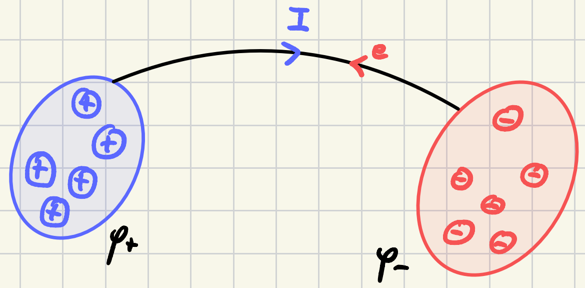
4. Übung

Rares Sahleanu

Email rsahleanu@ethz.ch
Discord raresbares

2.1 Der elektrische Strom

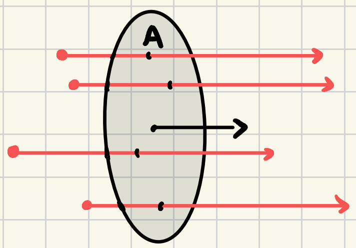
Es herscht die Potentialdifferenz $U_{12} = \varphi_+ - \varphi_-$



Da die Körper leitend miteinander verbunden sind werden die Elektronen sich umverteilen und die Spannung abbauen.

technische Stromrichtung $\hat{=}$ Fluss der "positiven Ladung"

physikalische Stromrichtung $\hat{=}$ Elektronenfluss

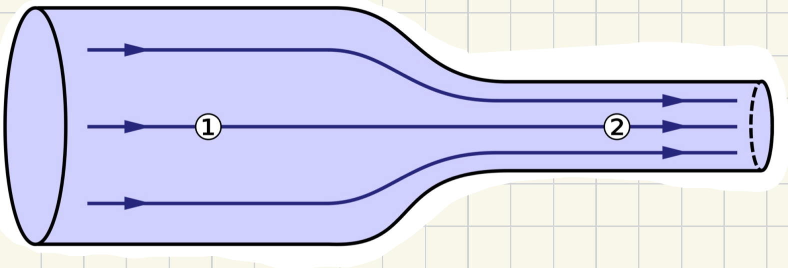


Der elektrische Strom ist definiert als Ladungen die pro Zeit eine Fläche durchqueren

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

2.2 Die Stromdichte

Analogie Wasser



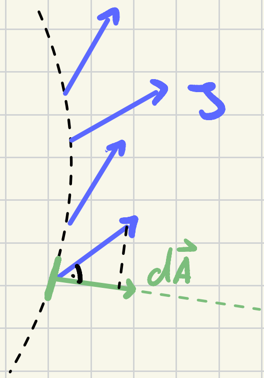
① & ② $5 \frac{L}{s}$ ≙ "elektrischer Strom"

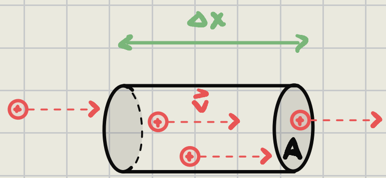
$$\left.\begin{array}{l} ①\ 2 \frac{L}{s m^2} \\ ②\ 10 \frac{L}{s m^2} \end{array}\right\} \triangleq \text{"Stromdichte"}$$

Die Stromdichte ist definiert als die Ladung pro Zeit pro Fläche

$$\Rightarrow \quad J = \frac{\partial^2 Q}{\partial A \partial t} = \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$I = \iint \vec{J}\, d\vec{A}$$





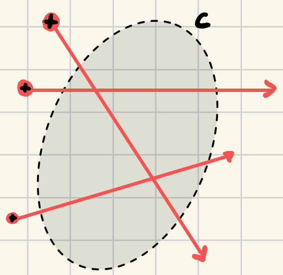
$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = \vec{v} \cdot dt \\ \Delta V = \Delta x \cdot dA \end{array}\right\} \quad \Delta Q = \underbrace{\rho}_{\text{Raumladungsdichte}} \cdot \Delta V$$

$$\vec{J} = \frac{\Delta Q}{dt\, dA} = \frac{\vec{v} \cdot dt \cdot dA \cdot \rho}{dt \cdot dA} = \vec{v} \cdot \rho$$

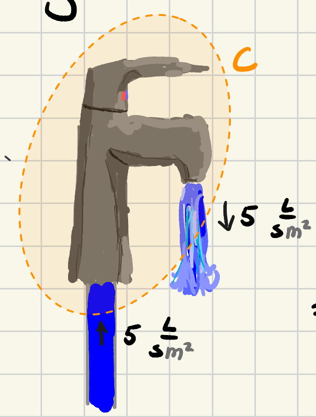
2.3 Definition des stationären Strömungsfeldes

stationäres Strömungsfeld ≙ Der Strom fließt konstant und noch unendlich lange

$$\oiint_c \vec{J}\, d\vec{A} \overset{!}{=} 0$$



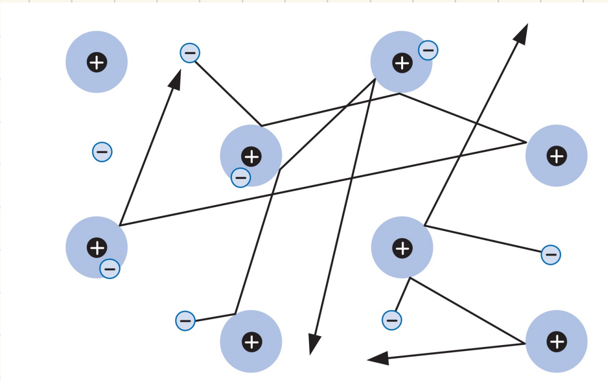
Analogie Wasser:

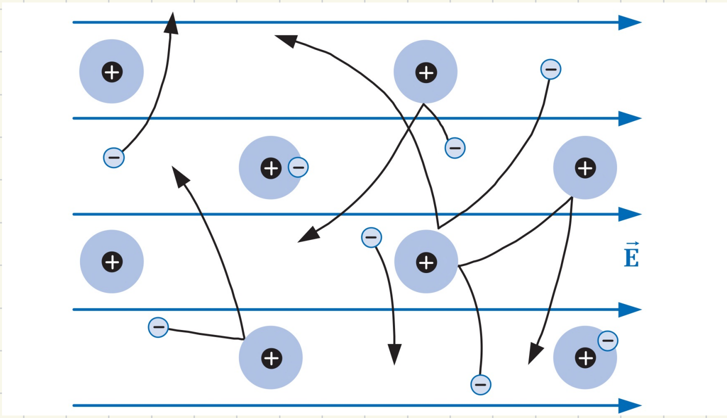


$$\Rightarrow \oiint \vec{J}\, d\vec{A} = 5\,\tfrac{L}{s} - 5\,\tfrac{L}{s} = 0$$

2.4 Ladungträgerbewegung

Aufgrund von Unregelmäßigkeiten im Atomgitter erreichen Ladungsträger eine maximale Geschwindigkeit bei wirkendem Feld





$$\vec{v}_e = -\mu_e \vec{E}$$

μ_e: "Beweglichkeit"

$\vec{v}_e$: "Driftgeschwindigkeit"

2.5 Der spezifische Widerstand / Leitfähigkeit

Ladungsträgerkonzentration

$$\vec{J} = - n e \vec{v}_e = \boxed{n e \mu_e} \cdot \vec{E}$$

Ladung pro Ladungsträger

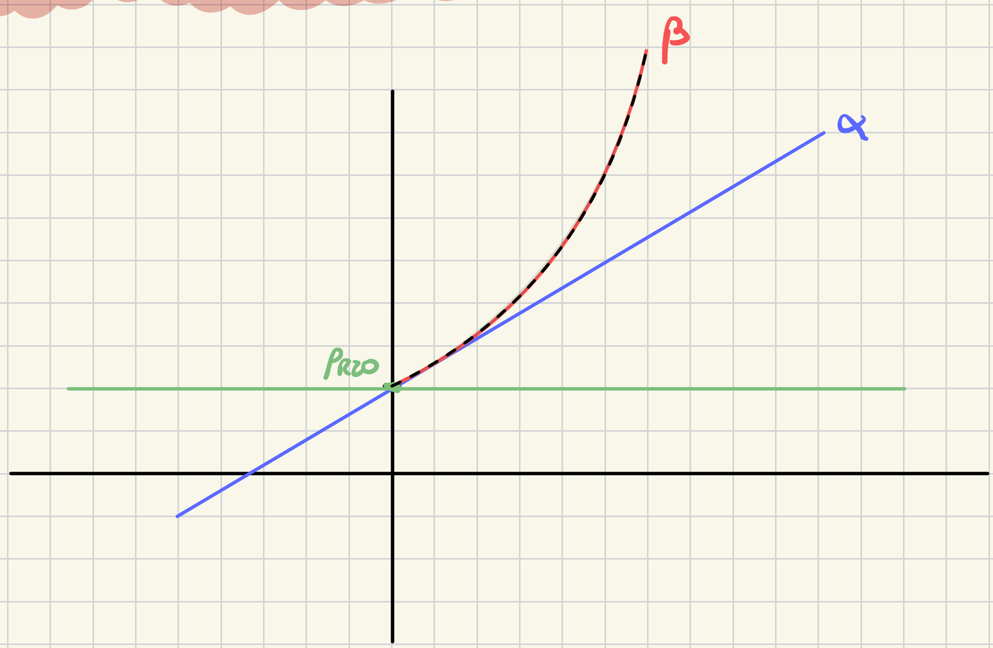
$\frac{1}{\Omega m}$ $\quad k = n e \mu_e \quad \hat{=}$ spezifische Leitfähigkeit

$\Omega \cdot m$ $\quad \rho_R = \frac{1}{k} \quad \hat{=}$ spezifischer Widerstand

Aufgrund von der Temperaturabhängigkeit von Widerständen wird oft ein Korrekturfaktor beigefügt

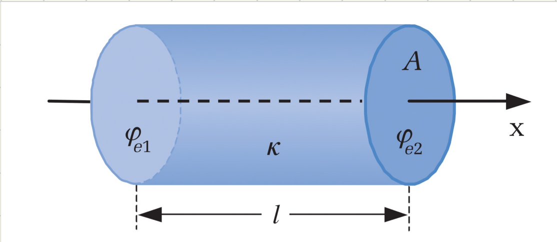
$\Delta T = T - 20°C$

$$\rho_R = \rho_{R20°C} \cdot \left[1 + \alpha \Delta T + \beta \Delta T^2\right]$$



2.6 Das Ohm'sche Gesetz

Das ohmsche Gesetz I $\qquad \vec{J} = \kappa \vec{E}$



- E-Feld homogen und konst. 1
- Strom fließt gleichmäßig 2

$$|\vec{J}| \overset{2}{=} \boxed{\frac{I}{A} = \kappa \frac{U}{l}} \overset{1}{=} \kappa |\vec{E}| \quad \Rightarrow \quad U = I \frac{l}{\kappa A}$$

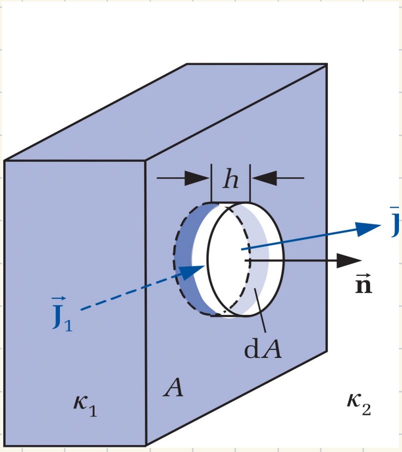
$$\frac{l}{\kappa A} = R$$

Das ohmsche Gesetz II $\qquad U = I \cdot R$

Das ohmsche Gesetz III $\qquad R = \dfrac{\int \vec{E}\, d\vec{s}}{\kappa \iint \vec{E}\, d\vec{A}}$

! Der elektrische Leitwert ist der Kehrwert des elektrischen Widerstands.

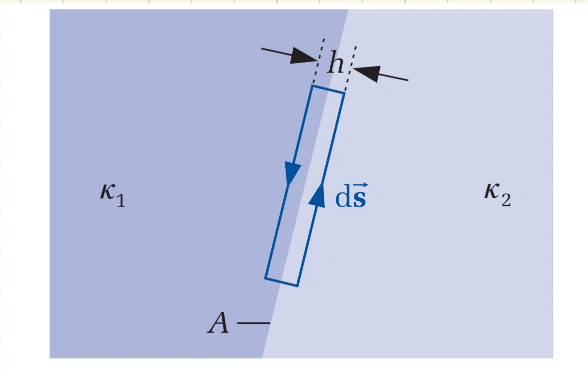
2.8 Das Verhalten der Feldgröße an Grenzflächen



1 $\quad \oiint \vec{J}\, d\vec{A} \overset{!}{=} 0$

2 $\quad \vec{J}_{n1}\, d\vec{A} - \vec{J}_{n2}\, d\vec{A} = 0$

3 $\quad \Rightarrow \quad J_{n1} = J_{n2} \qquad \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$

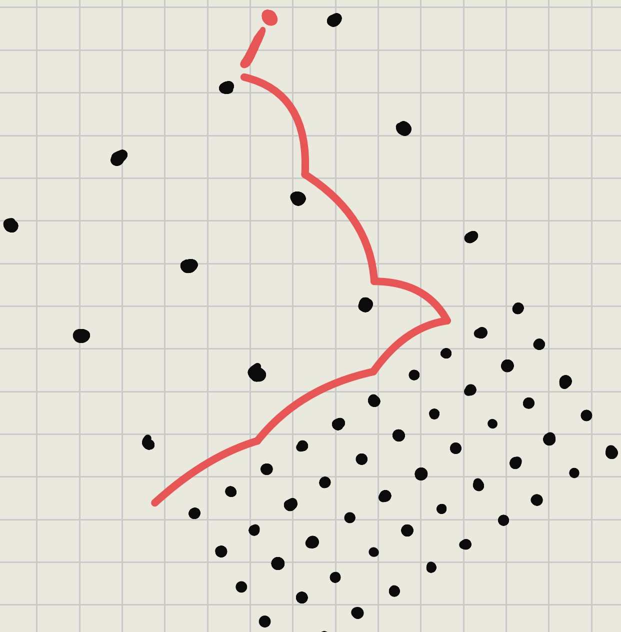


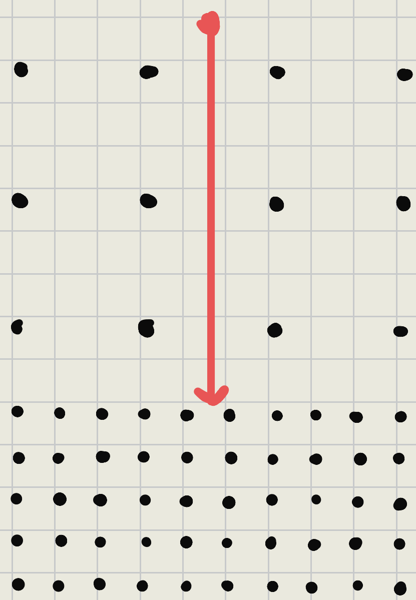
1 $\quad \oint_C \vec{E}\, d\vec{s} \overset{!}{=} 0$

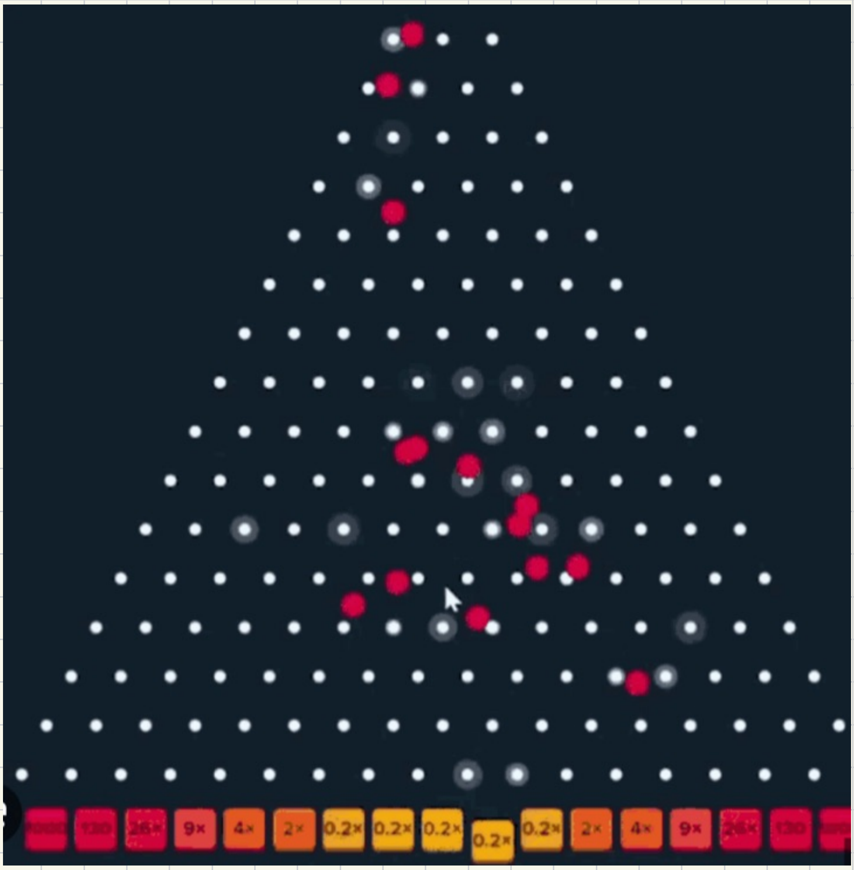
2 $\quad E_{t1} - E_{t2} = 0$

3 $\quad E_{t1} = E_{t2} \qquad \frac{J_{t1}}{J_{t2}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$

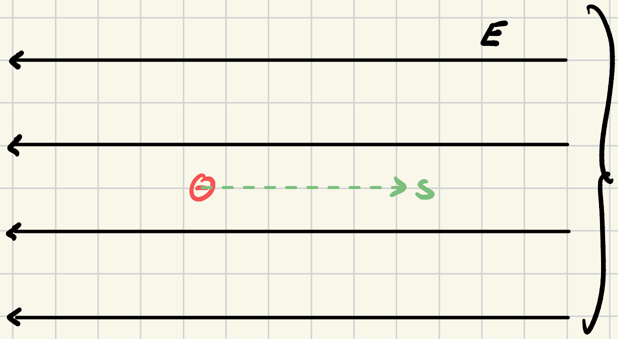
Analogie






9×
4×
2×
0.2×
0.2×
0.2×
0.2×
0.2×
2×
4×
9×

2.9 Die Energie und Leistung



E-Feld ist homogen

$$\Delta W = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\Delta Q = U\,I\cdot\Delta t$$

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{U\cdot I\cdot dt}{dt} = U\cdot I$$

$$\boxed{P = U\,I = I\,I\cdot R = U\,\frac{U}{R}}$$

"Verlustleistungsdichte"

$$= \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV$$

Beispiel 2.1: Driftgeschwindigkeit der Elektronen in Kupfer

Durch ein Kupferkabel mit einer Querschnittsfläche $A = 1\ \text{mm}^2$ fließt ein Strom $I = 5$ A. Zu bestimmen ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen.

Lösung:

Zur Bestimmung der gesuchten Größe nach Gl. (2.9) wird die Raumladungsdichte im Kupferdraht benötigt. Aus dem Beispiel 1.1 ist bekannt, dass 1 mm^3 Kupfer $8{,}5 \cdot 10^{19}$ Atome enthält. Da jeweils 1 Elektron pro Atom am Ladungstransport beteiligt ist, kann die Raumladungsdichte mit der Ladung eines Elektrons $-e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As folgendermaßen berechnet werden

$$\rho = \frac{Q}{V} = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{As}\,\frac{8{,}5 \cdot 10^{19}}{\text{mm}^3} = -13{,}62\frac{\text{As}}{\text{mm}^3}\,. \tag{2.15}$$

Mit der angenommenen Stromdichte liegt die Driftgeschwindigkeit

$$|v| \overset{(2.9)}{=} \left|\frac{J}{\rho}\right| = \frac{5\,\text{A}\,\text{mm}^3}{1\,\text{mm}^2 \cdot 13{,}62\,\text{As}} = 0{,}37\frac{\text{mm}}{\text{s}} \tag{2.16}$$

betragsmäßig in einem Bereich unterhalb von 1 mm pro Sekunde!

Wird ein Stromkreis geschlossen, dann beginnt der Strom trotz der geringen Driftgeschwindigkeit an allen Stellen gleichzeitig zu fließen. Die Ursache ist die sich mit der Lichtgeschwindigkeit entlang des Drahtes ausbreitende elektrische Feldstärke, die die Elektronen längs des gesamten Drahtes praktisch gleichzeitig in Bewegung setzt.

Beispiel 2.2: Widerstand einer Hohlkugel

Die Berechnung des Widerstandes wollen wir an der gleichen, bereits bei der Kapazitätsberechnung zugrunde gelegten Geometrie in Abb. 1.32 üben. Allerdings befindet sich jetzt zwischen den beiden perfekt leitenden Kugelschalen (Elektroden) der Radien a und b ein Material der Leitfähigkeit κ.

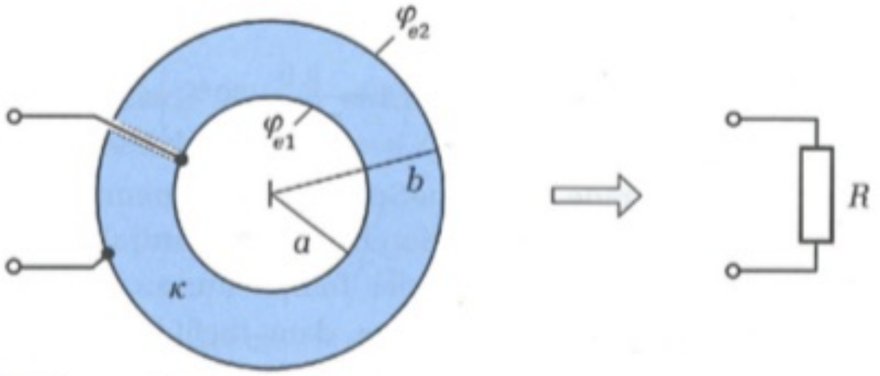


Abbildung 2.9: Widerstand einer Hohlkugel