Übung 10

Rares Sahleanu

Homogene lineare Gleichungssysteme

Hier ein Beispiel für eine DGL:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Aber allgemeinen schauen die immer so aus

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0$$

Unsere Annahme besteht nun daraus, dass y irgendwie die Form:

$$y = A e^{\lambda t} \quad \text{hat}$$

Dürfen wir!

Das ganze setzen wir nun in die DGL ein und teilen durch $e^{\lambda t}$ somit erhalten wir dann das "charakteristische Polynom"

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} \cdots a_1 \lambda^1 + a_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \longrightarrow e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \lambda_2 \longrightarrow e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \lambda_3 \longrightarrow e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ \lambda_n \longrightarrow e^{\lambda_n t} \end{array}\right\} \quad y = \sum A_i e^{\lambda_i t}$$

Doch was tun wenn $\lambda_1 = \lambda_2$ bzw λ_j ist eine mehrfache Nullstelle des Polynoms ist?

Generell ist das nicht so einfach ä Nullstellen können mehrfach vorkommen wie in diesem Beispiel:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \quad \Rightarrow \text{2-fache Nullstelle "1"}$$

$$\left.\begin{array}{lll}
\lambda_1 \;-\; \text{Ord}: \sigma_1 & \longrightarrow & (A_1 + A_2 t + \cdots + A_{\sigma_1} t^{\sigma_1 - 1})\, e^{\lambda_1 t} \\
\lambda_2 \;-\; \text{Ord}: \sigma_2 & \longrightarrow & (B_1 + B_2 t + \cdots + B_{\sigma_2} t^{\sigma_2 - 1})\, e^{\lambda_2 t} \\
\quad\vdots & & \\
\lambda_n \;-\; \text{Ord}: \sigma_n & \longrightarrow & (B_1 + B_2 t + \cdots + B_{\sigma_n} t^{\sigma_n - 1})\, e^{\lambda_n t}
\end{array}\right\} \text{Aufsummieren!}$$

Funfact: Wenn λ_n komplex ist, dann gibt es auch λ_n^*

Am Ende erhalten wir die sogenannte homogene Lösung der DGL

Manchmal / Immer haben wir aber heterogene DGL:

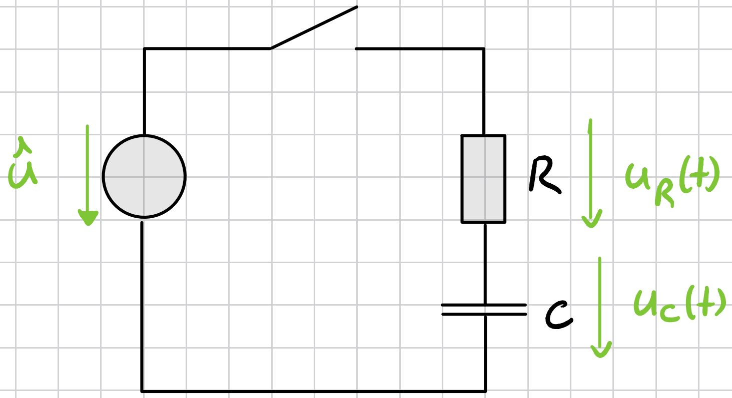
$$y'' - 3y' + 2y = \sin(x)$$

Übrige Koeffizienten durch Randbedingungen lösen

Die entgültige Lösung schaut so aus:

$$y_{ges} = y_{heterogen} + y_{homogen}$$

Den heterogenen Teil können wir mathematisch nicht berechnen aber mithilfe der harmonischen Analyse ü



KVL:

$$u_R(t) + u_C(t) = \sin(\omega t)$$

$$i(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t i(t) = \sin(\omega t)$$

$$\dot{Q}(t)R + \frac{Q}{C}(t) = \sin(\omega t)$$

$$\lambda R + \frac{1}{C} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow y_{hom} = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

Good to know:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

Aufgabe 2 Transientenverhalten einer Kapazität

Es soll das transiente Verhalten von einer einfachen Schaltung analysiert werden. Gegeben ist das in Abbildung 1 dargestellte Netzwerk bestehend aus einer Stromquelle, einem Schalter S und einer Kapazität C . Der Schalter S in Abbildung 1 ist geschlossen und wird zum Zeitpunkt $t = t_0$ geöffnet. Die Kapazität C ist zum Zeitpunkt $t = t_0$ vollständig entladen.

2.1) Stelle die Differentialgleichung für die Spannung $u_C(t)$ auf.

2.2) Löse die Differentialgleichung mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 1, um einen analytischen Ausdruck für den Spannungsverlauf $u_C(t)$ zu erhalten. Stelle ausserdem einen analytischen Ausdruck für den Stromverlauf $i_C(t)$ auf.

2.3) Zeichne die zeitlichen Verläufe von Spannung $u_C(t)$ und Strom $i_C(t)$.

Version: 30. April 2025

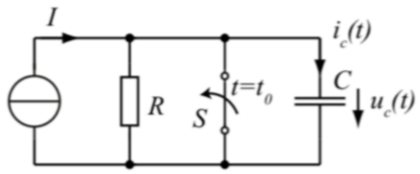


Abbildung 1: Netzwerk mit kapazitiver Last

Aufgabe 3 Transientenverhalten von Induktivitäten

Es soll das transiente Verhalten von einer einfachen Schaltung analysiert werden. Gegeben ist das in Abbildung 2 dargestellte Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einem Schalter S und einer Induktivität L . Der Schalter S in Abbildung 2 ist offen und wird zum Zeitpunkt $t = t_0$ geschlossen. Die Induktivität L ist zum Zeitpunkt $t = t_0$ stromlos.

3.1) Stelle die Differentialgleichung für den Strom $i_L(t)$ auf.

3.2) Löse die Differentialgleichung mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 1, um einen analytischen Ausdruck für den Stromverlauf $i_L(t)$ zu erhalten. Stelle ausserdem einen analytischen Ausdruck für den Spannungsverlauf $u_L(t)$ auf.

3.3) Zeichne die zeitlichen Verläufe von Strom $i_L(t)$ und Spannung $u_L(t)$.

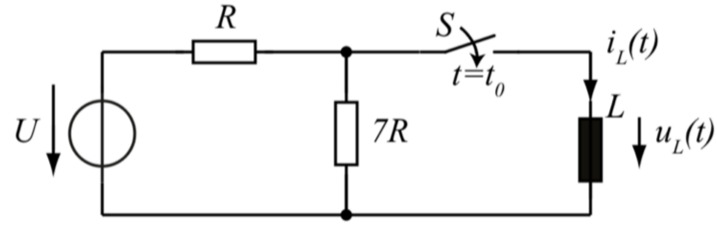


Abbildung 2: Netzwerk mit induktiver Last

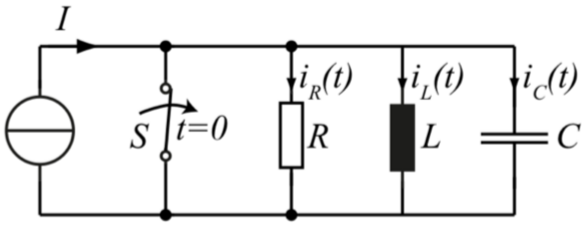


Abbildung 3: Parallelschwingkreis

4.1) Berechnen Sie für die Werte $L = 1\,\mathrm{mH}$ und $C = 1\,\mathrm{nF}$ die zeitabhängigen Ströme $i_R(t)$, $i_L(t)$ und $i_C(t)$ für die drei Fälle $R = 100\,\Omega$, $R = 500\,\Omega$ und $R = 2500\,\Omega$.

4.2) Wie verhält sich das Netzwerk, wenn der Widerstand nicht vorhanden ist?