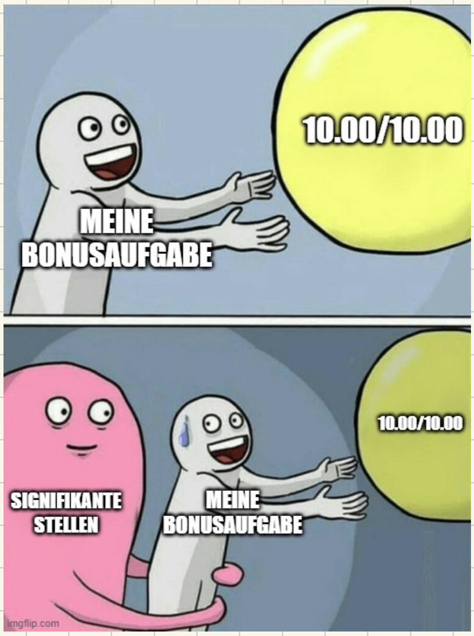
3. Übung

Rares Sahleanu
rsahleanu@ethz.ch

Einschub – signifikante Stellen



Man zählt von links nach rechts alle Zahlen exklusive der führenden Nullen.

Beispiel: $0.00010200 \cdot 10^{-20}$ Volt

$\cancel{0} , \cancel{0}\ \cancel{0}\ \cancel{0}\ \overset{\text{I}}{1}\ \overset{\text{II}}{0}\ \overset{\text{III}}{2}\ \overset{\text{IV}}{0}\ \overset{\text{V}}{0}\ \cancel{\times 10^{-20}}$ Volt

Zehnerpotenzen sind für sig. Stellen irrelevant

⇒ Anzahl signifikanter Stellen: 5

! Bei einer Rechnung wird der Output auf das Minimum der signifikanten Stellen der Inputs gerundet

Beispiel:

$\overbrace{\overset{\text{I}}{1}\overset{\text{II}}{0}.\overset{\text{III}}{5}}^{3}$ Volt $\times$ $\overbrace{\cancel{0}.\overset{\text{I}}{5}\overset{\text{II}}{0}}^{2} \cdot \cancel{10^{2}}$ Ampère $= \overset{\text{I}}{5}\overset{\text{II}}{2}\overset{\text{III}}{5}$ Watt   ⇒ min = 2

$\approx 0.\overset{\text{I}}{5}\overset{\text{II}}{3}$ kilowatt

($\approx$ 530 Watt)

Beispiele:

5   1 signifikante Stelle

2.0   2 signifikante Stellen

0.10   2 signifikante Stellen

$0.0100 \cdot 10^{-5}$ 3 signifikante Stellen

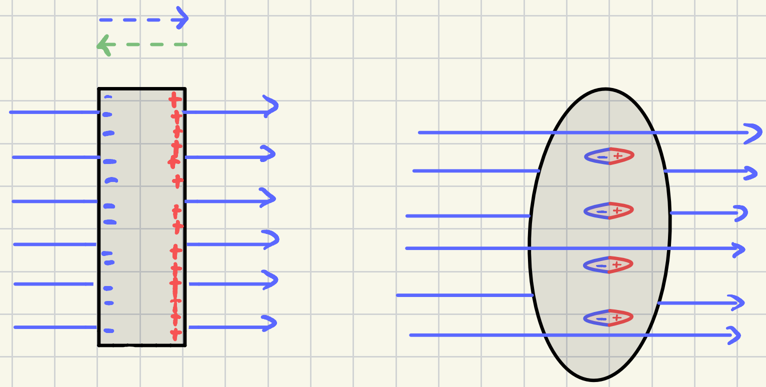
105.5   4 signifikante Stellen

100   3 signifikante Stellen

Elektronenkonfiguration	$1s^1$
1. Ionisierungsenergie	13,598 434 49(8) eV[5] ≈ 1.312,05 kJ/mol[6]
Physikalisch[2]	
Aggregatzustand	gasförmig (H_2)
Dichte	gasförmig: 0,0899 kg/m^3 bei 273 K[7] flüssig: 0,0709 g/cm^3 bei 20,324 K
Magnetismus	diamagnetisch ($\chi_m = -2{,}2 \cdot 10^{-9}$)[8]
Schmelzpunkt	14,01 K (−259,14 °C)
Siedepunkt	21,15 K[9] (−252 °C)
Molares Volumen	fest: $11{,}42 \cdot 10^{-6}$ m^3·mol^{-1}
Verdampfungsenthalpie	0,90 kJ·mol^{-1}[9]
Schmelzenthalpie	0,558 kJ·mol^{-1}
Schallgeschwindigkeit	1270 m·s^{-1} bei 298,15 K
Spezifische Wärmekapazität	14304 J·kg^{-1}·K^{-1}
Wärmeleitfähigkeit	0,1805 W·m^{-1}·K^{-1}
Chemisch[2]	
Oxidationszustände	−1, ±0, +1
Normalpotential	**0** V (Referenz: 2 H^+ + 2 e^- ⇌ H_2)
Elektronegativität	2,2 (Pauling-Skala)
Isotope	

21:00

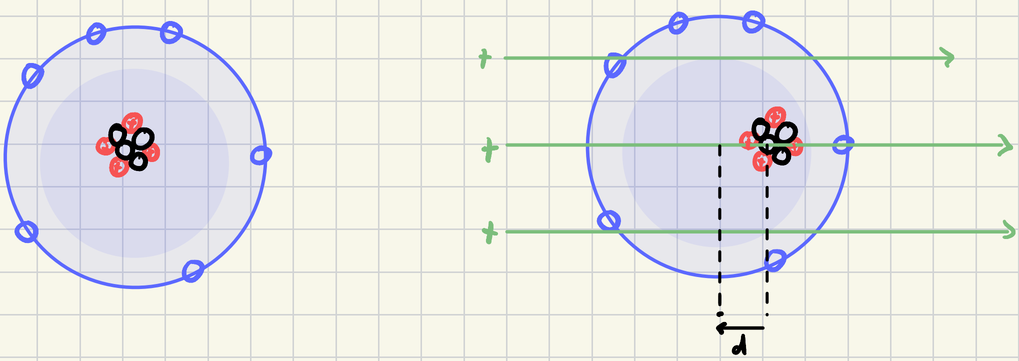
1.14 Die dielektrische Polarisation



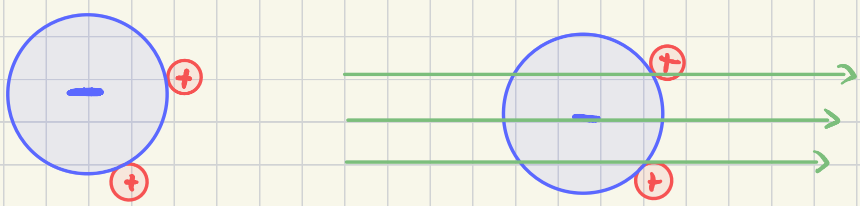
Wirkt ein äußeres E-Feld auf ein Material, so tritt eine Ladungs-verschiebung (Polarisation) auf.

3 Arten der Polarisation

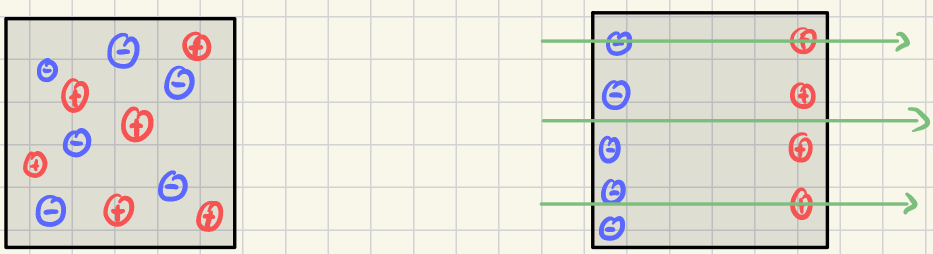
Elektronen-polarisation



Orientierungs-polarisation

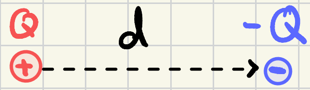


Verschiebungs polarisation



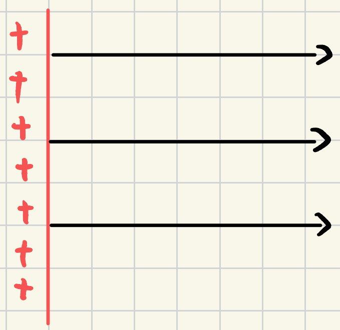
Das Dipolmoment $\vec{p}$: „Einheit für Ladungsverschiebung"

$$\vec{p} = Q\vec{d}$$

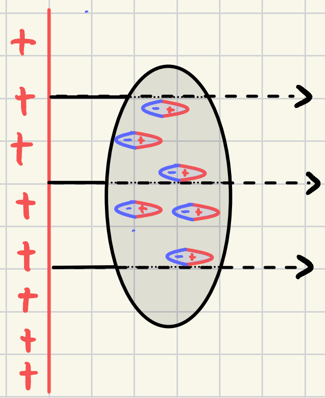


Die elektrische Polarisation „Einheit für Ladungsverschiebungsdichte"

$$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum_{n=1}^{N}\vec{p}_n = \frac{N\vec{p}}{V}$$

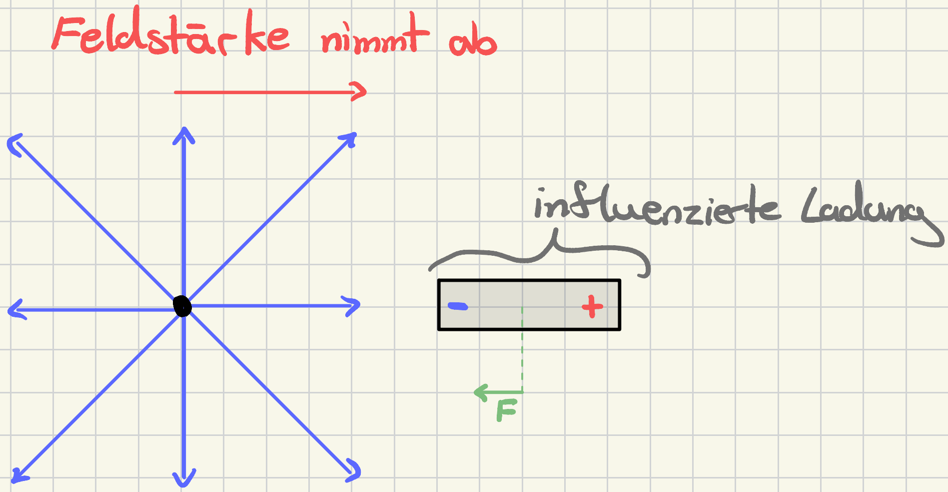


$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D}$$



$$E = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{D}$$

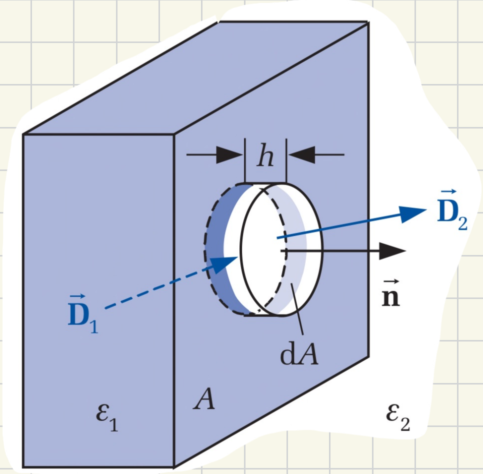
1.15 Kräfte im homogenen Feld



⇒ negative Ladung wird weniger angezogen als die positive Ladung abgestoßen wird

⇒ Result: Nettokraft

1.16 Sprungstellen der Dielektrititätskonstante

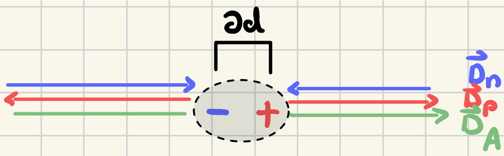


Ladungsdipole sind kleindimensionel

$$\Rightarrow D_{n1} = D_{n2}$$

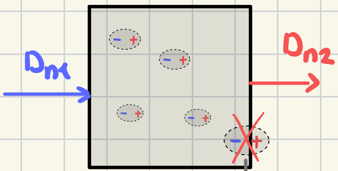
$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$



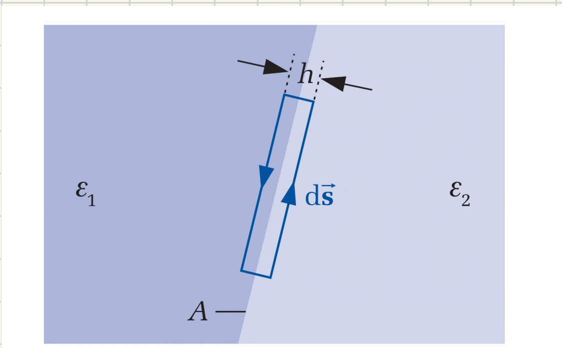
Da ∂d sehr klein ist ist $|\vec{D}_p| \approx |\vec{D}_e|$

$$\Rightarrow \vec{D}_A + \vec{D}_p + \vec{D}_e = \vec{D}_A$$



$$\Rightarrow \text{Netto } Q = \big((+Q)+(-Q)\big)\cdot N = 0 = \oiint \vec{D}\, d\vec{A}$$

↳ da ∂d klein ist ist dieser Fall zu vernachlässigen



$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} \Rightarrow E_{t1} = E_{t2}$$

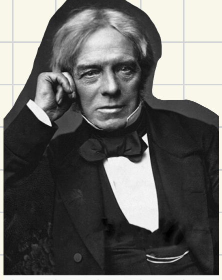
$$\Downarrow$$

$$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Ableitung des Brechungsgesetz

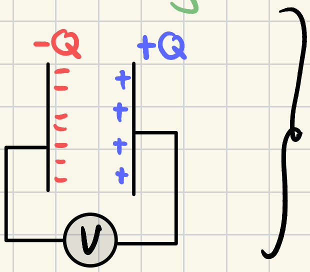
$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

1.17 Die Kapazität



Michael Faraday

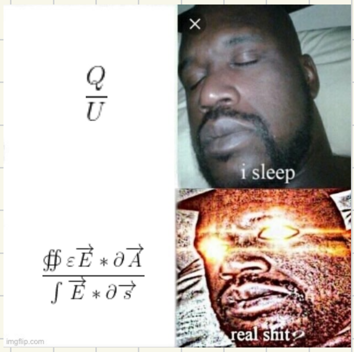
Beobachtungen



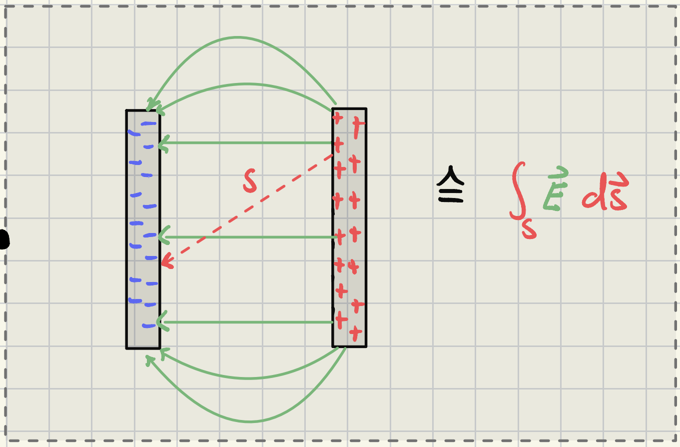
Die pro Platte aufgenommene Ladung $|Q|$ ist proportional zur (angelegten) Spannung U

Kapazität $C = \frac{Q}{U} = \frac{\oiint \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E}\, d\vec{s}}$

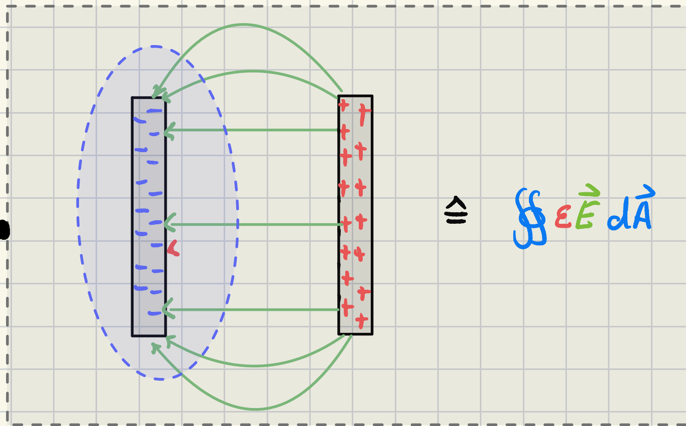
[F] "Farad"



$\frac{\oiint \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E}\, d\vec{s}}$



$\hat{=} \int_s \vec{E}\, d\vec{s}$



$\hat{=} \oiint \varepsilon \vec{E}\, d\vec{A}$

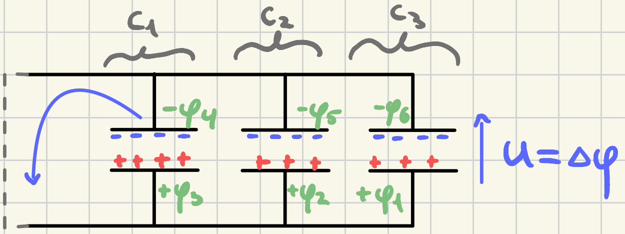
Plattenkondensator

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Kugelkondensator

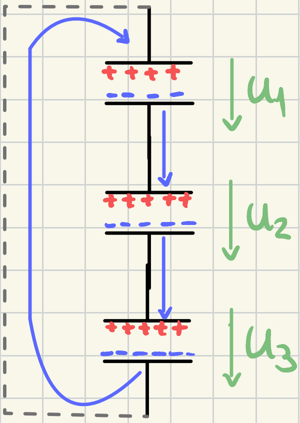
$$C = \varepsilon \frac{4\pi\, b \cdot a}{b - a}$$

1.18 Einfache Kondensator Netzwerke



Bei einer Parallelschaltung von Kapazitäten addieren sich diese zu einer Gesamtkapazität:

$$C_{ges} = \sum C_k$$



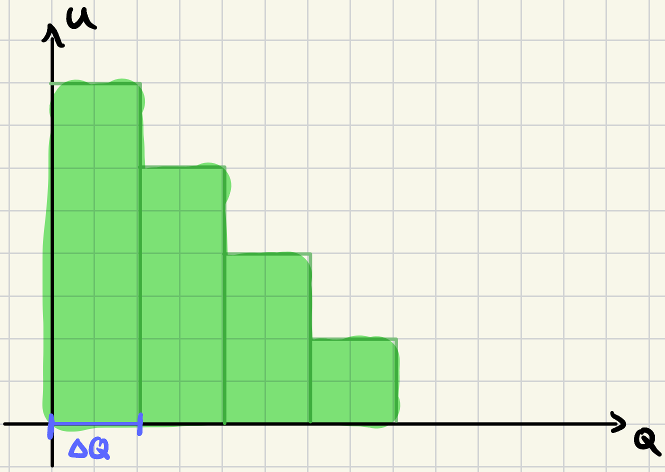
Bei einer Serienschaltung von Kapazitäten addieren sich die Kehrwerte zum Kehrwert der Gesamtkapazität:

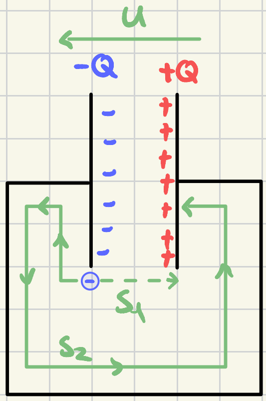
$$C_{ges} = \frac{Q_{ges}}{U_{ges}} = \frac{Q}{\sum U_k} \Rightarrow \frac{1}{C_{ges}} = \sum \frac{1}{C_k}$$

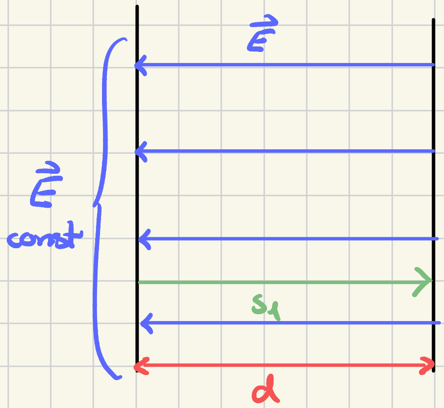
Funfact:

- Widerstände
- Spulen
- Federn
- Optische / Akustische Impedanzen

1.21 Der Energieinhalt des Feldes







Energie (abgegeben) pro Elektron

"Wegunabhängigkeit"

$$W_e = (-1) \cdot - \int_{s_2} q \cdot \vec{E} \, d\vec{s} = q \cdot \int_{s_1} \vec{E} \, d\vec{s} = q \cdot E \cdot d$$

$$= q\,U$$

Gesamtenergie (abgegeben)

$$W_t = \int_0^Q w_e \, dq = U \int_0^Q q \, dq = \frac{1}{2} Q U$$

$$\boxed{W_t = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

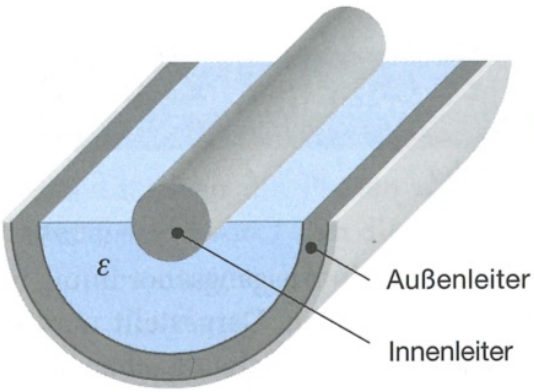
Energiedichte $\quad w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} \quad$ "Energie pro Volumen"

Energie $\quad W_e = \iiint_V w_e \, dV$

Aufgabe 1

Beispiel 1.5: Kapazität eines Koaxialkabels

Gegeben ist ein Koaxialkabel mit einem Innenleiter des Durchmessers $2a$ und einem üblicherweise aus metallischem Geflecht bestehenden Außenleiter, der den Innendurchmesser $2b$ und den Außendurchmesser $2c$ aufweist. In dem Zwischenraum befindet sich ein Material mit der Dielektrizitätskonstante ε. Die um den Außenleiter angebrachte Schutzisolierung spielt bei der folgenden Betrachtung keine Rolle. Zu bestimmen ist die Kapazität des Kabels pro Längeneinheit.



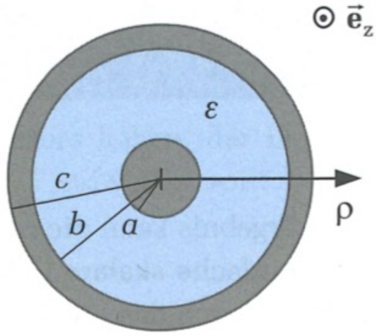


Abbildung 1.33: Querschnitt durch die Koaxialleitung

Lösung:

Im ersten Schritt wird pro Längeneinheit des Kabels eine Ladung $+Q$ auf dem Innenleiter und eine Ladung $-Q$ auf dem Außenleiter vorgegeben. Die Ladung auf dem Innenleiter wird sich als homogene Flächenladung auf der Leiteroberfläche verteilen. Die Berechnung der von dieser Ladung ausgehenden Flussdichte erfolgt analog zum Beispiel 1.2 und liefert das Ergebnis (1.39). Mit der Spannung zwischen Innen- und Außenleiter

$$U = \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \overset{(1.39)}{=} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \vec{\mathbf{e}}_\rho \frac{Q}{2\pi a l} \frac{a}{\rho} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\rho d\rho = \frac{Q}{2\pi \varepsilon l} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{Q}{2\pi \varepsilon l} \ln \frac{b}{a} \tag{1.83}$$

erhalten wir die gesuchte Kapazität pro Länge

$$\frac{C}{l} = \frac{Q/l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} . \tag{1.84}$$

Aufgabe 2

Beispiel 1.7: Parallelschaltung von Kondensatoren

Zwei Kondensatoren C_1 und C_2 mit den unterschiedlichen Spannungen U_1 und U_2 sollen parallel geschaltet werden, d.h. die Anschlüsse mit dem jeweils höheren Potential und die Anschlüsse mit dem jeweils niedrigeren Potential werden leitend miteinander verbunden. Wie ändert sich die Gesamtenergie durch diese Maßnahme?

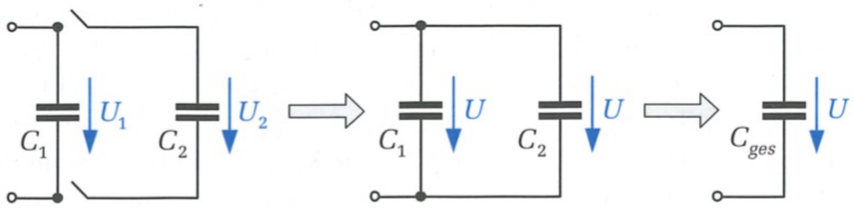


Abbildung 1.42: Zusammenschaltung der Kondensatoren

Lösung:

Im Ausgangszustand beträgt die Energie

$$W_{e0} \overset{(1.94)}{=} \frac{1}{2}C_1U_1^{\,2} + \frac{1}{2}C_2U_2^{\,2}. \tag{1.95}$$

Nach dem Zusammenschalten beträgt die Gesamtkapazität nach Gl. (1.85) $C_{ges} = C_1 + C_2$. Da die Ladungssumme erhalten bleiben muss (vgl. Kap. 1.1), befindet sich auf dem Kondensator C_{ges} die Gesamtladung $Q_{ges} = Q_1 + Q_2 = C_1U_1 + C_2U_2$. Für die Energie in den parallel geschalteten Kondensatoren gilt demnach

$$W_e \overset{(1.94)}{=} \frac{1}{2}\frac{Q_{ges}^{\;2}}{C_{ges}} = \frac{1}{2}\frac{(C_1U_1 + C_2U_2)^2}{C_1 + C_2}. \tag{1.96}$$

Die Energiedifferenz infolge des Zusammenschaltens

$$\Delta W_e = W_e - W_{e0} = \frac{-C_1C_2}{2(C_1 + C_2)}(U_1 - U_2)^2 < 0 \tag{1.97}$$

ist negativ und entspricht daher einer Energieabnahme. Dieser Energieverlust wird verursacht durch die Ladungsträgerbewegung in den Verbindungsleitungen (vgl. Kap. 2) sowie durch die Abstrahlung elektromagnetischer Felder und ist umso größer, je größer die Spannungsdifferenz $U_1 - U_2$ vor dem Zusammenschalten ist.

Nach dem Zusammenschalten ist die Spannung an beiden Kondensatoren gleich und nimmt den Wert

$$U = \frac{Q_{ges}}{C_{ges}} = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} \tag{1.98}$$

an. Bei dem Sonderfall zweier Kondensatoren mit gleicher Kapazität $C_1 = C_2 = C$, von denen der eine die Spannung U_1 aufweist und der andere zunächst ungeladen ist ($U_2 = 0$), werden infolge der Parallelschaltung sowohl die Gesamtenergie als auch die Spannung halbiert, d.h. es gelten die Gleichungen

$$W_e = \frac{1}{2}W_{e0} \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{2}U_1. \tag{1.99}$$