

# 12. Übung (Brainrot edition)

+ Extra Fokus auf Aufgaben

Rares Sahleanu

Email

[rsahleanu@gmail.com](mailto:rsahleanu@gmail.com)



Discord

[raresbares](#)



Youtube

[Rares Circuits](#)

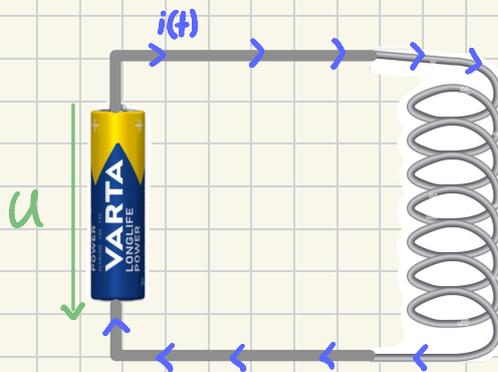
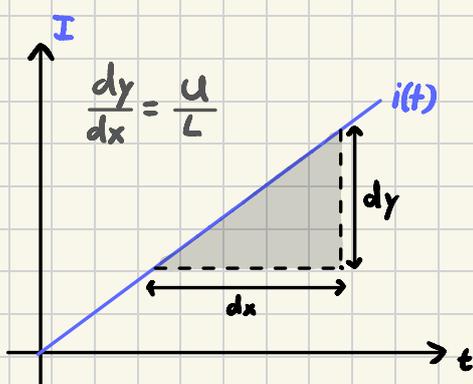




# Energieinhalt des Feldes - basic Spule

Spulen sind (genauso wie Kondensatoren) Energiespeicher. Während Kapazitäten Energie im elektrischen Feld speichern, tun Induktivitäten das im magnetischen Feld

Kurze Herleitung der Formel:



$$u(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} i(t) = \frac{u(t)}{L}$$

⇒ Ist die Spannung konstant (wie bei einer U-Quelle) so steigt der Strom linear

Allgemeine Formel für Leistung

$$P(t) = u(t) i(t) = L \frac{di}{dt} i(t)$$

Leistung \* Zeit = Arbeit

$$W(t) = \int_0^t P(t) dt = \int_0^t L \frac{di}{dt} i(t) dt$$

$$= \int_0^I \overset{\text{Endstrom}}{L} i(t) di = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi I$$

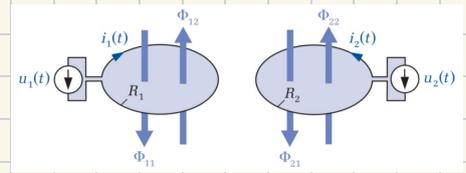
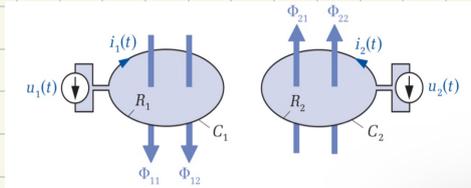


# Energieinhalt des Feldes - Kopplung



$$W_m = \frac{1}{2} \times |\Phi| \times I$$

Bei **Kopplung** kommt es drauf an  $\Phi$  als **Superposition** von  $\Phi_{ij}$  zu betrachten



Für Spule 1:  $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$

Für Spule 1:  $\Phi_1 = \Phi_{11} - \Phi_{12}$

Für Spule 2:  $\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$

Für Spule 2:  $\Phi_2 = \Phi_{22} - \Phi_{21}$

Mit  $\Phi_{ij} = L_{ij} I_j$  lässt sich die **allgemeine Formel** berechnen für **gekoppelte Spulen**

Für n Spulen:  $W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overbrace{L_{ij}}^{\hat{=} \phi_{ij}} \times I_j \times I_i$   
Kann negativ sein falls  $\phi_{ij} \uparrow \phi_{ji}$

Für 2 Spulen:  $W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2$



1. Gehe jede **Spule** durch und berechne ihre **Energie**

2. Für jede **Spule**: Berechne die **Gegenflüsse**

$\Rightarrow \phi_{ki} = L_{ki} \cdot I_i$  negativ wenn  $L_{ki} \uparrow L_{kk}$

3. Für jede **Spule**: Berechne die **Gegenenergien**  $W_{mi} = \phi_{ki} \cdot I_k$

4. Addiere Alles **zusammen**

# Energieinhalt des Feldes - Feldgrößen

Energiedichte

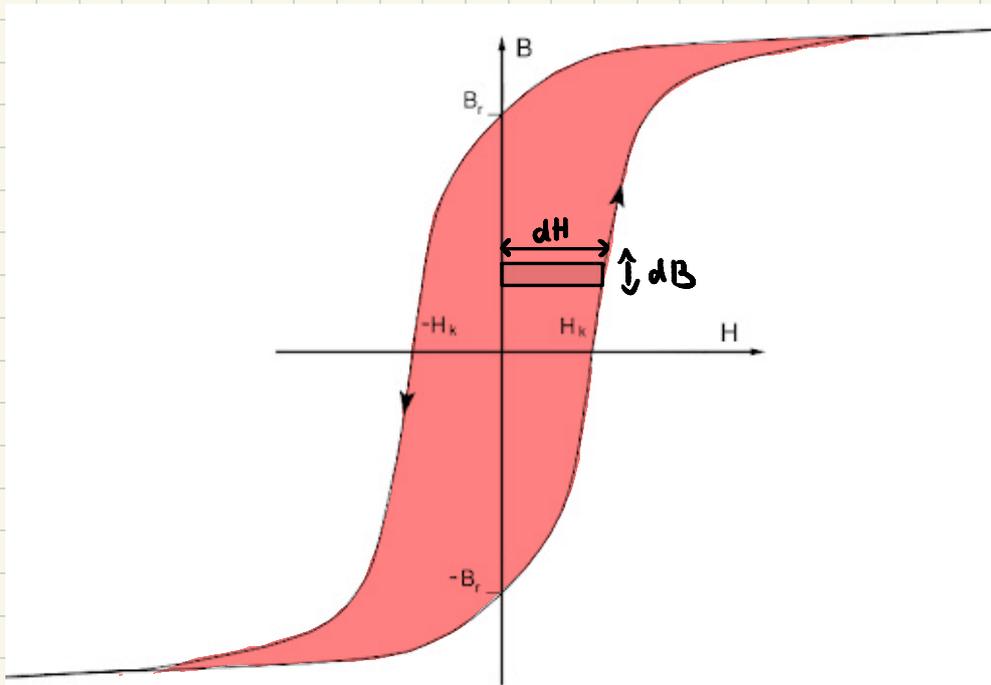
$$w_m = \int_0^B \vec{H} d\vec{B} = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} = \frac{1}{2} H B$$

$H(B) = \frac{1}{\mu} B$  "ohne Hysterese"

Energie

$$W_m = \text{Volumen} \times w_m$$

Hysterese-verluste lassen sich sehr leicht bestimmen. Bei einem Hysterese-umlauf entspricht dieser der von der Kurve eingeschlossenen Fläche



! Es reicht nur eine Hälfte zu betrachten, da die Hysterese Kurve symmetrisch ist.

# Aufgabe 1



Die beiden Leiter einer Doppelleitung besitzen den Mittelpunktsabstand  $h$  und liegen in der Ebene  $y = 0$  an den Stellen  $x = \pm h/2$ . Die Leiter einer zweiten Doppelleitung liegen in der Ebene  $y = h$  an den Stellen  $x = x_0 \pm h/2$ . Zu berechnen ist die Gegeninduktivität pro Längeneinheit  $M/l$  als Funktion der Mittelpunktsposition  $0 \leq x_0 \leq 4h$ .

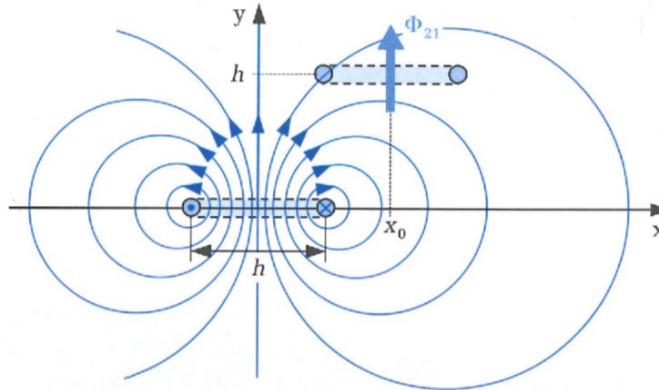


Abbildung 6.24: Zwei unendlich lange Doppelleitungen

## Lösung:

Mit den Abstandsbezeichnungen in Abb. 6.23 erhalten wir aus Gl. (6.41) unmittelbar das Ergebnis

$$\frac{M}{l} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{bc}{ad} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x_0 - h)^2 + h^2} \sqrt{(x_0 + h)^2 + h^2}}{\sqrt{x_0^2 + h^2} \sqrt{x_0^2 + h^2}} \rightarrow$$

$$\frac{M/l}{\mu H/m} = \frac{1}{10} \ln \frac{(\eta^2 + 2)^2 - 4\eta^2}{(\eta^2 + 1)^2} \quad \text{mit der Abkürzung } \eta = \frac{x_0}{h}. \quad (6.46)$$

Den größten Wert weist die Gegeninduktivität auf, wenn die beiden Doppelleitungen exakt übereinanderliegen. Wird die obere Doppelleitung nach rechts verschoben, dann nimmt der Fluss  $\Phi_{21}$  und damit auch  $M$  ab. Befindet sich diese Doppelleitung im Bereich  $x_0 > 1,25h$ , dann kehrt der Fluss sein Vorzeichen um und die in Gl. (6.45) einzusetzende Gegeninduktivität  $M$  wird negativ.

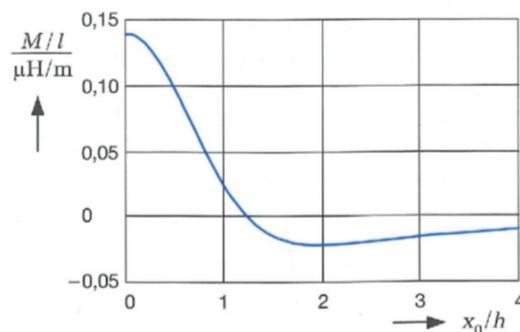


Abbildung 6.25: Gegeninduktivität pro Längeneinheit der beiden Doppelleitungen in Abb. 6.24

Zwischen diesen beiden Bereichen existiert eine Nullstelle für  $M$ . Eine solche Nullstelle tritt immer dann auf, wenn die beiden Einzelleiter (von der oberen Doppelleitung) auf der gleichen Feldlinie (hervorgerufen von der unteren Doppelleitung) liegen, so dass der Fluss  $\Phi_{21}$  durch die Leiterschleife verschwindet. In diesem Fall tritt keine gegenseitige Beeinflussung zwischen den beiden Doppelleitungen auf, sie sind entkoppelt und können wie zwei voneinander unabhängige Induktivitäten behandelt werden.

# Aufgabe 2



## Aufgabe 6.3 Zylindrische Luftspule, Induktionsgesetz

In Abb. 1a ist die Vorderansicht einer aus  $N$  Windungen bestehenden zylindrischen Luftspule der Länge  $l$  mit dem Radius  $a \ll l$  dargestellt. Im Inneren befindet sich eine ringförmige Leiterschleife mit dem Radius  $b < a$ , die mit einem idealen Spannungsmessgerät verbunden ist. Das von der Spule erzeugte magnetische Feld kann im Bereich der Leiterschleife als homogen angesehen werden. Die Lage der Leiterschleife kann der Abb. 1b entnommen werden, die den Schnitt in der  $xy$ -Ebene darstellt. Durch die Spule fließt der zeitabhängige Strom  $i(t) = \hat{i} \sin(\omega t)$  mit der Zählrichtung aus Abb. 1.

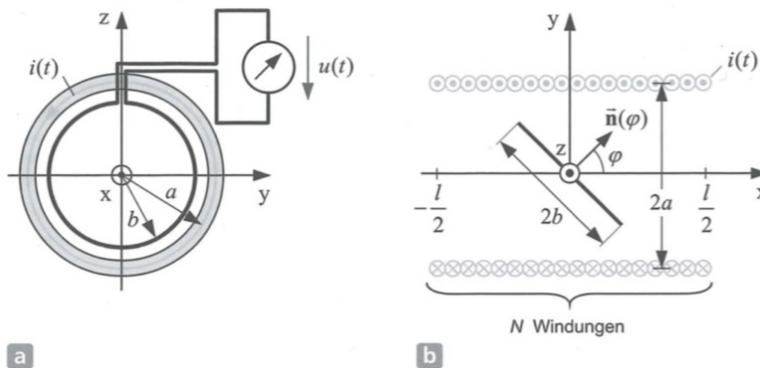


Abbildung 1: a: Vorderansicht bei  $\varphi = 0$ , b: Schnitt durch die zylindrische Luftspule

1. Welche magnetische Flussdichte  $\mathbf{B}$  stellt sich im Inneren der Spule ein?
2. Wie groß ist der magnetische Fluss  $\Phi(t)$  durch die ringförmige Leiterschleife in Richtung der Flächennormalen  $\mathbf{n}(\varphi)$ ?
3. Berechnen Sie den Zeitverlauf der Spannung  $u(t)$  des idealen Spannungsmessgeräts in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$ .

**Lösung** zur Teilaufgabe 1:

Im Inneren der Spule stellt sich folgende Flussdichte ein:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \stackrel{(5.28)}{=} \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 N i(t)}{l}$$

**Lösung** zur Teilaufgabe 2:

Die senkrecht auf der von der Leiterschleife aufgespannten Fläche stehende Flächennormale kann durch die Beziehung  $\mathbf{n}(\varphi) = \mathbf{e}_x \cos(\varphi) + \mathbf{e}_y \sin(\varphi)$  beschrieben werden. Mit dem Flächenelement  $dA = \mathbf{n}(\varphi) dA$  erhalten wir dann den magnetischen Fluss

$$\begin{aligned} \Phi &\stackrel{(5.30)}{=} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \iint_A \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 N i(t)}{l} \cdot (\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi) dA \\ &= \frac{\mu_0 N i(t)}{l} \cos \varphi \iint_A dA = \frac{\mu_0 N i(t) \pi b^2}{l} \cos \varphi. \end{aligned}$$

**Lösung** zur Teilaufgabe 3:

Bei der Anwendung des Induktionsgesetzes ist die rechtshändige Verknüpfung zwischen der magnetischen Flussdichte durch die Schleife und dem Wegintegral der elektrischen Feldstärke zu beachten. Die Flussdichte ist  $x$ -gerichtet, zeigt also aus der Zeitebene heraus, damit ist die Integration entlang der Schleife im Gegenuhrzeigersinn durchzuführen. Für den Zeitverlauf der gemessenen Spannung erhalten wir mit

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -u(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 N \pi b^2}{l} \cos \varphi \frac{d}{dt} [\hat{i} \sin(\omega t)]$$

das Ergebnis

$$u(t) = \omega \hat{i} \frac{\mu_0 N \pi b^2}{l} \cos \varphi \cos(\omega t).$$

# Aufgabe 3



## 6.3 Level 2

### Aufgabe 6.8 U-Kern mit bewegtem I-Joch, Induktionsgesetz

Gegeben ist die aus einem Ferritmaterial der Permeabilität  $\mu$  bestehende Kombination aus einem U-Kern und einem I-Joch. Alle Schenkel haben einen quadratischen Querschnitt mit der Seitenlänge  $a$ . Die einzelnen Abschnitte der effektiven Weglängen sind in Abb. 1 eingezeichnet.

Auf dem U-Kern befindet sich eine Wicklung mit der Windungszahl  $N_1$ , die vom Gleichstrom  $I_q$  in der angegebenen Richtung durchflossen wird. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  homogen über den Kernquerschnitt verteilt ist.

Nun wird das I-Joch, beginnend beim Startpunkt  $s(t=0) = 0$ , mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v} = \vec{e}_x v_0$  in Richtung der Koordinate  $x$  bewegt. Infolge des sich ändernden Flusses  $\Phi(t)$  stellt sich an den offenen Klemmen der zweiten Wicklung mit der Windungszahl  $N_2$  die Induktionsspannung  $u(t)$  ein.

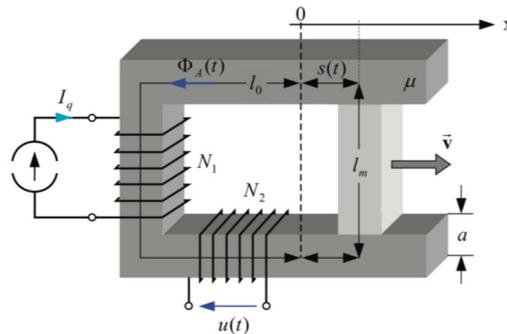


Abbildung 1: U-Kern mit bewegtem I-Joch

1. Berechnen Sie den Fluss  $\Phi_A(t)$  in Abhängigkeit des Stromes  $I_q$ .
2. Geben Sie den zeitlichen Verlauf der Spannung  $u(t)$  an.

Die Anwendung des Durchflutungsgesetzes nach Gl. (5.22) entlang der in Abb. 2 eingezeichneten Kontur  $C$  liefert den Zusammenhang

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = H(t) [l_0 + l_m + 2s(t)] = \Theta = N_1 I_q.$$

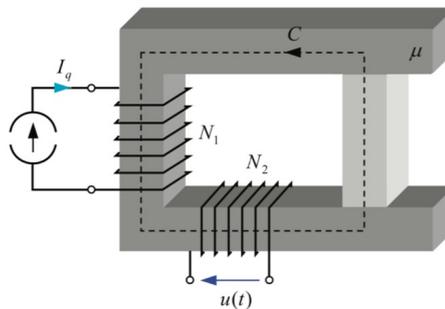


Abbildung 2: Integrationsweg

Mit der homogen über den Kernquerschnitt verteilten Flussdichte  $\vec{B}(t) = \mu \vec{H}(t)$  erhalten wir den Fluss durch den Kern durch einfache Multiplikation mit der Querschnittsfläche:

$$\Phi_A(t) = B(t) a^2 = \mu a^2 \frac{N_1 I_q}{l_0 + l_m + 2s(t)}.$$

**Lösung** zur Teilaufgabe 2:

Die Anwendung des Induktionsgesetzes auf die zweite Schleife führt auf den Zusammenhang

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = u(t) = -\frac{d}{dt} \Phi = -N_2 \frac{d}{dt} \Phi_A = -\mu a^2 N_1 N_2 I_q \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{l_0 + l_m + 2s(t)} \right].$$

Die Ausführung der Integration liefert

$$u(t) = -\mu a^2 N_1 N_2 I_q \frac{d}{dt} [l_0 + l_m + 2s(t)]^{-1} = \frac{\mu a^2 N_1 N_2 I_q}{[l_0 + l_m + 2s(t)]^2} 2 \frac{ds(t)}{dt} = \frac{2\mu a^2 N_1 N_2 I_q v_0}{(l_0 + l_m + 2v_0 t)^2}.$$

und damit resultierend die Spannung

$$u(t) = \frac{2v_0 \mu a^2 N_1 N_2 I_q}{(l_0 + l_m + 2v_0 t)^2}.$$

# Aufgabe 4



## Aufgabe 6.13 Induktivitätserhöhung durch Ferritring

Ein praktisch unendlich langer, gerader Runddraht (Permeabilität  $\mu_0$ , Radius  $a$ ) führt den Gleichstrom  $I$ . Der Rückleiter ist sehr weit entfernt, sodass sein Einfluss vernachlässigt werden kann. Um den Draht wird ein Hohlzylinder aus nicht leitendem, permeablem Material (Permeabilität  $\mu > \mu_0$ , Länge  $l$ , Innenradius  $b$ , Außenradius  $c$ ) konzentrisch angeordnet.

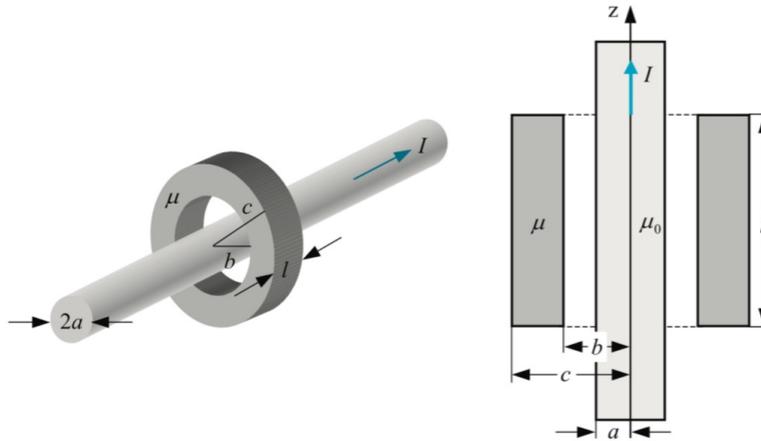


Abbildung 1: Kupferrunddraht mit Ferritring

1. Um welchen Betrag ändert sich die magnetische Energie durch das Anbringen des permeablen Hohlzylinders?
2. Welche zusätzliche Induktivität erhält der Stromkreis durch das Anbringen des permeablen Hohlzylinders?

**Lösung** zur Teilaufgabe 1:

Die magnetischen Feldlinien sind konzentrische Kreise um den Linienleiter. Der permeable Ringkern ist so angeordnet, dass die magnetischen Feldlinien überall tangential zur Oberfläche des Ringkerns verlaufen. Wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke an einer Materialsprungstelle mit unterschiedlichen Permeabilitäten nach Gl. (5.42) wird sich das Feldbild nicht ändern. Die magnetische Feldstärke bleibt nach Gl. (5.19) gleich, die magnetische Flussdichte  $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$  wird ausschließlich im Bereich des Ringkerns um den Faktor  $\mu_r$  größer.

**Lösung** zur Teilaufgabe 2:

Für die Zunahme der Induktivität erhalten wir

$$\Delta L = \frac{2\Delta W_m}{I^2} = (\mu - \mu_0) \frac{l}{2\pi} \ln \frac{c}{b}.$$



Abbildung 2: Praktische Realisierung

# Aufgabe 5



## Aufgabe 6.18 Induktionsgesetz, Induktivitätsberechnung

Auf dem linken Ferritkern in Abb. 1 mit der mittleren Kernlänge  $l_m$ , der Querschnittsfläche  $A$  und der endlichen Permeabilitätszahl  $\mu_{ra}$  sind zwei Wicklungen mit  $N_1$  bzw.  $N_2$  Windungen aufgebracht. Die Sekundärseite ist mit der aus  $N_3$  Windungen bestehenden Wicklung, die sich auf dem rechten Ferritkern befindet, verbunden. Dieser rechte Ferritkern besitzt die gleiche Querschnittsfläche  $A$  und einen Luftspalt der Länge  $l_g$ , wobei das Kernmaterial eine sehr große Permeabilitätszahl ( $\mu_{rb} \rightarrow \infty$ ) aufweist. Das magnetische Feld kann in diesem Luftspalt und in beiden Kernen als homogen über den Querschnitt verteilt angenommen werden.

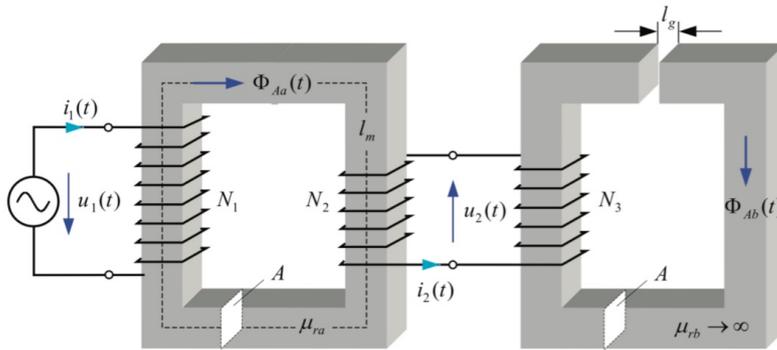


Abbildung 1: Anordnung mit Übertrager und separater Spule

1. Berechnen Sie abhängig von den Strömen  $i_1(t)$  und  $i_2(t)$  die in der Abbildung eingetragenen Teilflüsse  $\Phi_{Aa}(t)$  und  $\Phi_{Ab}(t)$ .
2. Drücken Sie die Spannung  $u_1(t)$  in Abhängigkeit von  $i_1(t)$  und  $i_2(t)$  aus, indem Sie das Konturintegral der elektrischen Feldstärke entlang der Leiterschleife 1 bilden.
3. Drücken Sie die Spannung  $u_2(t)$  sowohl in Abhängigkeit von  $\Phi_{Aa}(t)$  als auch von  $\Phi_{Ab}(t)$  aus. Welcher Zusammenhang besteht damit zwischen den Teilflüssen  $\Phi_{Aa}(t)$  und  $\Phi_{Ab}(t)$ ? Wie hängt die zeitliche Änderung des Stromes  $di_2(t)/dt$  von der zeitlichen Änderung des Stromes  $di_1(t)/dt$  ab?
4. Bestimmen Sie die an die Spannungsquelle angeschlossene Induktivität  $L$  der Anordnung aus der Beziehung  $u_1(t) = L di_1(t)/dt$ .

**Lösung** zur Teilaufgabe 1:

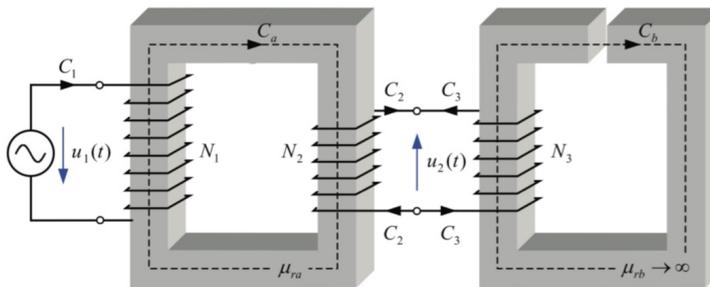


Abbildung 2: Betrachtete Anordnung mit eingezeichneten Integrationswegen

Wir betrachten zunächst den linken Ferritkern. Das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke im Kern in Richtung des Flusses  $\Phi_{Aa}(t)$  liefert entsprechend dem Durchflutungsgesetz den Zusammenhang

$$\oint_{C_a} \vec{H}_a \cdot d\vec{s} = H_a l_m \stackrel{(5.22)}{=} \Theta_a(t) \stackrel{(5.21)}{=} N_1 i_1(t) - N_2 i_2(t).$$

Mit der in Richtung von  $\Phi_{Aa}(t)$  orientierten Flussdichte im Kern  $\vec{B}_a = \mu_{ra} \mu_0 \vec{H}_a$  erhalten wir den Fluss

$$\Phi_{Aa}(t) \stackrel{(5.30)}{=} \iint_A \vec{B}_a \cdot d\vec{A} = B_a A = \frac{\mu_{ra} \mu_0 A}{l_m} [N_1 i_1(t) - N_2 i_2(t)] \quad (1)$$

durch die Querschnittsfläche  $A$ . Im rechten Ferritkern verschwindet die Feldstärke wegen  $\mu_{rb} \rightarrow \infty$ . Die Integration liefert daher nur im Bereich des Luftspaltes einen Beitrag:

$$\oint_{C_b} \vec{H}_b \cdot d\vec{s} = H_b l_g = \Theta_b(t) = N_3 i_2(t).$$

Die Flussdichte besitzt wegen der Stetigkeit der Normalkomponente beim Übergang vom Luftspalt in das Kernmaterial sowohl im Luftspalt als auch im Kern den gleichen Wert  $\vec{B}_b = \mu_0 \vec{H}_b$ . Damit gilt für den Fluss im rechten Kern

$$\Phi_{Ab}(t) = \iint_A \vec{B}_b \cdot d\vec{A} = B_b A = \frac{\mu_0 A}{l_g} N_3 i_2(t). \quad (2)$$

**Lösung** zur Teilaufgabe 2:

Die Spannung folgt aus dem Konturintegral entlang der Schleife  $C_1$ :

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -u_1(t) = -N_1 \frac{d\Phi_{Aa}(t)}{dt}$$
$$u_1(t) = N_1 \frac{\mu_{ra}\mu_0 A}{l_m} \left[ N_1 \frac{di_1(t)}{dt} - N_2 \frac{di_2(t)}{dt} \right]. \quad (3)$$

**Lösung** zur Teilaufgabe 3:

Konturintegrale entlang der Schleifen  $C_2$  und  $C_3$ :

$$\oint_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -u_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi_{Aa}(t)}{dt}$$
$$\oint_{C_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -u_2(t) = -N_3 \frac{d\Phi_{Ab}(t)}{dt}.$$

Aus den beiden Beziehungen folgt unmittelbar der Zusammenhang zwischen den beiden Flüssen:

$$N_2 \frac{d\Phi_{Aa}(t)}{dt} = N_3 \frac{d\Phi_{Ab}(t)}{dt}. \quad (4)$$

Einsetzen der Gln. (1) und (2) in die Gl. (4)

$$N_2 \frac{\mu_{ra}\mu_0 A}{l_m} \left[ N_1 \frac{d}{dt} i_1(t) - N_2 \frac{d}{dt} i_2(t) \right] = N_3 \frac{\mu_0 A}{l_g} N_3 \frac{d}{dt} i_2(t)$$

und Umsortieren liefert

$$\frac{d}{dt} i_2(t) = \frac{N_1 N_2 \mu_{ra} l_g}{N_3^2 l_m + N_2^2 \mu_{ra} l_g} \frac{d}{dt} i_1(t). \quad (5)$$

**Lösung** zur Teilaufgabe 4:

Aus den bisherigen Gleichungen lässt sich die Induktivität bestimmen:

$$u_1(t) \stackrel{(3,5)}{=} N_1^2 \frac{\mu_{ra}\mu_0 A}{l_m} \left[ 1 - \frac{N_2^2 \mu_{ra} l_g}{N_3^2 l_m + N_2^2 \mu_{ra} l_g} \right] \frac{di_1(t)}{dt} = N_1^2 \underbrace{\frac{N_3^2 \mu_{ra}\mu_0 A}{N_3^2 l_m + N_2^2 \mu_{ra} l_g}}_L \frac{di_1(t)}{dt}$$