6. Übung

Rares Sahleanu

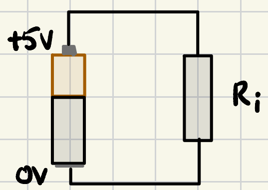
Email rsahleanu@ethz.ch

Discord raresbares

Reale Strom- & Spannungsquellen

siehe Batterie: Bei einem Kurzschluss fließt nicht "unendlich Strom"

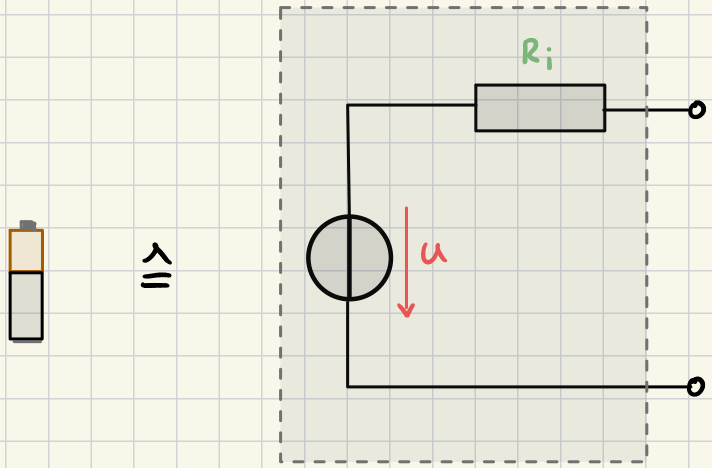
⇒ Batterie ist keine ideale Spannungsquelle, sonst würde ein unendlicher Strom fließen

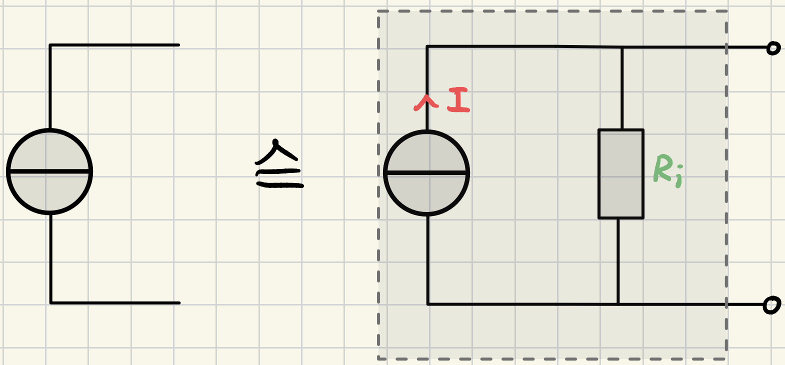


ideal: $\lim_{R_i \to 0} I(R_i) = \lim_{R_i \to 0} \frac{U}{R_i} = +\infty$

real: chemisches Limit bei ca. 3A-5A*

Modell:



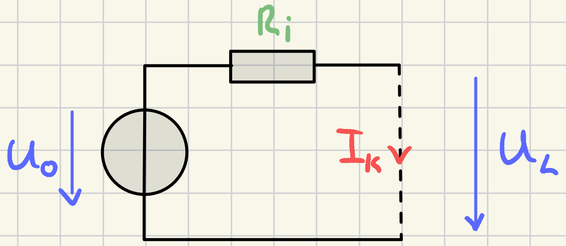


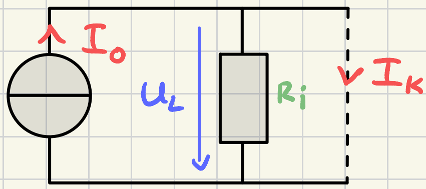
Die Modelle stimmen nicht ganz, da Aspekte wie Ruheentladung oder nicht-Linearität vernachlässigt werden

Ersatzquellen & -netzwerke

Jedes Netzwerk aus Quellen und linearen Elementen lässt sich in eine reale Spannungs- oder Stromquelle umwandeln

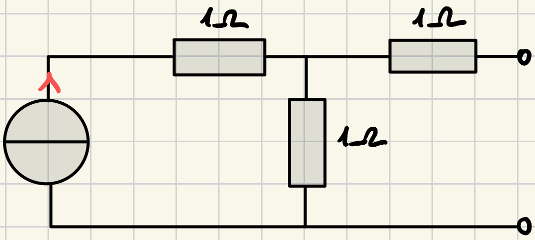
⇒ Diese sind dann gleich bezüglich ihres Klemmenverhalten (!)



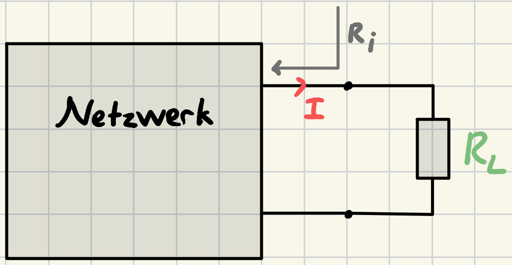


	Leerlaufspannung U_L	Kurzschlussstrom I_K	Innenwiderstand R_i
reale UQ	$U_0 = U_L$	$U_0 = I_K \cdot R_i$ $R_i = U_0 \backslash I_K$	
reale IQ	$I_0 = U_L \backslash R_i$ $R_i = U_0 \backslash I_0$	$I_0 = I_K$	

Innenwiderstand-"Trick"



Leistung, Wirkungsgrad und co.



Die maximale Leistung an der Last wird erreicht bei

$$R_i = R_L$$

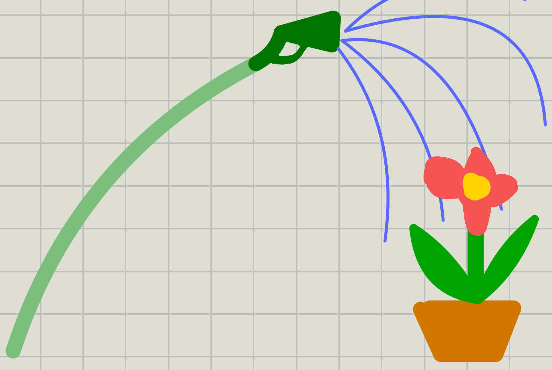
Folgendes gilt nur (!) bei $R_i = R_L$ bei realen Quellen

max Leistung an R_L $\quad P_{L\,max} = \dfrac{U_0^2}{4R_i}$ $\quad\Big|\quad$ $P_{L\,max} = \dfrac{1}{4} I_0^2 R_i$

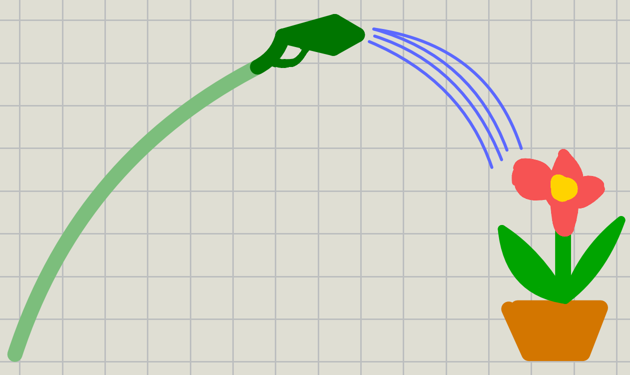
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

Wirkungsgrad $\quad \eta = 50\,\% \quad\Big|\quad \eta = 50\,\%$

"Shower"



"Jet"



- Viel Wasser (Leistung)
- Wenig "kommt an"

- Wenig Wasser (Leistung)
- Viel "kommt an"

Superpositionsprinzip

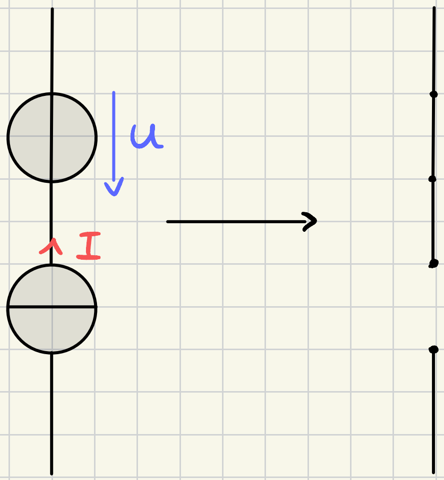
Wörtlich: Jn linearen Netzwerken lässt sich die Gesamtwirkung als Summe der Teilwirkungen berechnen

linear — Strom und Spannung sind linear zueinander

Gesamtwirkung — Endzustände $\hat{=}$ Ströme & Spannungen

Teilwirkung — Enzustand der nur von einer Quelle bewirkt wird

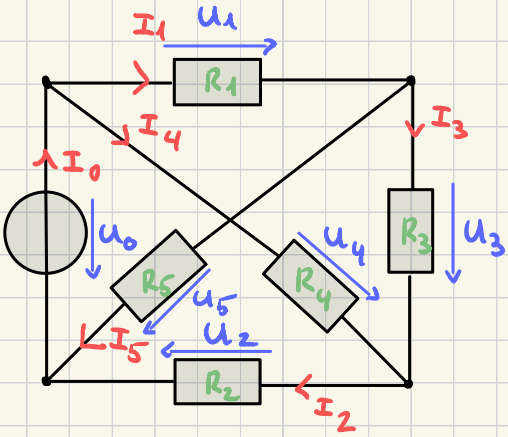
Um die Quellenwirkungen getrennt zu Betracht muss mann =0 setzen



Netzwerksberechnungsverfahren

Ziel ist es ein Algorithmus zu entwickeln um alle Ströme/Spannungen jeglicher Schaltungstopologie zu bestimmen

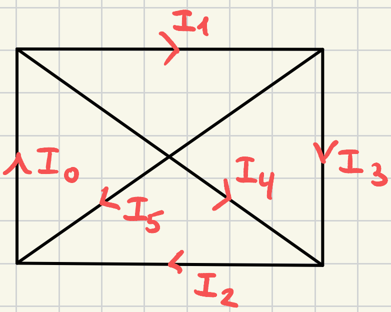
⇒ Netzwerke mathematisch beschreiben



Schritt 1: Netzwerk definieren

→ Ströme und Spannungen festlegen

Überblick schaffen



Schritt 2: Netzwerkgraphen zeichnen

Abstrahierung des Netzwerks

Was brauchen wir?

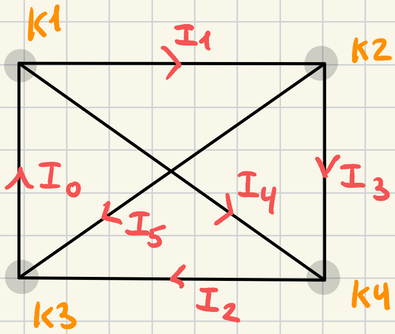
1. $U_0 - U_5$
2. $I_0 - I_5$

U_{1-5} lässt sich aus I_{1-5} berechnen

U_0 ist gegeben

Eigentlich brauchen wir nur $I_0 - I_5$. Das heißt wir haben 6 Unbekannte ⇒ Wir brauchen 6 (|Zweige|) lin. unabhängige Gleichungen

Woher kriegen wir die Gleichungen her? Knotengleichungen!



K 1	$+I_0$	$-I_1$	0	0	$-I_4$	0	$=$	0
K 2	0	$+I_1$	0	$-I_3$	0	$-I_5$	$=$	0
K 3	$-I_0$	0	$+I_2$	0	0	$+I_5$	$=$	0
K 4	0	0	$-I_2$	$+I_3$	$+I_4$	0	$=$	0

$\Rightarrow$ Wir brauchen nur 3 (|Knoten|-1) davon, da sonst die linear abhängig wären

"Wenn ich 3 kenne, kenne ich auch den 4ten"

$\Rightarrow$ Zwischenstand: Aus 6 Gleichungen haben wir bereits 3

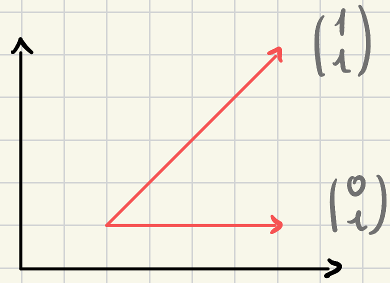
Woher kriegen wir die restlichen 3 Gleichungen her? Maschengleichungen!

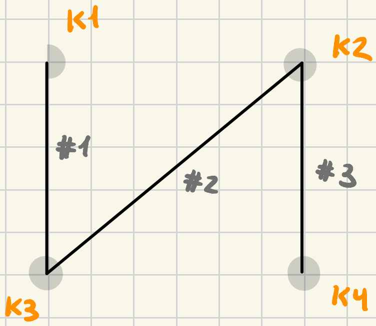
Wie stellen wir sicher dass die Gleichungen linear unabhängig sind?

Methode 1: vollständiger Baum

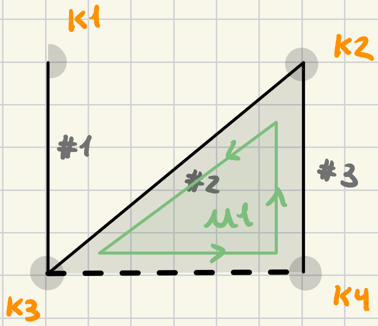
Idee: Eine Gleichung ist sicher linear unabhängig wenn es es eine Koordinate "mehr hat"

$$a + b = 0$$
$$a + b + c = 0$$

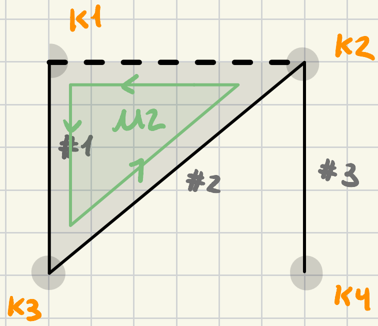




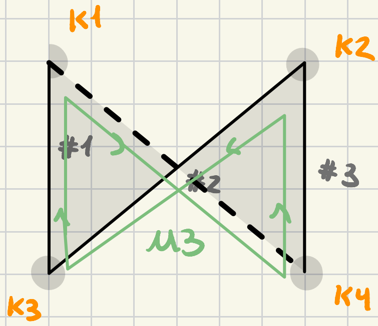
Schritt 1: Netzwerkgraphen mit |Knoten|-1 offen neu zeichnen



Schritt 2: Jeweils einen existierenden Zweig so einfügen, dass sich eine Masche bildet



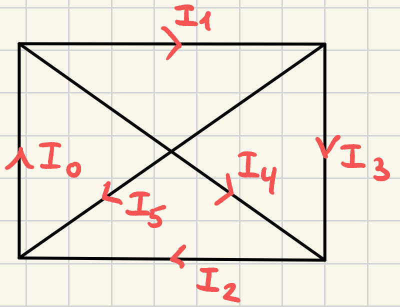
$$M1 \quad +0 - U_2 - U_3 + 0 + U_5 = 0$$
$$M2 \quad -U_1 + 0 + 0 + 0 - U_5 = U_0$$
$$M3 \quad +0 + 0 - U_3 + U_4 + U_5 = U_0$$



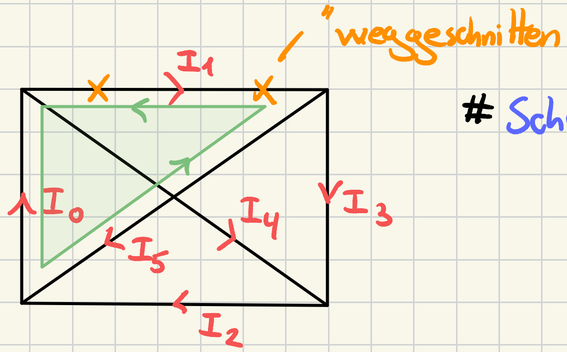
$$M1^* \quad +0 - R_2 I_2 - R_3 I_3 + 0 + R_5 I_5 = 0$$
$$M2^* \quad -R_1 I_1 + 0 + 0 + 0 - R_5 I_5 = U_0$$
$$M3^* \quad +0 + 0 - R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = U_0$$

Methode 2: Auftrennen der Maschen

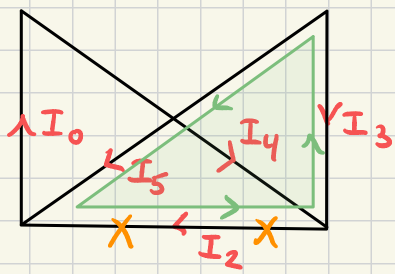
Selbe Idee, nur dass man jetzt immer einen Zweig wegnimmt, sodass er nicht wieder auftaucht



\# Schritt 1: Netzwerkgraphen komplett zeichnen



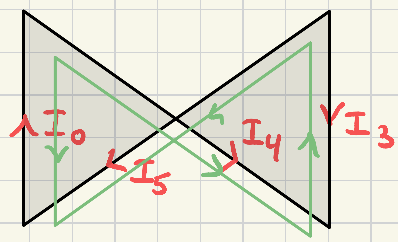
\# Schritt 2: beliebige Maschenumläufe bilden und und jedes mal einen beliebigen benutzten Zweig wegschneiden



$M1 \quad +0 - U_2 - U_3 + 0 + U_5 = 0$

$M2 \quad - U_1 + 0 + 0 + 0 - U_5 = U_0$

$M3 \quad + 0 + 0 - U_3 + U_4 + U_5 = U_0$



$M1^* \quad + 0 - R_2 I_2 - R_3 I_3 + 0 + R_5 I_5 = 0$

$M2^* \quad - R_1 I_1 + 0 + 0 + 0 - R_5 I_5 = U_0$

$M3^* \quad + 0 + 0 - R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = U_0$

$z = |\text{Zweige}|$

$k = |\text{Knoten}|$

Gesuchte Gleichungen : z

Knotengleichungen : $k-1$

Maschengleichungen : $z-(k-1) = z-k+1$

Überblick

Das elektrostatische Feld

- Integrale
- Coulomb'sche Gesetz & Arbeit
- Feldkonzept & Flussdichte
- Influenz
- Spannung & Potential
- dielektrische Polarisation
- Kapazitäten

Das stationäre Strömungsfeld

- Strom & Stromdichte
- Energie & Leistung
- Ohm'sche Gesetz

Netzwerkberechnung

- Kirchhoff'sche Gleichungen
- Stromteiler etc.
- Stern-Dreiecks-Umwandlung
- Superpositionsprinzip
- Rechenverfahren

Aufgabe 1

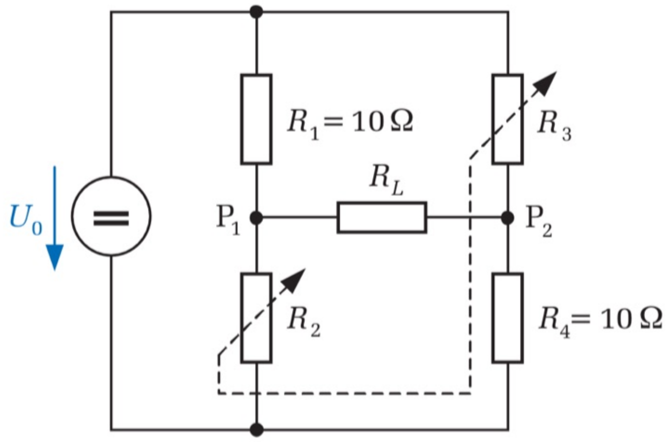


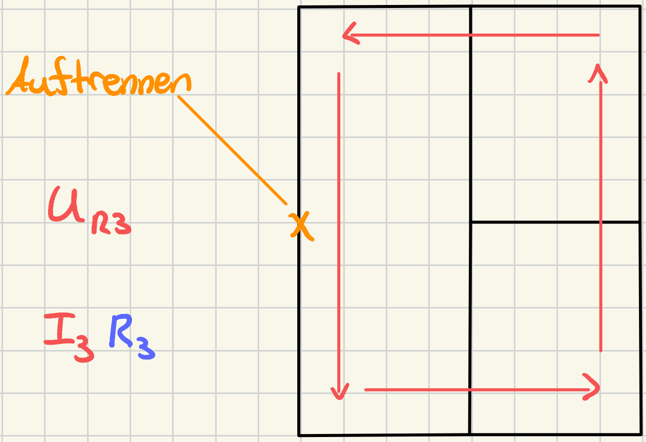
Abbildung 3.43: Brückenschaltung

In dem gegebenen Netzwerk können die beiden Widerstände R_2 und R_3 synchron in dem Wertebereich 0 ... 50 Ω eingestellt werden. Die Quellenspannung beträgt $U_0 = 30$ V.

1. Welchen Wert müsste R_L aufweisen, damit er bei der Einstellung $R_2 = R_3 = 30\ \Omega$ maximale Leistung aufnimmt?
2. Wie groß ist in diesem Fall der Wirkungsgrad (Verhältnis der Leistung an R_L zur gesamten von der Quelle abgegebenen Leistung)?
3. Stellen Sie die Leistung an R_L für den in 1. ermittelten Wert in Abhängigkeit von $R_2 = R_3$ dar.

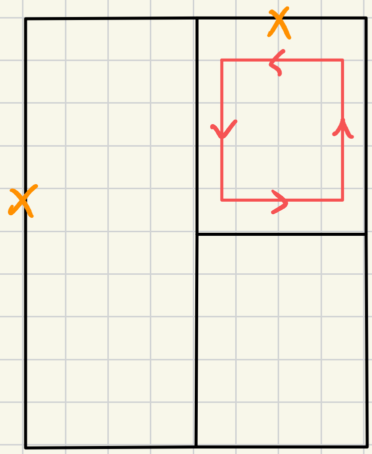
$U_0 = U_{R4} + U_{R3}$

1 $U_0 = I_4 R_4 + I_3 R_3$



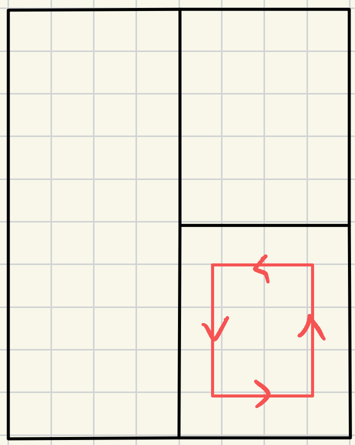
$0 = U_1 + U_L - U_3$

2 $0 = I_1 R_1 + I_L R_L - I_3 R_3$



$0 = U_2 - U_4 - U_L$

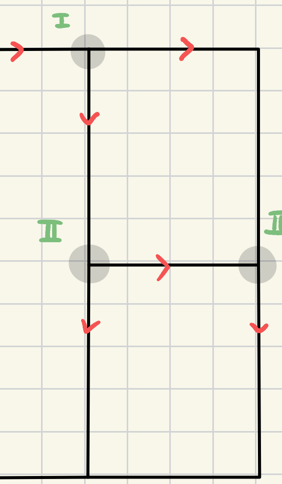
3 $0 = I_2 R_2 - I_4 R_4 - I_L R_L$



I $0 = I - I_1 - I_3 -$

II $0 = I_1 - I_2 - I_L$

III $0 = -I_4 + I_3 + I_L$



$$
\begin{array}{l|l}
1 \quad 0 + 0 + 0 + R_3 I_3 + R_4 I_4 + 0 & U_0 \\
2 \quad 0 + R_1 I_1 + 0 - R_3 I_L + 0 + R_L I_L & 0 \\
3 \quad 0 + 0 + R_2 I_2 + 0 - R_4 I_4 - R_L I_L & 0 \\
\mathrm{I} \quad + I - I_1 + 0 - I_3 + 0 + 0 & 0 \\
\mathrm{II} \quad 0 + I_1 - I_2 + 0 + 0 - I_L & 0 \\
\mathrm{III} \quad 0 + 0 + 0 + I_3 - I_4 + I_L & 0
\end{array}
$$

In Matrix-Schreibweise

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 \\
0 & R_1 & 0 & -R_3 & 0 & R_L \\
0 & 0 & R_2 & 0 & -R_4 & -R_L \\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix} I \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_L \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Lösung: $I = 1.75\,A$

Gesamtleistung der Quelle: $P_{ges} = U_0 \cdot I = 52.5\,W$

Vereinfachung:

Punktsymmetrie (der Schaltung)

$I_1 = I_4$

$I_2 = I_3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & -R_3 & 0 & R_L \\ 0 & 0 & R_2 & 0 & -R_4 & -R_L \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & R_4 & R_3 & R_3 & R_4 & 0 \\ 0 & R_1 & -R_3 & -R_3 & 0 & R_L \\ 0 & -R_4 & R_2 & 0 & -R_4 & -R_L \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & R_4 & R_3 & 0 \\
0 & R_1 & -R_3 & R_6 \\
\cancel{0} & \cancel{-R_4} & \cancel{R_2} & \cancel{-R_6} \\
1 & -1 & -1 & 0 \\
\cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\
0 & -1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & R_4 & R_3 & 0 \\
0 & R_1 & -R_3 & R_6 \\
1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
I \\
I_1 \; I_4 \\
I_2 \; I_3 \\
I_6
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
U_0 = 30V \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
$$

Aufgabe 2

Aufgabe 3.8 | Netzwerkanalyse

Gegeben ist das folgende Widerstandsnetzwerk, das durch zwei ideale Gleichspannungsquellen erregt wird.

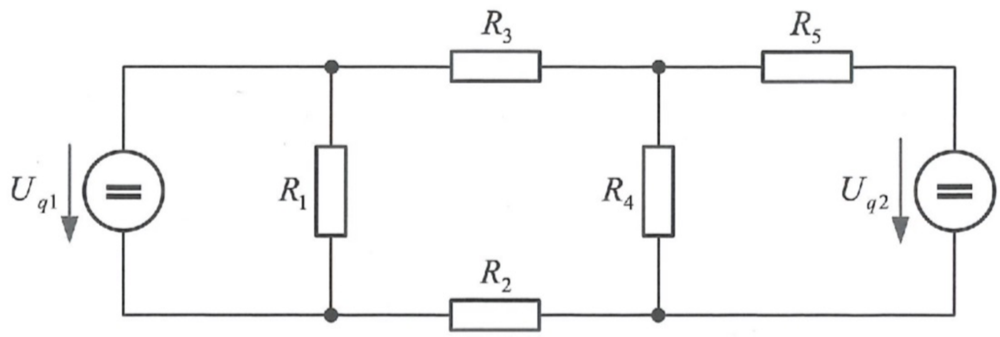


Abbildung 1: Widerstandsnetzwerk

1. Wie viele Knoten und Zweige besitzt das Netzwerk insgesamt? Wie viele Unbekannte liegen damit in dem Netzwerk vor? Geben Sie an, wie viele linear unabhängige Knoten- und Maschengleichungen benötigt werden, um die Unbekannten zu bestimmen.
2. Wählen Sie einen Bezugsknoten und nummerieren Sie die Knoten.
3. Zeichnen Sie den Netzwerkgraphen und legen Sie eine geeignete Zählrichtung für die Ströme fest.
4. Stellen Sie die linear unabhängigen Knotengleichungen auf.
5. Stellen Sie die Maschengleichungen mit dem Verfahren des vollständigen Baumes auf.
6. Stellen Sie die Maschengleichungen mit dem Verfahren der Auftrennung der Maschen auf.

Leistungsanpassung Eine Spannung hat eine Leerlaufspannung von 1.50V und einem Innenwiderstand von 600Ω. a.) bei welchem Aussenwiderstand erreicht die Leistungsabgabe ihren Höchstwert b.) Wie gross sind Klemmenspannung, Stromstärke und Leistungsabgabe an dem Verbraucher?

Lösung:
a.) Bei $R_i = R_L = 600\Omega$
b.)

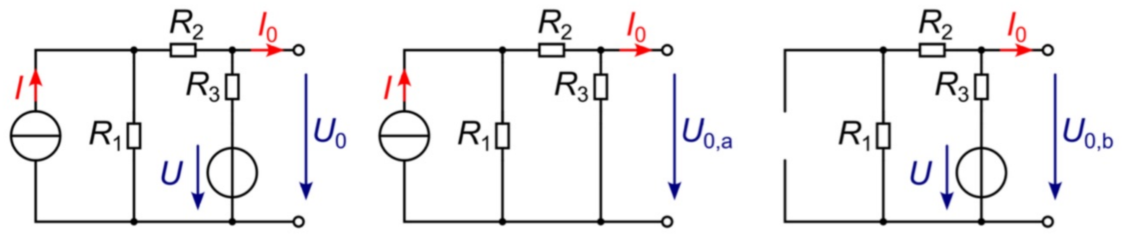
$$U_L = U_0/2 = 0.75\,\mathrm{V} \tag{6.1}$$

$$I_L = \frac{U_0}{R_i + R_L} = \frac{U_0}{2R_i} = 1.25\,\mathrm{mA} \tag{6.2}$$

$$P_L = U_L \cdot I_L = \frac{U_0^2}{4R_i} \approx 938\,\mu\mathrm{W} \tag{6.3}$$

Aufgabe 3

Superpositionsprinzip Beim berechnen von $U_{0,a}$ wird die Spannungsquelle kurzgeschlossen, bei $U_{0,b}$ ist die Stromquelle im Leerlauf.



$$U_0 = U_{0,a} + U_{0,b} \tag{6.4}$$

Beim berechnen von $U_{0,a}$ kann man die Spannung über R_3 berechnen. Dazu benötigt man dem Strom dadurch. Dieser erhält man durch Anwenden der Stromteilerformel.

$$I_{3,a} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot I \tag{6.5}$$

Daraus folgt:

$$U_{0,a} = R_3 I_{3,a} = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot I \tag{6.6}$$

Beim berechnen von $U_{0,b}$ hilft die Feststellung:

$$U_{0,b} = U_{1,b} + U_{2,b} \tag{6.7}$$

Mit der Spannungsteilerformel lässt sich dann festhalten:

$$U_{0,b} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot U \tag{6.8}$$

Aus alldem folgt:

$$U_0 = U_{0,a} + U_{0,b} = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot I + \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot U \tag{6.9}$$