in Kap. F.3 beschriebene Inversion einer Geraden durch den Nullpunkt liefert einen Kreis mit unendlich großem Radius und damit eine Gerade. Die in Kap. F.3 betrachtete Inversion ist lediglich ein Sonderfall der Inversion in Kap. F.4.

Beispiel F.1: Admittanz der RL-Reihenschaltung

Ausgehend von der Ortskurve für die Impedanz $\underline{Z}(\omega)$ der *RL*-Reihenschaltung in Abb. 8.48b soll die Ortskurve für die Admittanz $\underline{Y}(\omega)$ abgeleitet werden.

Die der Gl. (F.13) entsprechende Beziehung lautet jetzt

$$\underline{Z}(\omega) = R + \mathrm{j}\omega L\,. \tag{F.25}$$

Damit gilt $b_r = R$, $b_i = 0$ sowie $a_r = 0$, $a_i = L$ und $p = \omega$. Die Inversion nach (F.14) liefert einen Kreis durch den Nullpunkt mit den Mittelpunktskoordinaten

$$u_M \overset{(F.20)}{=} \frac{1}{2}\frac{a_i}{b_r a_i - b_i a_r} = \frac{1}{2R}\,, \quad v_M \overset{(F.20)}{=} \frac{1}{2}\frac{a_r}{b_r a_i - b_i a_r} = 0 \tag{F.26}$$

und dem Radius

$$r \overset{(F.21)}{=} \sqrt{u_M{}^2 + v_M{}^2} = \frac{1}{2R}\,. \tag{F.27}$$

Da sich die Ausgangsgerade nicht beidseitig ins Unendliche erstreckt, sondern lediglich alle Punkte im ersten Quadranten enthält, wird die Admittanz auch nur durch denjenigen Teil des Kreises beschrieben, der sich im vierten Quadranten befindet. Als Ergebnis erhalten wir die in Abb. 8.52 dargestellte Ortskurve.

F.5 Die Inversion eines Kreises

In diesem Kapitel wollen wir die bisherigen Betrachtungen nochmals verallgemeinern. Die Gerade in Abb. F.6 kann ja ebenfalls als der Sonderfall eines Kreises mit unendlich großem Radius aufgefasst werden. Diese Gerade ergibt sich als Inversion von einem Kreis durch den Ursprung. Wie sieht aber die Inversion von einem Kreis aus, der nicht durch den Ursprung verläuft?

Ein beliebiger Kreis kann ausgehend von der Gl. (F.14) in der folgenden Form dargestellt werden

$$\underline{z}(p) = \underline{c} + \frac{q}{\underline{b} + p\underline{a}} = \frac{\underline{c}(\underline{b} + p\underline{a}) + q}{\underline{b} + p\underline{a}} = x(p) + \mathrm{j}\,y(p)\,. \tag{F.28}$$

Die Multiplikation des bisherigen Ausdrucks (F.14) mit einem reellen Wert $q > 0$ entspricht einer Skalierung des bisherigen Kreises. Sowohl die Mittelpunktskoordinaten als auch der Kreisradius werden mit q multipliziert. Der Kreis verläuft aber noch immer durch den Nullpunkt. Die Addition einer komplexen Zahl $\underline{c} = c_r + \mathrm{j}c_i$ verschiebt den gesamten Kreis um $\underline{c}$. Der in Gl. (F.28) beschriebene Kreis besitzt damit ausgehend von (F.20) die Mittelpunktskoordinaten

$$x_M = c_r + \frac{1}{2}\frac{q\,a_i}{b_r a_i - b_i a_r} \quad \text{und} \quad y_M = c_i + \frac{1}{2}\frac{q\,a_r}{b_r a_i - b_i a_r} \tag{F.29}$$

und nach Gl. (F.21) den Radius

$$r = \frac{q}{2}\frac{\sqrt{a_r^{\,2} + a_i^{\,2}}}{\left|b_r a_i - b_i a_r\right|}. \tag{F.30}$$

Zu bestimmen ist jetzt die Inversion des durch Gl. (F.28) beschriebenen Kreises. Der Kehrwert liefert zunächst einen Ausdruck, der nach Ausführung der Division und anschließender Einführung neuer Abkürzungen für die auftretenden komplexen Zahlen eine Form annimmt

$$\underline{w}(p) = \frac{1}{\underline{z}(p)} = \frac{p\underline{a} + \underline{b}}{p\underline{c}\underline{a} + q + \underline{c}\underline{b}} = \frac{1}{\underline{c}} + \frac{-q}{q\underline{c} + \underline{c}^2\underline{b} + p\underline{c}^2\underline{a}} = \underline{d} + \frac{-q}{\underline{g} + p\underline{h}}, \tag{F.31}$$

die als Funktion des Parameters p den gleichen Aufbau wie die Beziehung (F.28) hat und damit auch wieder einen Kreis beschreibt. Das Minuszeichen im Zähler hat keinen Einfluss auf die geometrische Form der Ortskurve, es bedeutet lediglich, dass der durch den Bruch beschriebene Kreis zunächst nach Gl. (E.8) um den Winkel π gedreht wird, bevor er um den Wert $\underline{d}$ verschoben wird.

Die Ergebnisse aus den Kap. F.3 bis F.5 können folgendermaßen zusammengefasst werden:

Merke

1. **Allgemeiner Fall**: Die Inversion eines Kreises liefert wieder einen Kreis.
2. **Sonderfall von 1**: Die Inversion eines Kreises, der durch den Nullpunkt geht, liefert einen Kreis mit unendlich großem Radius und damit eine Gerade, die aber nicht durch den Nullpunkt geht.
3. **Umkehrung von 2**: Eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt geht, liefert einen Kreis durch den Nullpunkt.
4. **Sonderfall von 2**: Die Inversion eines Kreises, der durch den Nullpunkt geht und einen unendlich großen Radius besitzt, also eine Gerade durch den Nullpunkt darstellt, liefert wieder einen Kreis mit unendlich großem Radius und damit eine Gerade, die ebenfalls durch den Nullpunkt verläuft.

Ergänzungen zur Fourier-Entwicklung

G

ÜBERBLICK

G.1 Die Konvergenz der Fourier-Reihen

Bei der Schaltungsanalyse mit Hilfe von Fourier-Reihen entsteht von wenigen Ausnahmen abgesehen immer das Problem, dass die praktische Auswertung nur endlich viele Glieder der unendlichen Summe berücksichtigen kann. Die Ausnahmen beziehen sich auf die Sonderfälle, in denen die unendliche Summe durch einen geschlossenen Ausdruck ersetzt werden kann (vgl. z.B. die Effektivwertberechnung in Gl. (9.59)). Um die dadurch entstehenden Abweichungen zwischen der Ausgangsfunktion $u(t)$ und ihrer Reihenentwicklung besser abschätzen und damit auch minimieren zu können, wollen wir in diesem Kapitel die folgenden Fragen etwas näher untersuchen:

- Wie müssen die Koeffizienten bei einer Reihe mit nur **endlich** vielen Gliedern gewählt werden, damit der Fehler minimal wird?
- Wie schnell konvergiert die Reihendarstellung und von welchen Eigenschaften der Ausgangsfunktion hängt das ab?
- Wie lässt sich der verbleibende Fehler abschätzen?

Ausgangspunkt für die Betrachtungen ist die unendliche Reihe (9.7). Nehmen wir den Gleichanteil als das Glied $n = 0$ mit in die Summe und führen wir für die trigonometrischen Funktionen eine abgekürzte Schreibweise ein, dann erhalten wir für die Spektralform der Fourier-Reihe die Darstellung

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{c}_n \cos\left(n\omega t - \psi_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{c}_n f_n(t) . \tag{G.1}$$

Ein Abbruch der Summation bei der maximalen Ordnungszahl $n_{max} = N$ führt dazu, dass die Funktion $u(t)$ nur noch näherungsweise durch die in Gl. (G.2) definierte Partialsumme $g_N(t)$ approximiert werden kann

$$u(t) \approx g_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \hat{c}_n f_n(t) . \tag{G.2}$$

Wir wollen zuerst die Frage untersuchen, ob die *Abweichung* der N-ten Partialsumme $g_N(t)$ von der Ausgangsfunktion $u(t)$ durch eine andere Wahl der Koeffizienten weiter reduziert werden kann. Die folgende Betrachtung wird also zunächst mit der neuen Partialsumme

$$\tilde{g}_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \hat{d}_n f_n(t) \tag{G.3}$$

mit den noch frei wählbaren Werten $\hat{d}_n$ durchgeführt. Bevor wir aber die *Güte* der Approximation beurteilen können, müssen wir den Begriff *Abweichung* näher definieren. An jeder Stelle t kann zwar der Unterschied zwischen der Originalfunktion und der Partialsumme durch einfache Differenzbildung $u(t) - \tilde{g}_N(t)$ berechnet werden, in der Praxis besteht aber oft das Problem darin, dass die Funktion $u(t)$ nicht in diskreten Punkten, sondern vielmehr im gesamten betrachteten Gebiet möglichst genau dargestellt werden soll. Diese Zielsetzung lässt sich z.B. durch die mathematische Forderung näher präzisieren, dass der mittlere Fehler, also das auf die Periodendauer T bezogene Integral der Differenz, minimal sein soll. Da sich stückweise positive und negative Abweichungen bei der Integration aber gegenseitig kompensieren, muss der *Betrag* der Differenz integriert werden

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left|u(t)-\tilde{g}_N(t)\right| \mathrm{d}t \stackrel{!}{=} \min . \tag{G.4}$$

Wegen der oft umständlichen Rechnung mit Beträgen verwendet man jedoch das mittlere Fehlerquadrat

$$M_N = \frac{1}{T}\int_0^T \left[u(t)-\tilde{g}_N(t)\right]^2 \mathrm{d}t \tag{G.5}$$

und macht dieses durch geeignete Wahl der Koeffizienten $\hat{d}_n$ zu einem Minimum. Die notwendige Bedingung dafür ist das Verschwinden der ersten Ableitung. Aufgrund der Forderungen

$$\frac{\partial M_N}{\partial \hat{d}_m} = \frac{-2}{T}\int_0^T \left[u(t)-\tilde{g}_N(t)\right] \frac{\partial \tilde{g}_N(t)}{\partial \hat{d}_m} \mathrm{d}t \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit} \quad m = 0,1,\ldots N \tag{G.6}$$

erhalten wir genau $N+1$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten. Mit den Ableitungen

$$\frac{\partial \tilde{g}_N(t)}{\partial \hat{d}_1} \stackrel{(G.3)}{=} f_1(t), \qquad \frac{\partial \tilde{g}_N(t)}{\partial \hat{d}_2} = f_2(t), \ldots \tag{G.7}$$

erhalten wir aus Gl. (G.6) für jeden Wert m eine Gleichung der Form

$$\int_0^T \left[u(t)-\tilde{g}_N(t)\right] f_m(t) \,\mathrm{d}t \stackrel{(G.3)}{=} \int_0^T \left[u(t)-\sum_{n=0}^{N} \hat{d}_n f_n(t)\right] f_m(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{G.8}$$

bzw. durch Umstellung

$$\int_0^T u(t) f_m(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \hat{d}_n \underbrace{\int_0^T f_n(t) f_m(t)\,\mathrm{d}t}_{0 \text{ für } n\neq m} = \hat{d}_m \int_0^T f_m{}^2(t)\,\mathrm{d}t . \tag{G.9}$$

Das Integral verschwindet wegen der Orthogonalitätsrelation (9.13) bzw. (H.25) für alle Werte $n \neq m$, so dass von der Summe auf der rechten Seite der Gleichung nur das quadratische Glied mit $n = m$ den folgenden Beitrag liefert

$$\int_0^T f_m{}^2(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} T & \text{für} \quad m = 0 \\ T/2 & \phantom{\text{für}} \quad m > 0. \end{cases} \tag{G.10}$$

Die Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Koeffizienten $\hat{d}_n$ sind damit völlig identisch zu den bisherigen Gleichungen (9.21). Zusammenfassend gelangen wir zu der Aussage:

Merke

Wird eine Funktion $u(t)$ näherungsweise durch die Partialsumme

$$g_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \hat{c}_n \cos(n\omega t - \psi_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}\left[\hat{a}_n \cos(n\omega t) + \hat{b}_n \sin(n\omega t)\right] \tag{G.11}$$

mit trigonometrischen Funktionen beschrieben, dann ist der mittlere quadratische Fehler minimal, wenn für die zunächst frei wählbaren Koeffizienten die Fourier-Koeffizienten eingesetzt werden.

Wir haben zwar jetzt gezeigt, dass das mittlere Fehlerquadrat für $\tilde{g}_N(t) = g_N(t)$ relativ gesehen am kleinsten wird, über seine absolute Größe und über die Konvergenz der Fourier-Entwicklung haben wir aber noch keine Aussage getroffen. Beginnen wir noch einmal mit der Gl. (G.5), die wir jetzt auch in der Form

$$M_N = \frac{1}{T}\int_0^T \left[u(t) - g_N(t)\right]^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t - \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\,g_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T g_N{}^2(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(G.12)}$$

schreiben können. Die beiden letzten Integrale sind aber wegen der Orthogonalitätsrelation identisch

$$\int_0^T u(t)\,g_N(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T g_N{}^2(t)\,\mathrm{d}t = c_0{}^2\,T + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{N} \hat{c}_n{}^2\,, \quad \text{(G.13)}$$

so dass wir die Beziehung

$$M_N = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t - c_0{}^2 - \frac{\hat{c}_1{}^2}{2} - \frac{\hat{c}_2{}^2}{2} - \ldots - \frac{\hat{c}_N{}^2}{2} \quad \text{(G.14)}$$

erhalten. Da jeder Koeffizient $\hat{c}_n$ unabhängig ist von den übrigen Koeffizienten und damit auch von der Anzahl N der verwendeten Funktionen, folgt unmittelbar, dass eine Hinzunahme weiterer Glieder das mittlere Fehlerquadrat verkleinert.

Gilt für eine Funktion $u(t)$, für die das über eine Periodendauer $0 \le t \le T$ genommene Integral über das Quadrat der Funktion existiert, die Beziehung

$$M_N = \frac{1}{T}\int_0^T \left[u(t) - \sum_{n=0}^{N} \hat{c}_n\,f_n(t)\right]^2 \mathrm{d}t < \varepsilon \quad \text{für} \quad N > N_s, \quad \text{(G.15)}$$

d.h. das mittlere Fehlerquadrat kann durch geeignete Wahl des Wertes N immer kleiner als eine vorgegebene positive Schranke ε gemacht werden, dann wird das Funktionensystem $f_n(t)$ **vollständig** genannt und die Reihendarstellung $g_N(t)$ konvergiert im Mittel gegen die Funktion $u(t)$. An einer Sprungstelle t_0 der Funktion $u(t)$ konvergiert die Fourier-Reihe gegen das arithmetische Mittel $[u(t_0 + 0) + u(t_0 - 0)]/2$ aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert. Zusammengefasst gilt:

Merke

Erfüllt $u(t)$ die Dirichlet'schen Bedingungen und existieren an einer Unstetigkeitsstelle t_0 die beiden Grenzwerte $u(t_0 + 0)$ und $u(t_0 - 0)$, dann konvergiert die Fourier-Reihe und es gilt

$$\lim_{N\to\infty} g_N(t) = \begin{cases} u(t) & \text{bei Stetigkeitsstellen} \\ \frac{1}{2}\left[\,u(t_0+0) + u(t_0-0)\,\right] & \text{bei Sprungstellen} \end{cases} \quad \text{(G.16)}$$

Wegen $\lim_{N\to\infty} M_N = 0$ folgt aus Gl. (G.14) die so genannte **Parseval'sche Gleichung**

$$\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t = c_0{}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{c}_n{}^2}{2} \overset{(9.10)}{=} a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{a}_n{}^2 + \hat{b}_n{}^2\right) \quad \text{(G.17)}$$

und bei einem Abbruch der Reihe nach N Gliedern gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t \geq c_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\hat{c}_n^{\,2}}{2} = a_0^{\,2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\hat{a}_n^{\,2} + \hat{b}_n^{\,2}\right). \tag{G.18}$$

Beispiel G.1: Mittlerer quadratischer Fehler bei der Rechteckfunktion

Zu untersuchen ist der mittlere quadratische Fehler M_N für die Entwicklung der Rechteckschwingung in Abb. 9.7 sowie das Verhalten der Reihenentwicklung an den Sprungstellen der Funktion.

Durch Einsetzen der in Gl. (9.37) berechneten Koeffizienten in die Gl. (G.14) gilt

$$\begin{aligned} M_N &= \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t}_{\hat{u}^2} - c_0^{\,2} - \sum_{n=1}^{N}\frac{\hat{c}_n^{\,2}}{2} \overset{(9.10)}{=} \hat{u}^2 - a_0^{\,2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\hat{a}_n^{\,2} + \hat{b}_n^{\,2}\right) \\ &\overset{(9.37)}{=} \hat{u}^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=1,3,..}^{N}\left(\frac{4\hat{u}}{n\pi}\right)^2 = \hat{u}^2 - \frac{8\hat{u}^2}{\pi^2}\sum_{n=1,3,..}^{N}\frac{1}{n^2}\,. \end{aligned} \tag{G.19}$$

Im Grenzübergang $N \to \infty$ liefert die Summe bekanntlich den Wert $\pi^2/8$, so dass die Beziehung (G.15) und damit die Konvergenz im Mittel an diesem Beispiel überprüft wurde.

Die Reihenentwicklung enthält nur Sinusfunktionen, die an den Sprungstellen der Funktion bei $t = nT/2$ jeweils verschwinden, d.h. die Fourier-Reihe nimmt den arithmetischen Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert an.

Da bei praktisch allen aus der Physik stammenden Problemen die Funktionen den Dirichlet'schen Bedingungen genügen, kann die Konvergenz stets vorausgesetzt werden. Viel wichtiger ist daher die Frage nach der Güte der Konvergenz. Diese wird beantwortet durch den folgenden z.B. in [30] bewiesenen Satz:

Merke

Ist eine periodische Funktion $u(t)$ einschließlich ihrer ersten $k-1$ Ableitungen stetig und genügt die k-te Ableitung den Dirichlet'schen Bedingungen, dann gehen die Koeffizienten $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ und $\hat{c}_n$ der Entwicklung (9.6) bzw. (9.7) für $n \to \infty$ mindestens wie $1/n^{k+1}$ gegen Null.

Beispiel G.2: Konvergenz von Dreieck- und Rechteckfunktion

Die in Abb. 9.6 dargestellte Dreieckschwingung ist eine stetige Funktion. Ihre erste Ableitung ist nicht stetig, genügt aber den Dirichlet'schen Bedingungen. Nach dem obigen Satz müssen die Koeffizienten der Entwicklung wegen $k = 1$ mindestens wie $1/n^2$ gegen Null gehen. Man bestätigt dies leicht anhand der Gl. (9.26).

Differenziert man die Dreiecksfunktion (9.22) bzw. ihre Reihendarstellung (9.26) nach t, dann erhält man die durch die Anstiegszeit $T/2$ dividierte Fourier-Entwicklung der Rechteckschwingung (9.38). Bei dieser ist bereits die Funktion $u(t)$ nicht mehr stetig, so dass die Koeffizienten wegen $k = 0$ nur mit mindestens $1/n$ gegen Null gehen müssen. Eine nochmalige Differentiation der Gl. (9.26) ergibt eine nicht mehr konvergierende Reihe. Im Falle der Integration einer Fourier-Entwicklung wird die Konvergenz entsprechend verbessert.

Aufgrund der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{G.20}$$

lässt sich aus dem obigen Satz noch eine Folgerung hinsichtlich der gleichmäßigen Konvergenz der Fourier-Entwicklung ziehen:

Merke

Ist $u(t)$ eine den Dirichlet'schen Bedingungen genügende und im gesamten Intervall stetige Funktion (d.h. $k \geq 1$), dann konvergiert die Reihe *gleichmäßig* für alle t. Handelt es sich bei der Entwicklung um eine nur in einem begrenzten Bereich $0 \leq t \leq T$ vorgegebene Funktion $u(t)$, dann gilt diese Aussage wegen der periodischen Fortsetzung von $u(t)$ unter der Voraussetzung $u(0) = u(T)$.

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir noch eine grobe Abschätzung für die Größe des verbleibenden Fehlers machen, der durch den Abbruch der Reihe bei der Ordnungszahl $n_{max} = N$ entsteht. Da jedes weitere der Summe hinzugefügte Glied nach Gl. (G.14) den mittleren quadratischen Fehler reduziert und da die Glieder der Summe bei höherer Ordnungszahl geringer sind, wird die Größe des Fehlers wesentlich durch das erste fehlende Glied bestimmt. Wir betrachten dazu wieder das Beispiel der Dreiecksfunktion in ▶Abb. G.1. Die Partialsumme mit den ersten drei Gliedern

$$g_N(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t)\right] \tag{G.21}$$

ist in Teilbild a dargestellt. Das Teilbild b zeigt den Fehler

$$u(t) - g_N(t) = -\frac{4\hat{u}}{\pi^2} \sum_{n=5,7,..}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\omega t) \tag{G.22}$$

zusammen mit dem ersten vernachlässigten Glied in einem um den Faktor 20 vergrößerten Maßstab.

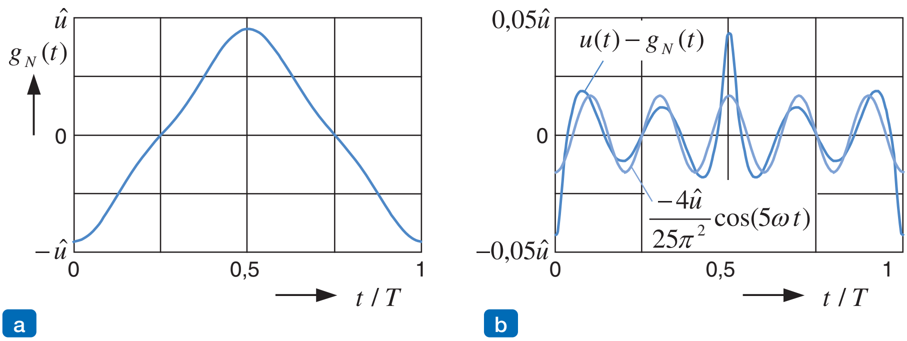


Abbildung G.1: Vergleich des Fehlers mit dem ersten vernachlässigten Glied

G.2 Das Gibbs'sche Phänomen

Wir haben im letzten Abschnitt gezeigt, dass die Fourier-Reihe bei einer Funktion, die den Dirichlet'schen Bedingungen genügt, im Mittel konvergiert und zwar gegen den Wert der Funktion an einer Stetigkeitsstelle und gegen den arithmetischen Mittelwert bei Sprungstellen. Diese Aussage bedeutet jedoch nicht gleichzeitig, dass im Grenzübergang $N \to \infty$ auch der lokale Fehler $|u(t) - g_N(t)|$ an jeder Stelle t kleiner als eine beliebige Schranke gemacht werden kann.

Als Beispiel für eine solche ungleichmäßige Konvergenz untersuchen wir die Rechteckfunktion aus Abb. 9.7 in der unmittelbaren Umgebung ihrer Sprungstelle bei $t = 0$. Die Reihenentwicklung kann aus Gl. (9.38) übernommen werden

$$u(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega t) \cdot \tag{G.23}$$

Mit dem neuen Zählindex $\nu = (n+1)/2$, der den Bereich der natürlichen Zahlen $\nu = 1,2,\ldots$ durchläuft, können wir die Partialsumme in der Form

$$g_N(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{2\nu - 1} \sin[(2\nu - 1)\omega t] = \frac{8\hat{u}}{T} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{x_\nu} \sin(x_\nu t) \tag{G.24}$$

mit der Abkürzung $x_\nu = (2\nu - 1)\omega$ schreiben. Im nächsten Schritt ersetzen wir die Sinusfunktion durch den folgenden Ausdruck

$$\frac{1}{x_\nu} \sin(x_\nu t) = \int_0^t \cos(x_\nu \tau)\, \mathrm{d}\tau = \mathrm{Re}\left\{ \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{j} x_\nu \tau}\, \mathrm{d}\tau \right\} \tag{G.25}$$

und erhalten eine neue Darstellung für die Partialsumme

$$g_N(t) = \frac{8\hat{u}}{T}\mathrm{Re}\left\{\int_0^t \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,x_\nu\,\tau}\,\mathrm{d}\,\tau\right\}. \tag{G.26}$$

Die im Integrand stehende endliche geometrische Reihe kann zusammengefasst werden

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,x_\nu\,\tau} &= \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\nu-1)\omega\,\tau} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,\tau}\left[1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\,\omega\,\tau}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,4\,\omega\,\tau}+\,\ldots\,+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2(N-1)\omega\,\tau}\right] \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,\tau}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2N\,\omega\,\tau}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\,\omega\,\tau}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,N\omega\,\tau}\,\frac{\sin(N\,\omega\,\tau)}{\sin(\omega\,\tau)}\,.\end{aligned} \tag{G.27}$$

Nach der Realteilbildung und Zusammenfassung des Zählers mit dem Additionstheorem (H.4) verbleibt die Beziehung

$$g_N(t) = \frac{8\hat{u}}{T}\int_0^t \frac{\cos(N\,\omega\,\tau)\,\sin(N\,\omega\,\tau)}{\sin(\omega\,\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau = \frac{4\hat{u}}{T}\int_0^t \frac{\sin(2N\,\omega\,\tau)}{\sin(\omega\,\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau\,. \tag{G.28}$$

In der Nähe der Sprungstelle $t = 0$ kann wegen $\tau << 1$ und $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$ für $|\varepsilon| << 1$ die Funktion im Nenner durch ihr Argument ersetzt werden. Im Zähler ist diese Vereinfachung wegen der Multiplikation mit dem sehr großen Wert $2N$ nicht zulässig

$$g_N(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi}\int_0^t \frac{1}{\tau}\sin(2N\,\omega\,\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\,. \tag{G.29}$$

Die Substitution $\xi = 2N\omega\tau$ führt schließlich mit $(1/\tau)\,\mathrm{d}\tau = (1/\xi)\,\mathrm{d}\xi$ und der oberen Integrationsgrenze $2N\omega\,t$ auf die resultierende Darstellung

$$g_N(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi}\int_0^{2N\,\omega\,t} \frac{\sin\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\,\xi\,. \tag{G.30}$$

Das bestimmte Integral

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\,\xi = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots \tag{G.31}$$

wird als **Integralsinus** bezeichnet und mit $\mathrm{Si}(x)$ abgekürzt. Die Partialsumme

$$\frac{g_N(t)}{\hat{u}} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(2\omega\,t\,N) \tag{G.32}$$

ist in ▶Abb. G.2 dargestellt. Sie konvergiert mit wachsendem N für eine festgehaltene Stelle $t = \mathrm{const} > 0$ richtig gegen die Amplitude der Rechteckschwingung. Allerdings handelt es sich dabei nicht um eine gleichmäßige Konvergenz.

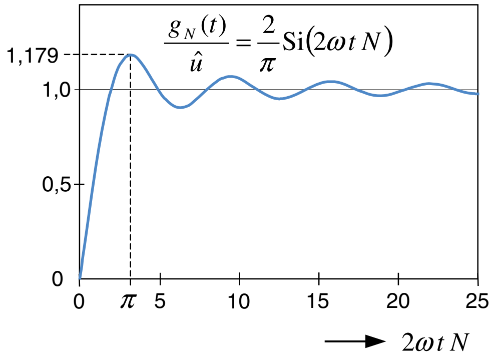


Abbildung G.2: Verlauf der Si-Funktion

An einer Stelle $t = \text{const}$ durchläuft die Partialsumme mit wachsendem N die den Zahlen $2\omega tN$ zugeordneten Funktionswerte $(2/\pi)\cdot \mathrm{Si}(2\omega t N)$. An der Stelle $2\omega tN = \pi$ bzw. $t/T = 1/(4N)$ nimmt sie ein erstes Maximum an, das etwa 18 % über der darzustellenden Funktion $u(t)/\hat{u} = 1$ liegt und sich mit steigendem N zu kleineren t-Werten hin verschiebt. Dieses Verhalten tritt immer bei Fourier-Entwicklungen an Unstetigkeitsstellen auf und wird Gibbs'sches Phänomen genannt.

Als Beispiel sind die Partialsummen für die Rechteckfunktion (G.24) mit $N = 3$ und $N = 20$ in ▶Abb. G.3 dargestellt. An der Sprungstelle treten die Maximalwerte der Überschwinger im Abstand $1/(4N)$ von dem Nulldurchgang der Funktion auf.

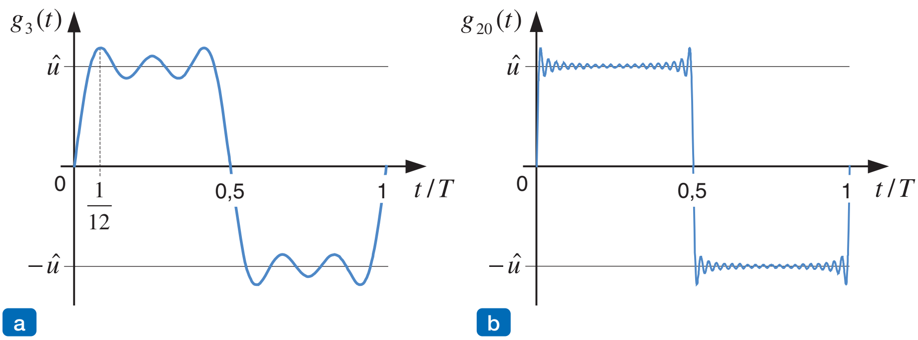


Abbildung G.3: Darstellung der Rechteckfunktion mit $N = 3$ und $N = 20$ Glieder

Kleine mathematische Formelsammlung

ÜBERBLICK

H

In diesem Anhang sind einige ausgewählte Formeln zusammengestellt, auf die in den verschiedenen Kapiteln zurückgegriffen wird. Die Additionstheoreme werden bei der Wechselstromrechnung in Kap. 8 verwendet, die Integrale bei der Fourier-Entwicklung in Kap. 9.

H.1 Additionstheoreme

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{H.1}$$

$$2\sin^2 x = 1 - \cos(2x) \tag{H.2}$$

$$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x) \tag{H.3}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \qquad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \tag{H.4}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \qquad \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha \tag{H.5}$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \tag{H.6}$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \tag{H.7}$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \tag{H.8}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\,\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \tag{H.9}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\,\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \tag{H.10}$$

H.2 Integrale

Bemerkung:
Die Integrationskonstante ist bei den unbestimmten Integralen jeweils weggelassen.

$$\int \sin^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin(2ax) \tag{H.11}$$

$$\int \sin(ax)\,\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax - bx)}{2(a - b)} - \frac{\sin(ax + bx)}{2(a + b)} \quad \text{für} \quad a^2 \neq b^2 \tag{H.12}$$

$$\int \cos^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\sin(2ax) \tag{H.13}$$

$$\int \cos(ax)\,\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax - bx)}{2(a - b)} + \frac{\sin(ax + bx)}{2(a + b)} \quad \text{für} \quad a^2 \neq b^2 \tag{H.14}$$

$$\int \sin(ax)\,\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\sin^2(ax) \tag{H.15}$$

$$\int \sin(ax)\,\cos(bx)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(ax-bx)}{2(a-b)} - \frac{\cos(ax+bx)}{2(a+b)} \quad \text{für} \quad a^2 \neq b^2 \tag{H.16}$$

$$\int x\sin(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x}{a}\cos(ax) \tag{H.17}$$

$$\int x\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x}{a}\sin(ax) \tag{H.18}$$

Bemerkung:
Die folgende Liste mit bestimmten Integralen enthält alle in der Orthogonalitätsrelation (9.13) auftretenden Kombinationen. Die Ergebnisse können für $\omega = 2\pi/T$ mit den Gleichungen (H.11) bis (H.16) leicht verifiziert werden. n und m sind natürliche Zahlen. Für die Phasenverschiebungen φ_n und ψ_n gelten die Zusammenhänge (9.11) und (9.12).

$$\int_0^T \mathrm{d}\,t = T \tag{H.19}$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^T \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}\,t = 0 \tag{H.20}$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\,\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m \\ T/2 & \phantom{\text{für}} \quad n = m \end{cases} \tag{H.21}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\,\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m \\ T/2 & \phantom{\text{für}} \quad n = m \end{cases} \tag{H.22}$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\,\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}\,t = 0 \tag{H.23}$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t+\varphi_n)\,\sin(m\omega t+\varphi_m)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m \\ T/2 & \phantom{\text{für}} \quad n = m \end{cases} \tag{H.24}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t-\psi_n)\,\cos(m\omega t-\psi_m)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m \\ T/2 & \phantom{\text{für}} \quad n = m \end{cases} \tag{H.25}$$

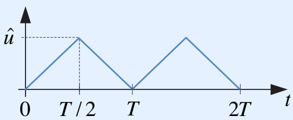
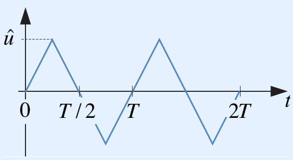
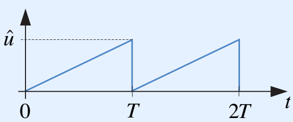
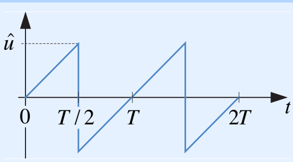
H.3 Fourier-Entwicklungen

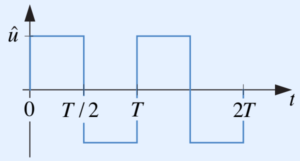
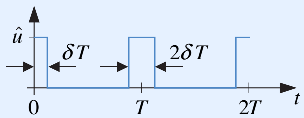
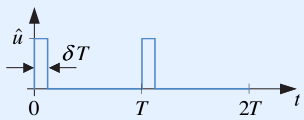
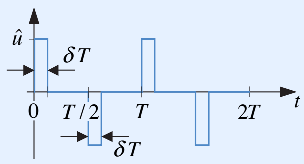
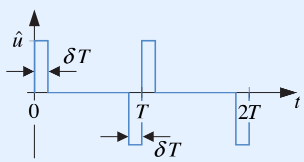
Die folgende Tabelle enthält nur die von Null verschiedenen Koeffizienten für die Reihenentwicklung

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{a}_n \cos(n\omega t) + \hat{b}_n \sin(n\omega t) \right].$$

Tabelle H.1

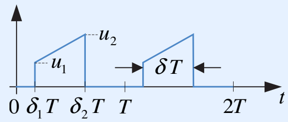
Fourier-Reihen

Nr.	Zeitfunktion $u(t)$	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten
1	 $u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + \dots\right]$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u},\ \hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$ $n = 1, 3, 5, \dots$
2	 $u(t) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - + \dots\right]$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n+3}{2}}$ $n = 1, 3, 5, \dots$
3	 $u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \dots\right]$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u},\ \hat{b}_n = \frac{-\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}$ $n = 1, 2, 3, \dots$
4	 $u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) - + \dots\right]$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi}\cdot\frac{1}{n}(-1)^{n+1}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

Nr.	Zeitfunktion $u(t)$	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten
5	 $u(t)=\frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega t)+\ldots\right]$	$\hat{u}$	$\hat{b}_n=\frac{4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}$ $n=1,3,5,\ldots$
6	 $u(t)=2\delta\hat{u}+\frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\sin(2\pi\delta)\cos(\omega t)+\frac{1}{2}\sin(4\pi\delta)\cos(2\omega t)+\frac{1}{3}\sin(6\pi\delta)\cos(3\omega t)+\ldots\right]$	$\hat{u}\sqrt{2\delta}$	$a_0=2\delta\hat{u},\ \hat{a}_n=\frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}\sin(n2\pi\delta)$ $n=1,2,3,\ldots$
7	 $u(t)=\delta\hat{u}+\frac{\hat{u}}{\pi}\left[\sin(2\pi\delta)\cos(\omega t)+\frac{1}{2}\sin(4\pi\delta)\cos(2\omega t)+\frac{1}{3}\sin(6\pi\delta)\cos(3\omega t)+\ldots\right]$ $+\frac{\hat{u}}{\pi}\left[[1-\cos(2\pi\delta)]\sin(\omega t)+\frac{1}{2}[1-\cos(4\pi\delta)]\sin(2\omega t)+\ldots\right]$	$\hat{u}\sqrt{\delta}$	$a_0=\delta\hat{u},\ \hat{a}_n=\frac{\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}\sin(n2\pi\delta)$ $\hat{b}_n=\frac{\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}[1-\cos(n2\pi\delta)]$ $n=1,2,3,\ldots$
8	 $u(t)=\frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\sin(2\pi\delta)\cos(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(6\pi\delta)\cos(3\omega t)+\ldots\right]$ $+\frac{2\hat{u}}{\pi}\left[[1-\cos(2\pi\delta)]\sin(\omega t)+\frac{1}{3}[1-\cos(6\pi\delta)]\sin(3\omega t)+\ldots\right]$	$\hat{u}\sqrt{2\delta}$	$\hat{a}_n=\frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}\sin(n2\pi\delta)$ $\hat{b}_n=\frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}[1-\cos(2n\pi\delta)]$ $n=1,3,5,\ldots$
9	 $u(t)=\frac{2\hat{u}}{\pi}\left[[1-\cos(2\pi\delta)]\sin(\omega t)+\frac{1}{2}[1-\cos(4\pi\delta)]\sin(2\omega t)+\ldots\right]$	$\hat{u}\sqrt{2\delta}$	$\hat{b}_n=\frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}[1-\cos(2n\pi\delta)]$ $n=1,2,3,\ldots$

Nr. | Zeitfunktion $u(t)$ | U_{eff} | Fourier-Koeffizienten

10



U_{eff}: $\sqrt{\frac{\delta}{3}\left(u_1^{\,2}+u_1u_2+u_2^{\,2}\right)}$ mit $\delta=\delta_2-\delta_1$

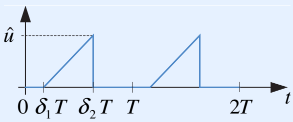
$n = 1, 2, 3, \ldots$

$a_0=\frac{u_1+u_2}{2}\delta$

$$\hat{a}_n=\frac{1}{\pi n}\left[u_2\sin(n2\pi\delta_2)-u_1\sin(n2\pi\delta_1)\right]+\frac{u_2-u_1}{2(n\pi)^2\delta}\left[\cos(n2\pi\delta_2)-\cos(n2\pi\delta_1)\right]$$

$$\hat{b}_n=\frac{-1}{\pi n}\left[u_2\cos(n2\pi\delta_2)-u_1\cos(n2\pi\delta_1)\right]+\frac{u_2-u_1}{2(n\pi)^2\delta}\left[\sin(n2\pi\delta_2)-\sin(n2\pi\delta_1)\right]$$

11



U_{eff}: $\hat{u}\sqrt{\frac{\delta}{3}}$ mit $\delta=\delta_2-\delta_1$

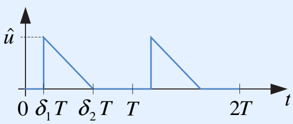
$n = 1, 2, 3, \ldots$

$a_0=\frac{\hat{u}}{2}\delta$

$$\hat{a}_n=\frac{\hat{u}}{\pi n}\sin(n2\pi\delta_2)+\frac{\hat{u}}{2(n\pi)^2\delta}\left[\cos(n2\pi\delta_2)-\cos(n2\pi\delta_1)\right]$$

$$\hat{b}_n=\frac{-\hat{u}}{\pi n}\cos(n2\pi\delta_2)+\frac{\hat{u}}{2(n\pi)^2\delta}\left[\sin(n2\pi\delta_2)-\sin(n2\pi\delta_1)\right]$$

12



U_{eff}: $\hat{u}\sqrt{\frac{\delta}{3}}$ mit $\delta=\delta_2-\delta_1$

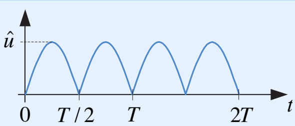
$n = 1, 2, 3, \ldots$

$a_0=\frac{\hat{u}}{2}\delta$

$$\hat{a}_n=\frac{-\hat{u}}{\pi n}\sin(n2\pi\delta_1)-\frac{\hat{u}}{2(n\pi)^2\delta}\left[\cos(n2\pi\delta_2)-\cos(n2\pi\delta_1)\right]$$

$$\hat{b}_n=\frac{\hat{u}}{\pi n}\cos(n2\pi\delta_1)-\frac{\hat{u}}{2(n\pi)^2\delta}\left[\sin(n2\pi\delta_2)-\sin(n2\pi\delta_1)\right]$$

13



$u(t)=\hat{u}\left|\sin(\omega t)\right|$

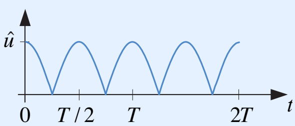
U_{eff}: $\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$

$a_0=\frac{2\hat{u}}{\pi},\ \hat{a}_n=\frac{-4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n-1)(n+1)}$

$n = 2, 4, 6, \ldots$

$$u(t)=\frac{2\hat{u}}{\pi}-\frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3}+\frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5}+\frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7}+\ldots\right]$$

14



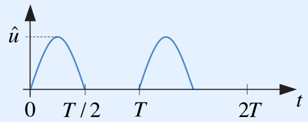
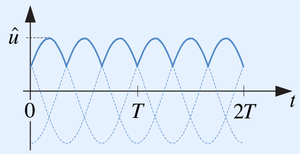
$u(t)=\hat{u}\left|\cos(\omega t)\right|$

U_{eff}: $\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$

$a_0=\frac{2\hat{u}}{\pi},\ \hat{a}_n=\frac{4\hat{u}}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{(n-1)(n+1)}$

$n = 2, 4, 6, \ldots$

$$u(t)=\frac{2\hat{u}}{\pi}+\frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3}-\frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5}+\frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7}-+\ldots\right]$$

Nr.	Zeitfunktion $u(t)$	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten
15	 $u(t)=\hat{u}\sin(\omega t)$ für $0\le t\le T/2$	$\frac{\hat{u}}{2}$	$a_0=\frac{\hat{u}}{\pi}$, $\hat{a}_n=\frac{-2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n-1)(n+1)}$ $\hat{b}_1=\frac{\hat{u}}{2}$ $n=2, 4, 6, \ldots$
	$u(t)=\frac{\hat{u}}{\pi}+\frac{\hat{u}}{2}\sin(\omega t)-\frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3}+\frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5}+\frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7}+\ldots\right]$		
16		$\hat{u}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}}$	$a_0=\frac{\hat{u}3\sqrt{3}}{2\pi}$, $\hat{a}_n=\frac{-\hat{u}3\sqrt{3}}{\pi}\frac{1}{(n-1)(n+1)}$ $n=3, 6, 9, \ldots$
	$u(t)=\frac{\hat{u}3\sqrt{3}}{\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos(3\omega t)}{2\cdot 4}-\frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7}-\frac{\cos(9\omega t)}{8\cdot 10}-\ldots\right]$		

H.4 Tabellen zur Laplace-Transformation

Original- und Bildfunktion können jeweils mit der Amplitude U multipliziert werden.

Tabelle H.2

Korrespondenzen zur Laplace-Transformation

Nr.	Originalfunktion $u(t)$, $u(t<0) = 0$	Bildfunktion $\underline{U}(s)$
1	1 (Sprungfunktion)	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n, $(n = 1,2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	$t\,\mathrm{e}^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$t^n\,\mathrm{e}^{-at}$, $(n = 1,2, \ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
7	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{as+1}$

Nr.	Originalfunktion $u(t)$, $u(t<0) = 0$	Bildfunktion $\underline{U}(s)$
8	$\frac{1}{a^2} t\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(as+1)^2}$
9	$1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{s(as+1)}$
10	$\frac{1}{a-b}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}\right)$	$\frac{1}{(as+1)(bs+1)}$
11	$\frac{1}{2a^3} t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(as+1)^3}$
12	$1-\left(1+\frac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{s(as+1)^2}$
13	$t-a+a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{s^2(as+1)}$
14	$1+\frac{1}{b-a}\left(a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}-b\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}\right)$	$\frac{1}{s(as+1)(bs+1)}$
15	$\frac{a(c-b)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}+b(a-c)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}+c(b-a)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{c}}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{1}{(as+1)(bs+1)(cs+1)}$
16	$\frac{a}{(a-b)^2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}-\frac{ab+(a-b)t}{(a-b)^2 b}\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}$	$\frac{1}{(as+1)(bs+1)^2}$
17	$\frac{1}{b-a}\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
18	$\frac{1}{(a-b)^2}\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}\right)+\frac{t}{a-b}\mathrm{e}^{-bt}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
19	$\frac{(c-b)\,\mathrm{e}^{-at}+(a-c)\,\mathrm{e}^{-bt}+(b-a)\,\mathrm{e}^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
20	$(1-at)\,\mathrm{e}^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
21	$\frac{1}{a^3}(a-t)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{s}{(as+1)^2}$
22	$\frac{1}{ab(a-b)}\left(a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}-b\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\right)$	$\frac{s}{(as+1)(bs+1)}$
23	$\frac{-1}{(a-b)^2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}+\frac{b^2+(a-b)t}{(a-b)^2 b^2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}$	$\frac{s}{(as+1)(bs+1)^2}$
24	$\frac{(b-c)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}+(c-a)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}+(a-b)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{c}}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{s}{(as+1)(bs+1)(cs+1)}$

Nr.	Originalfunktion $u(t)$, $u(t<0)=0$	Bildfunktion $\underline{U}(s)$
25	$\frac{1}{a-b}\left(a\mathrm{e}^{-at}-b\mathrm{e}^{-bt}\right)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
26	$\frac{-a}{(a-b)^2}\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}\right)-\frac{bt}{a-b}\mathrm{e}^{-bt}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
27	$\frac{a(b-c)\,\mathrm{e}^{-at}+b(c-a)\,\mathrm{e}^{-bt}+c(a-b)\,\mathrm{e}^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
28	$\left(\frac{1}{a^3}-\frac{2t}{a^4}+\frac{t^2}{2a^5}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{s^2}{(as+1)^3}$
29	$\frac{1}{(a-b)^2\,a}\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}+\frac{b(a-2b)-(a-b)\,t}{(a-b)^2\,b^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}$	$\frac{s^2}{(as+1)(bs+1)^2}$
30	$\frac{bc(c-b)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}+ca(a-c)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}+ab(b-a)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{c}}}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{s^2}{(as+1)(bs+1)(cs+1)}$
31	$\left(1-2at+\frac{1}{2}a^2t^2\right)\mathrm{e}^{-at}$	$\frac{s^2}{(s+a)^3}$
32	$\frac{a^2}{(a-b)^2}\mathrm{e}^{-at}-\frac{2ab-b^2-b^2(a-b)t}{(a-b)^2}\,\mathrm{e}^{-bt}$	$\frac{s^2}{(s+a)(s+b)^2}$
33	$\frac{a^2(c-b)\,\mathrm{e}^{-at}+b^2(a-c)\,\mathrm{e}^{-bt}+c^2(b-a)\,\mathrm{e}^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{s^2}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
34	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
35	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
36	$\sin(at+\varphi)$	$\frac{s\sin\varphi+a\cos\varphi}{s^2+a^2}$
37	$\cos(at+\varphi)$	$\frac{s\cos\varphi-a\sin\varphi}{s^2+a^2}$
38	$\sin^2(at)$	$\frac{2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)}$
39	$\cos^2(at)$	$\frac{s^2+2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)}$
40	$\mathrm{e}^{-bt}\sin(at)$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
41	$\mathrm{e}^{-bt}\cos(at)$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
42	$\mathrm{e}^{-bt}\sin(at+\varphi)$	$\frac{(s+b)\sin\varphi+a\cos\varphi}{(s+b)^2+a^2}$

Nr.	Originalfunktion $u(t)$, $u(t<0) = 0$	Bildfunktion $\underline{U}(s)$
43	$\mathrm{e}^{-bt}\cos(at+\varphi)$	$\dfrac{(s+b)\cos\varphi - a\sin\varphi}{(s+b)^2+a^2}$
44	$\dfrac{1}{\omega_1}\mathrm{e}^{-bt}\sin(\omega_1 t),\ a^2>b^2$ $\dfrac{1}{\omega_2}\mathrm{e}^{-bt}\sinh(\omega_2 t),\ a^2<b^2$ mit $\omega_1=\sqrt{a^2-b^2},\ \omega_2=\sqrt{b^2-a^2}$	$\dfrac{1}{s^2+2bs+a^2}$
45	$\mathrm{e}^{-bt}\cos\left(\sqrt{a^2-b^2}\,t\right),\ a^2>b^2$ $\mathrm{e}^{-bt}\cosh\left(\sqrt{b^2-a^2}\,t\right),\ a^2<b^2$	$\dfrac{s+b}{s^2+2bs+a^2}$
46	$1-\mathrm{e}^{-bt}\left[\cos(\omega_1 t)+\dfrac{b}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\right],\ a^2>b^2$ $1-\mathrm{e}^{-bt}\left[\cosh(\omega_2 t)+\dfrac{b}{\omega_2}\sinh(\omega_2 t)\right],\ a^2<b^2$ mit $\omega_1=\sqrt{a^2-b^2},\ \omega_2=\sqrt{b^2-a^2}$	$\dfrac{a^2}{s(s^2+2bs+a^2)}$
47	$t\sin(at)$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
48	$t\cos(at)$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
49	$t^2\sin(at)$	$2a\dfrac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$
50	$t^2\cos(at)$	$2\dfrac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$
51	$\sinh(at)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{-at})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
52	$\cosh(at)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{at}+\mathrm{e}^{-at})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
53	$\dfrac{1}{2a^3}[at\cosh(at)-\sinh(at)]$	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$
54	$\dfrac{t}{2a}\sinh(at)$	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$
55	$\dfrac{1}{2a}[at\cosh(at)+\sinh(at)]$	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$

Literaturverzeichnis

[1] Ameling, W., Laplace-Transformation, Vieweg, Wiesbaden, 1984.

[2] Bosse, G., Grundlagen der Elektrotechnik. Bd. 1-4, Springer-Verlag, 1996.

[3] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 2000.

[4] Doetsch, G., Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation, Oldenbourg Verlag, 1961.

[5] Edminster, J.A., Elektrische Netzwerke, McGraw-Hill Book Company GmbH, 1991.

[6] Elschner, H., Grundlagen der Elektrotechnik/Elektronik, Verlag Technik, Berlin, 1990.

[7] Fetzer, A., Fränkel, H., Mathematik I, 7. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 2003.

[8] Feynman, R. P., Vorlesungen über Physik, Band II: Elektromagnetismus und Struktur der Materie, Oldenbourg Verlag, München, 2001.

[9] Föllinger, O., Laplace-, Fourier- und z-Transformation, 8. Aufl., Hüthig Verlag, Heidelberg, 2003.

[10] Gräßer, A., Wiese, J., Analyse linearer elektrischer Schaltungen, Hüthig Verlag, Heidelberg, 2001.

[11] Greuel, O., Mathematische Ergänzungen und Aufgaben für Elektrotechniker, Carl Hanser Verlag, 1990.

[12] Haase, H., Garbe, H., Elektrotechnik – Theorie und Grundlagen, Springer Verlag, Berlin, 1997.

[13] Hambley, Allan R., Electrical Engineering – Principles and Applications, Fourth Edition, Prentice Hall, 2008.

[14] Helke, H., Messbrücken und Kompensatoren für Wechselstrom, Oldenbourg Verlag, 1971.

[15] Hering, E., Martin, R., Stohrer, M., Physik für Ingenieure, 6. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 1997.

[16] Kuchling, H., Taschenbuch der Physik, Verlag Harry Deutsch, Frankfurt, 1978.

[17] Kurzweil, P., Frenzel, B., Gebhard, F., Physik Formelsammlung, 1. Aufl., Friedr. Vieweg+Sohn, 2008.

[18] Lerch, R., Elektrische Messtechnik, 5. Aufl., Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.

[19] Lunze, K., Einführung in die Elektrotechnik, Hüthig Verlag, Heidelberg, 1983.

[20] Meinke, H., Gundlach, F. W., Taschenbuch der Hochfrequenztechnik, 5. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 1992.

[21] Merziger, G., Wirth, Th., Repetitorium der höheren Mathematik, 4. Aufl., Verlag Binomi, Springe, 1999.

[22] Moeller, F., Grundlagen der Elektrotechnik, 13. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart, 1967.

[23] Müller, R., Grundlagen der Halbleiter-Elektronik, 6. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 1991.

[24] Otten, E. W., Repetitorium Experimentalphysik, Springer Verlag, Berlin, 1998.

[25] Paul, R., Elektrotechnik, 3. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 1993.

[26] Philippow, E., Grundlagen der Elektrotechnik, 8. Aufl., Hüthig Verlag, Heidelberg, 1989.

[27] Prechtl, A., Vorlesungen über die Grundlagen der Elektrotechnik, Springer Verlag, Wien, Band 1, 1994, Band 2, 1995.

[28] Pregla, R., Grundlagen der Elektrotechnik, 6. Aufl., Hüthig Verlag, Heidelberg, 2001.

[29] Purcell, E. M., Berkeley Physik Kurs 2, Elektrizität und Magnetismus, 3. Aufl., Friedr. Vieweg+Sohn, Braunschweig, 1983.

[30] Smirnow, W.I., Lehrbuch der höheren Mathematik, Bd. 2, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1990.

[31] Spiegel, M.R., Laplace-Transformationen, McGraw-Hill Book Company GmbH, 1977.

[32] Unbehauen, R., Grundlagen der Elektrotechnik, Bd. 1, 5. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 1999, Bd. 2, 4. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 1994.

[33] von Münch, W., Elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie, B. G. Teubner, Stuttgart 1987.

[34] von Weiss, A., Die Feldgrößen der Elektrodynamik: Definition, Deutung und Normung der elektromagnetischen Feldgrößen, VDE-Verlag, 1984.

[35] Zinke, O., Seither, H., Widerstände, Kondensatoren, Spulen und ihre Werkstoffe, 2. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 1982.

Verzeichnis der verwendeten Symbole

Generelle Bemerkungen

Die Koordinatenbezeichnungen werden steil gesetzt.

Vektoren werden durch Fettdruck und mit Pfeil gekennzeichnet, z.B. $\vec{\mathbf{s}}$. Ihr Betrag (Länge) wird in der Form $|\vec{\mathbf{s}}| = s$ geschrieben.

Vektoren

$\vec{\mathbf{0}}$		Vektor der Länge Null
$\vec{\mathbf{A}}$	m^2	gerichtete Fläche $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{n}}\,A$, $\vec{\mathbf{n}}$ steht senkrecht auf A
$\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$	m^2	vektorielles Flächenelement $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}A$
$\vec{\mathbf{B}}$	$\mathrm{Vs/m}^2$	magnetische Flussdichte, (Induktion)
$\vec{\mathbf{D}}$	$\mathrm{As/m}^2$	elektrische Flussdichte, Verschiebungsdichte, el. Erregung
$\vec{\mathbf{E}}$	V/m	elektrische Feldstärke
$\vec{\mathbf{e}}$		Einheitsvektor, Vektor mit Betrag $|\vec{\mathbf{e}}| = 1$
$\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}}, \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}}, \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{z}}$		Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten
$\vec{\mathbf{e}}_{\rho}, \vec{\mathbf{e}}_{\varphi}, \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{z}}$		Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten
$\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{r}}, \vec{\mathbf{e}}_{\vartheta}, \vec{\mathbf{e}}_{\varphi}$		Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten
$\vec{\mathbf{F}}$	VAs/m = N	Kraft
$\vec{\mathbf{H}}$	A/m	magnetische Feldstärke
$\vec{\mathbf{J}}$	$\mathrm{A/m}^2$ $\mathrm{Vs/m}^2$	1) (räumlich verteilte) Stromdichte 2) magnetische Polarisation
$\vec{\mathbf{j}}$	Vsm	magnetisches Dipolmoment
$\vec{\mathbf{M}}$	A/m	Magnetisierung
$\vec{\mathbf{m}}$	Am^2	magnetisches Moment
$\vec{\mathbf{n}}$		senkrecht auf einer Fläche stehender Einheitsvektor
$\vec{\mathbf{P}}$	$\mathrm{As/m}^2$	dielektrische Polarisation
$\vec{\mathbf{p}}$	Asm	elektrisches Dipolmoment
$\vec{\mathbf{r}}$	m m	1) Abstandsvektor vom Quellpunkt zum Aufpunkt 2) Vektor vom Ursprung (Nullpunkt) zum Aufpunkt P
$\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{P}}$	m	Vektor vom Ursprung 0 zum Aufpunkt P

$\vec{\mathbf{r}}_Q$	m	Vektor vom Ursprung 0 zum Quellpunkt Q
$\vec{\mathbf{s}}$	m	gerichtete Strecke
$\vec{\mathbf{v}}$	m/s	Geschwindigkeit
$\vec{\mathbf{v}}_e$	m/s	Driftgeschwindigkeit der Elektronen

Lateinische Buchstaben

A	m^2	Fläche
A_L	nH	A_L-Wert
a	m/s^2	Beschleunigung
a, b, c, d	m	Abmessungen
$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$		Koeffizienten der Fourier-Entwicklung
B	1/Ω 1/s Vs/m^2	1) Blindleitwert, Suszeptanz 2) Bandbreite 3) Betrag der magnetischen Flussdichte
B_C	1/Ω	kapazitiver Blindleitwert
B_L	1/Ω	induktiver Blindleitwert
B_r	Vs/m^2	Remanenz
C	As/V = F	Kapazität
c	m/s	Lichtgeschwindigkeit $c = 2{,}99792 \cdot 10^8$ m/s
D	As/m^2 VA	1) Betrag der elektrischen Flussdichte 2) Verzerrungsblindleistung
d_s, d_p		Verlustfaktor = $1/Q_s$, $1/Q_p$
E	V/m	Betrag der elektrischen Feldstärke
e		Euler'sche Konstante 2,71828...
e	As	Elementarladung $e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ As
F	VAs/m = N	Betrag der Kraft
f	1/s = Hz	Frequenz
f_0	1/s = Hz	Resonanzfrequenz
G	1/Ω = A/V	elektrischer Leitwert, $G = 1/R$
H	A/m	Betrag der magnetischen Feldstärke
H_c	A/m	Koerzitivfeldstärke
h	m	Abmessung, (Länge, Höhe)
h_1, h_2, h_3		metrische Faktoren (unterschiedliche Einheiten)

I	A	Gleichstrom
I_K	A	Kurzschlussstrom
i	A	1) zeitabhängiger Strom 2) Zählindex
J	$\mathrm{A/m^2}$	Betrag der Stromdichte
j		imaginäre Einheit = $\sqrt{-1}$
k		1) Koppelfaktor 2) Zählindex 3) Klirrfaktor 4) Konstante
L	Vs/A = H	Induktivität
L_a	Vs/A	äußere Induktivität
L_h	Vs/A	Hauptinduktivität
L_i	Vs/A	innere Induktivität
L_{ii}	Vs/A	Selbstinduktivität des *i*-ten Leiters
L_{ik}	Vs/A	Gegeninduktivität zwischen dem *i*-ten und dem *k*-ten Leiter
L_s	Vs/A	Streuinduktivität
l	m	Länge
l_m	m	mittlere magnetische Weglänge
M	Vs/A	1) Gegeninduktivität 2) mittleres Fehlerquadrat
m	kg	1) Masse 2) Zählindex
m_0	kg	Ruhemasse eines Elektrons $m_0 = 9{,}1094 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
N		Windungszahl
n		1) Betrag des Normalenvektors $n = \lvert\vec{\mathbf{n}}\rvert$ 2) Zählindex 3) Zahlenverhältnis
P		Aufpunkt (Beobachtungspunkt)
P	VA = W	Leistung, (Wirkleistung)
p	W	1) zeitabhängige Momentanleistung 2) Eigenwerte
p_v	$\mathrm{W/m^3}$	Verlustleistungsdichte
Q		Quellpunkt

Q	As VAr = (W)	1) Ladung bzw. Punktladung 2) Blindleistung
Q_p		Güte des Parallelschwingkreises
Q_s		Güte des Serienschwingkreises
q	As	zeitabhängige Ladung
R	V/A = Ω	ohmscher Widerstand
R_E	V/A = Ω	Eingangswiderstand
R_i	V/A = Ω	Innenwiderstand einer Quelle
R_m	A/Vs	magnetischer Widerstand
r	m	Kugelkoordinate $0 \leq \mathrm{r} < \infty$
r	m	Betrag des Vektors $\vec{\mathbf{r}}$, $r = \lvert\vec{\mathbf{r}}\rvert$
r_P	m	Betrag des Aufpunktvektors, $r_\mathrm{P} = \lvert\vec{\mathbf{r}}_\mathrm{P}\rvert$
r_Q	m	Betrag des Quellpunktvektors, $r_\mathrm{Q} = \lvert\vec{\mathbf{r}}_\mathrm{Q}\rvert$
S	VA = (W)	Scheinleistung
$\underline{S}$	VA	komplexe Leistung
$\mathrm{Si}(x)$		Integralsinus
s	m 1/s	1) Strecke 2) komplexe Frequenz = $\sigma + \mathrm{j}\omega$
T	K s	1) Temperatur 2) Periodendauer
t	s	Zeit
U	V	Gleichspannung
U_L	V	Leerlaufspannung
$\underline{U}(\omega)$	Vs	Fourier-Transformierte von $u(t)$
$\underline{U}(s)$	Vs	Laplace-Transformierte von $u(t)$
u	V	zeitabhängige Spannung
$ü$		Übersetzungsverhältnis
V	m^3	Volumen
V_m	A	magnetische Spannung
v	m/s	1) Betrag der Geschwindigkeit 2) Verstimmung beim Schwingkreis
W	VAs = J	Energie

w	VAs/m^3	1) Energiedichte 2) Welligkeit
$\underline{w}$		komplexe w-Ebene
X	$V/A = \Omega$	Blindwiderstand, Reaktanz
X_C	$V/A = \Omega$	kapazitiver Blindwiderstand
X_L	$V/A = \Omega$	induktiver Blindwiderstand
x		1) Realteil der komplexen Größe $\underline{z}$ 2) normierte Größe
x, y, z	m	kartesische Koordinaten
$\underline{Y}$	$A/V = 1/\Omega$	Admittanz
y		Imaginärteil der komplexen Größe $\underline{z}$
$\underline{Z}$	$V/A = \Omega$	Impedanz
$\lvert\underline{Z}\rvert$	$V/A = \Omega$	Scheinwiderstand
$\underline{z}$		komplexe z-Ebene
z		Wertigkeit eines Ions

Griechische Buchstaben

Φ	Vs	magnetischer Fluss
Φ_A	Vs	magnetischer Fluss durch eine Querschnittsfläche
Λ_m	Vs/A	magnetischer Leitwert
Θ	A	Durchflutung
Ψ	As	elektrischer Fluss
$\mathit{\Omega}$		normierte Verstimmung beim Schwingkreis
α	1/K	1) Temperaturkoeffizient 2) Winkel
δ	 1/s	1) Tastgrad, Tastverhältnis 2) Abklingkonstante
χ		1) dielektrische Suszeptibilität 2) magnetische Suszeptibilität
ε	As/Vm	Dielektrizitätskonstante, (Permittivität), $\varepsilon = \varepsilon_r\ \varepsilon_0$
ε_0	As/Vm	Dielektrizitätskonstante im Vakuum, (elektrische Feldkonstante) $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm

ε_r		Dielektrizitätszahl, = 1 im Vakuum
φ		Zylinderkoordinate, Kugelkoordinate $0 \le \varphi < 2\pi$
φ		1) Phasenwinkel 2) Argument einer komplexen Zahl
φ_e	V	elektrostatisches Potential
η		Wirkungsgrad
κ	A/Vm	spezifische Leitfähigkeit, $\kappa = 1/\rho_R$
λ	As/m m	1) Linienladung, Linienladungsdichte 2) Leistungsfaktor 3) Wellenlänge
μ	Vs/Am	(absolute) Permeabilität, $\mu = \mu_r\ \mu_0$
μ_0	Vs/Am	Permeabilität im Vakuum, (magnetische Feldkonstante) $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am
μ_e	m^2/Vs	Beweglichkeit der Ladungsträger
μ_r		Permeabilitätszahl, = 1 im Vakuum
ϑ		Kugelkoordinate $0 \le \vartheta \le \pi$
ρ	m	Zylinderkoordinate $0 \le \rho < \infty$
ρ	As/m^3	freie Raumladung, Raumladungsdichte
ρ_R	Vm/A	spezifischer Widerstand, $\rho_R = 1/\kappa$
σ	As/m^2 1/s	1) Flächenladung, Flächenladungsdichte 2) Streugrad (Streuung) 3) Abklingkonstante = Re$\{s\}$
τ	s s	1) Zeitkonstante 2) Integrationskonstante
ω	1/s	Kreisfrequenz, $\omega = 2\pi f$
ψ		Phasenwinkel bei der Admittanz

Indizes

A	bezieht sich auf eine Querschnittsfläche
E	Eingangsgröße
e	elektrisch
eff	Effektivwert einer Größe
g	1) Grenzfrequenz 2) Kennzeichnung einer geraden Funktion
h	homogene Lösung einer DGL

i	1) Zählindex 2) den Strom betreffend
K	bezieht sich auf eine Kugel
k	Zählindex
L	1) bezieht sich auf die Ausgangslast 2) bezieht sich auf den Luftspalt 3) bezieht sich auf die Außenleiter
M	bezieht sich auf den Mittelpunkt
m	magnetisch
N	bezieht sich auf den Neutralleiter
n	in Richtung der Flächennormalen
P	bezieht sich auf den Aufpunkt
p	1) Primärseite beim Transformator 2) Parallelschaltung 3) partikuläre Lösung einer DGL
Q	bezieht sich auf den Quellpunkt
R, L, C	das entsprechende Bauelement betreffend
r	1) in Richtung eines Vektors $\vec{\mathbf{r}}$ 2) Reihenschaltung
r	in Richtung der Kugelkoordinate r
s	1) in Richtung der Strecke s 2) Sekundärseite beim Transformator
t	in tangentialer Richtung
u	1) die Spannung betreffend 2) Kennzeichnung einer ungeraden Funktion
V	1) bezieht sich auf einen Vorwiderstand 2) bezieht sich auf die Verbraucherseite
x, y, z	in Richtung der jeweiligen Koordinate
ρ, φ, ϑ	in Richtung der jeweiligen Koordinate

Sonstiges

$\bullet$	Skalarprodukt
$\times$	Kreuzprodukt
$\lvert\vec{\mathbf{E}}\rvert$	Betrag (Länge) des Vektors $\vec{\mathbf{E}}$
$\mathrm{Re}\{..\}$	Realteil von ...

Im{..}	Imaginärteil von ...
$\overline{u}$	zeitlicher Mittelwert von $u(t)$
$\hat{u}$	Spitzenwert (Amplitude) von $u(t)$
$\overline{\lvert u \rvert}$	Gleichrichtwert von $u(t)$
$\underline{u}$	komplexe Größe
$\underline{u}^*$	konjugiert komplexer Wert von $\underline{u}$
$\underline{\hat{u}}$	komplexe Amplitude von $u(t)$, (Spitzenwertzeiger)
$\lvert \underline{u} \rvert$	Betrag der komplexen Größe $\underline{u}$

Register

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V