11. Übung

Rares Sahleanu

Email rsahleanu@gmail.com

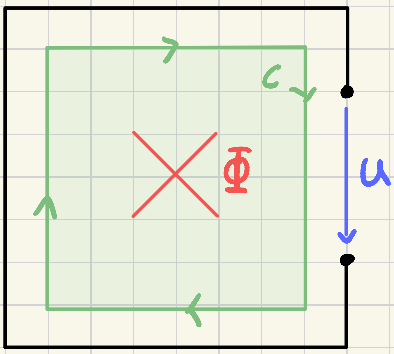
Discord raresbares

6.1 Induktion & Induktionsgesetz

! Super wichtig bei Induktion (Kapitel 6 generell) ist es immer den Überblick über die Richtungen zu wahren

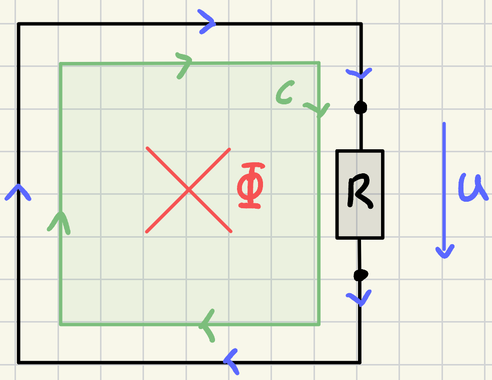
Generell gilt die Formel: $U_c = \oint_c E = -\frac{d\Phi}{dt}$

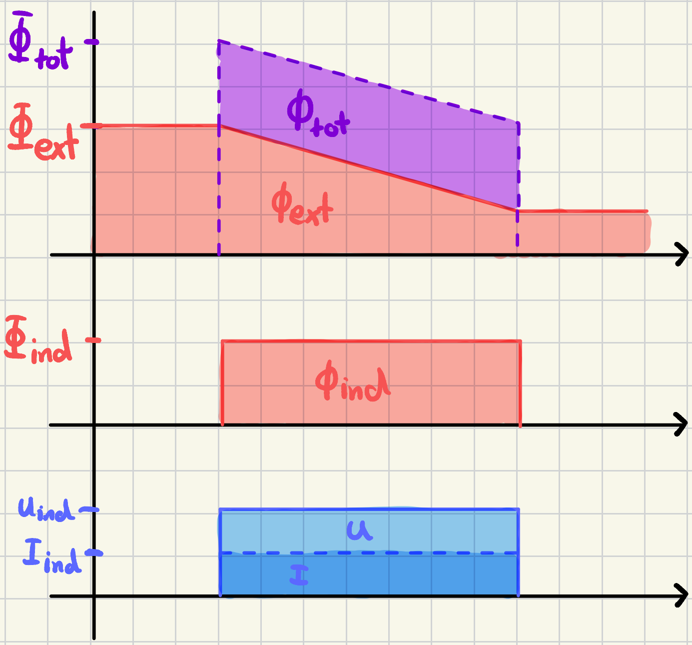
Achtung!



- Φ und c hängen über der rechten-Hand-Regel zusammen
- $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(A(t) \cdot B(t))$
  $= A' \cdot B + A \cdot B'$

Schließen wir die Schlinge mit einem Widerstand, so fließt ein Strom und erzeugt einen mag. Fluss:





Lenz 'sche Regel

"Der durch eine Änderung des Flusses herbeigerufenen Strom (durch Spannung) erzeugt einen Fluss welcher der Ursache entgegenwirkt"

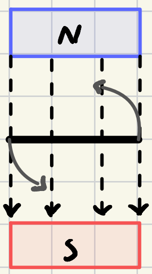
Mit anderen Worten:

"Mehr Φ" $\longrightarrow$ Φ_{ind} ist entgegengerichtet

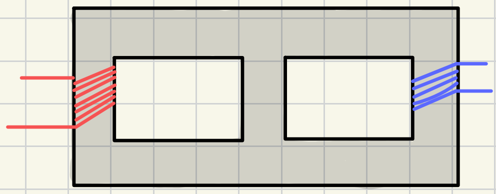
"Weniger Φ" $\longrightarrow$ Φ_{ind} ist gleichgerichtet

Es existieren 2 Arten der Induktion

Bewegungs-



Ruheinduktion



Die allgemeine Regel (Faraday'sche Induktionsgesetz) lautet:

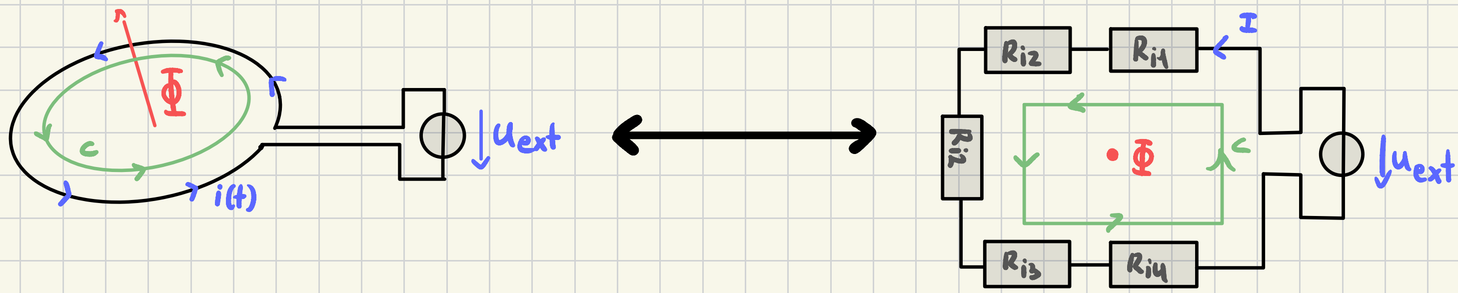
$$\oint E + (v \times B)\, ds = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B}\, d\vec{A}$$

In der Ruheinduktion ist $v \times B = 0$, aber was genau ist dieser Term?

$\Rightarrow$ Durch Bewegung eines Leiter (mit freien Ladungträgern) durch ein Magnetfeld entsteht durch die Lorentz-Kraft ein inneres Ladungsungleichgewicht ($\Rightarrow$ elektrost. Feld)

6.2 Selbstinduktion

Kann der Fluss einer Spule in dieser (selbst) eine Spannung induzieren?



$$L \frac{\partial}{\partial t} i(t)$$

$$\|$$

Definition Induktivität

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Phi$$

$$\|$$

Faraday'sche Induktionsgesetz

Maschenspannung

$$\oint_c \vec{E}\, ds$$

$$\|$$

Kirchhof'sche Maschengleichung

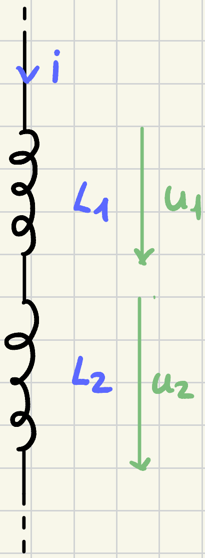
$$i(t) \cdot R - u_0(t)$$

$$\Rightarrow \quad u_0(t) = \overbrace{L \frac{\partial}{\partial t} i(t)}^{u_L} + \overbrace{R \cdot i(t)}^{u_R} = u_L + u_R$$

Eine Stromänderung durch eine Spule führt dazu, dass der, dadurch erzeugte mag. Fluss, in der selben Spule eine Spannung:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{\partial}{\partial t} i \quad \text{induziert}$$

6.3 Induktivitätsnetzwerke

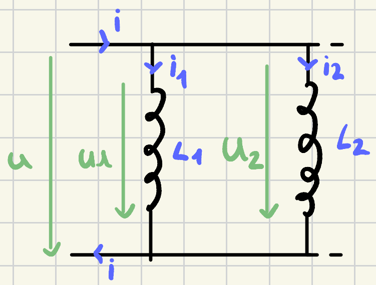


$$u_{ges} = \sum u_k$$

$$L_{ges}\, i' = \sum L_k\, i'$$

$$L_{ges} = \sum L_k$$

Bei einer Serieschaltung von Induktivitäten entspricht die Gesamtinduktivität des Summe der Teilinduktivitäten



$$i' = \sum i_k'$$

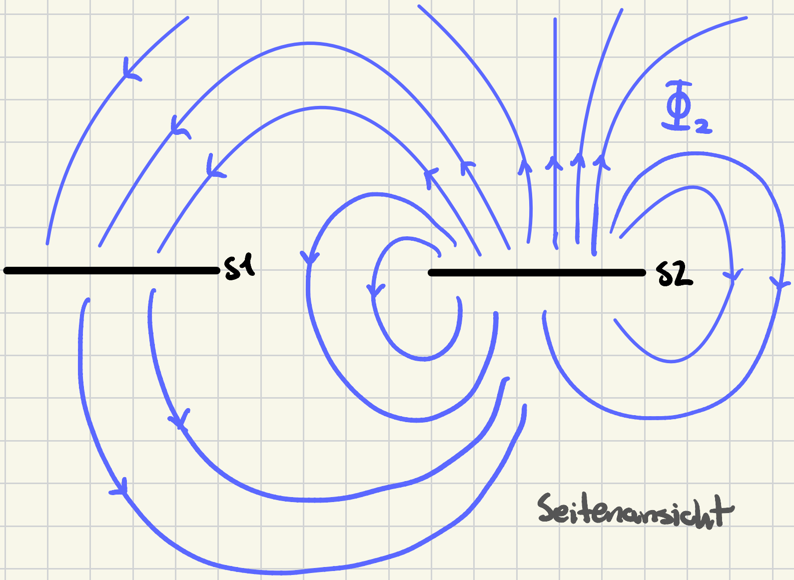
$$\frac{1}{L_{ges}}\, u = \sum \frac{1}{L_k}\, u_k$$

$$\frac{1}{L_{ges}} = \sum \frac{1}{L_k}$$

Bei einer Parallelschaltung von Induktivitäten entspricht die Gesamtinduktivität^{-1} des Summe der der Kehrwerte Teilinduktivitäten

6.4. Gegeninduktion

Teile des Flusses können auch eine andere Spulen durchfluten



Hier durchsetzt ein Bruchteil von Φ_2 die Spule 1. Dieser Fluss wird notiert mit:

$$\Phi_{ij}$$

Von welcher Spule erzeugt — Welche Spule durchsetzt

Damit ist der gesamte Fluss die Superposition des Eigenflüsse und der Gegenflüsse

$$\Phi_{iges} = \sum_j \Phi_{ij}$$

Wichtig ist: Flusszählrichtung beachten

Die gesamte Spannung in der Masche ist somit gegeben als:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \overset{\text{Superposition}}{=} -\frac{d}{dt}\left(\Phi_{11} \pm \Phi_{12}\right)$$

$$\overset{*}{=} -\frac{d}{dt}\left(L\, i_1 \pm \Phi_{12}\right)$$

* Folgt aus der Definition der Induktivität

Damit wären wir schon so gut wie fertig

jedoch kann man Φ_{12} auffassen als

K ist einfach eine Proportionalitätskonst. wie 10% oder $\frac{2}{5}$

$$\Phi_{12} = K_{12}\,\Phi_{22}$$

k_{ij} = "Wieviel von dem erzeugten Fluss von Spule j Spule i durchdringt"

$$\Phi_{12} = K_{12}\,L_2\; i_2$$

hypothetisch könnte man eine Gegeninduktivität erfinden

$\Rightarrow$ $L_{12} = K_{12} L_{12}$ $\hat{=}$ "Wieviel der gesamten Induktivität erzeugt den Fluss, der die Spule 1 durchsetzt"

Idee: Anstatt dass wir sagen, dass 10% "Bsp" des Flusses von Spule 2 durch Spule 1 geht, sagen wir, dass 10% der Spule (der Induktivität) einen Fluss erzeugt, der vollständig Spule 1 durchsetzt

Zurück zu oben*:

$$\oint \vec{E}\,d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\left(\Phi_{11} \pm \Phi_{12}\right)$$

Def. Ind. und prop. von Φ_{12} und Φ_{22}

$$= -\frac{d}{dt}\left(L_{11}\,i_1 \pm K_{12}\,\Phi_{22}\right)$$

Def. Induktivität & Substitution

$$= -\frac{d}{dt}\left(L_{11}\,i_1 \pm L_{12}\,i_2\right)$$

Formalitäten

i) $K_{ii} = 1$

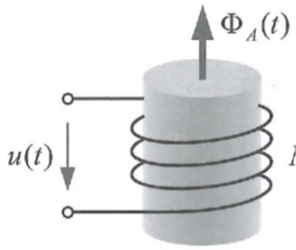
ii) $K_{ij} = K_{ji} = K$ (folgt aus Symmetrie)

iii) $L_{ij} = L_{ji} = \mu$ (folgt aus ii)

iv) $K = \frac{\mu}{\sqrt{L_{ii} L_{jj}}}$

Aufgabe 1

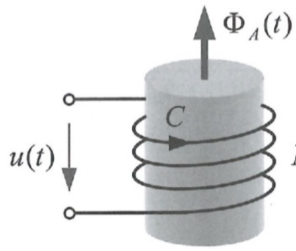
2. Eine Spule mit $N = 4$ Windungen ist, wie in der Abb. dargestellt, von einem magnetischen Fluss $\Phi_A(t) = 0{,}6\ t/\mathrm{s}\ \mathrm{Vs}$ durchsetzt. Wie groß ist die an den Klemmen auftretende Spannung $u(t)$?



Lösung zur Aufgabe 2:

Wir bilden das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke entlang der eingetragenen Kontur C und erhalten mit dem Induktionsgesetz den Zusammenhang

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = u(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_A \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N \frac{\mathrm{d}\Phi_A}{\mathrm{d}t}.$$



Einsetzen der Zahlenwerte liefert das Ergebnis $u(t) = -4 \cdot 0{,}6\ \mathrm{V} = -2{,}4\ \mathrm{V}$.

Aufgabe 2

Beispiel 6.1: Auswertung des Linienintegrals

Um den Zusammenhang zwischen den beiden Bezugssystemen noch einmal zu verdeutlichen, wollen wir das Ringintegral auf der linken Seite der Gl. (6.16) für das Beispiel der teilweise bewegten Leiterschleife in Abb. 6.2 auswerten.

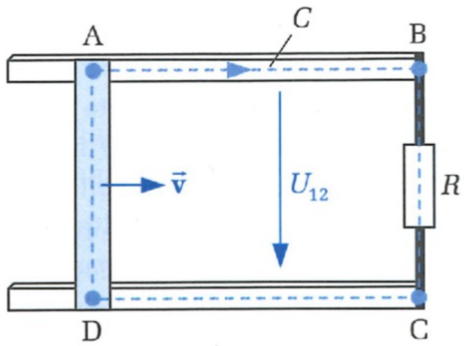


Abbildung 6.8: Auswertung des Linienintegrals

Lösung:

Zu diesem Zweck unterteilen wir den Integrationsweg gemäß ▶Abb. 6.8 in vier Teilabschnitte

$$\oint_C \vec{E}'\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E}'\cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{E}'\cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{E}'\cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{E}'\cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}}_{0} + \underbrace{\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{s}}_{U_{12}=U} + \underbrace{\int_C^D \vec{E}\cdot d\vec{s}}_{0} + \int_D^A \vec{E}'\cdot d\vec{s}. \tag{6.17}$$

In den ortsfesten Leiterabschnitten (Schienen und Widerstand) gilt $\vec{E}' = \vec{E}$. Eine Unterscheidung zwischen bewegtem und nicht bewegtem Bezugssystem gibt es hier nicht. Die als widerstandslos angenommenen Schienen liefern keinen Beitrag zur Spannung und die am Widerstand R abfallende Spannung U_{12} wurde bereits in Gl. (6.4) angegeben. Besondere Aufmerksamkeit verdient aber der Integrationsweg zwischen den Punkten D und A. Hier gilt nämlich die Beziehung

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \tag{6.18}$$

zwischen den Feldgrößen in den beiden Bezugssystemen. Wir haben bereits im Zusammenhang mit der Abb. 6.1 festgestellt, dass sich die Ladungsträger in dem bewegten Stab so verteilen, dass sie keine Kraft mehr erfahren. Diese Aussage ist aber gleichbedeutend mit der bereits ebenfalls festgestellten Tatsache, dass das mitbewegte Ladungsteilchen oder ein mit dem Stab bewegter Beobachter das Innere des Stabes als feldfrei erkennt. Wegen $\vec{E}' = \vec{0}$ liefert der Integrationsweg zwischen den Punkten D und A keinen Beitrag und aus dem Ringintegral (6.17) erhalten wir als Ergebnis wieder die Spannung U bzw. bei beliebig zeitabhängiger Geschwindigkeit die dann ebenfalls zeitabhängige Spannung $u(t)$ entsprechend Gl. (6.15).

Aufgabe 3

Der in Abb. 1 dargestellte Schleifkontakt aus Metall rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung. Der Zeiger gleitet dabei auf einem Metallring mit dem Radius a. Ein homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{e}}_z B_0$ durchflutet den gesamten Metallring senkrecht zur Ringebene. Alle Betrachtungen sollen für $0 < \omega t < 2\pi$ erfolgen.

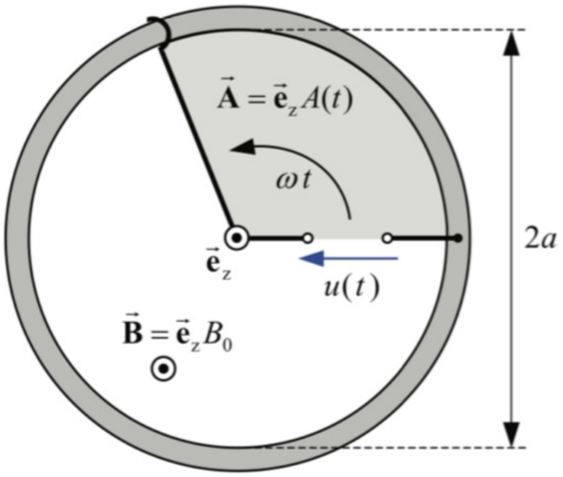


Abbildung 1: Rotierender Zeiger im homogenen Magnetfeld

Berechnen Sie die in Abb. 1 eingetragene induzierte Spannung $u(t)$, die sich infolge der Bewegung zwischen dem Drehpunkt des Zeigers und dem Metallring einstellt.

Lösung

Wird das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke um die markierte Fläche $A(t)$ in Richtung der eingetragenen Spannung gebildet, dann zeigt der rechtshändig verknüpfte Fluss $\Phi(t)$ in die Zeichenebene hinein, also in −z-Richtung. Aus dem Induktionsgesetz

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = u(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)$$

ergibt sich mit dem magnetischen Fluss

$$\Phi(t) = -\int_{\varphi=0}^{\omega t}\int_{\rho=0}^{a} \vec{\mathbf{e}}_z B_0 \cdot \vec{\mathbf{e}}_z \rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{2}a^2 B_0 \omega t$$

als Ergebnis die Spannung

$$u(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}a^2\omega B_0 .$$