

Übung 9

Rares Sahleanu

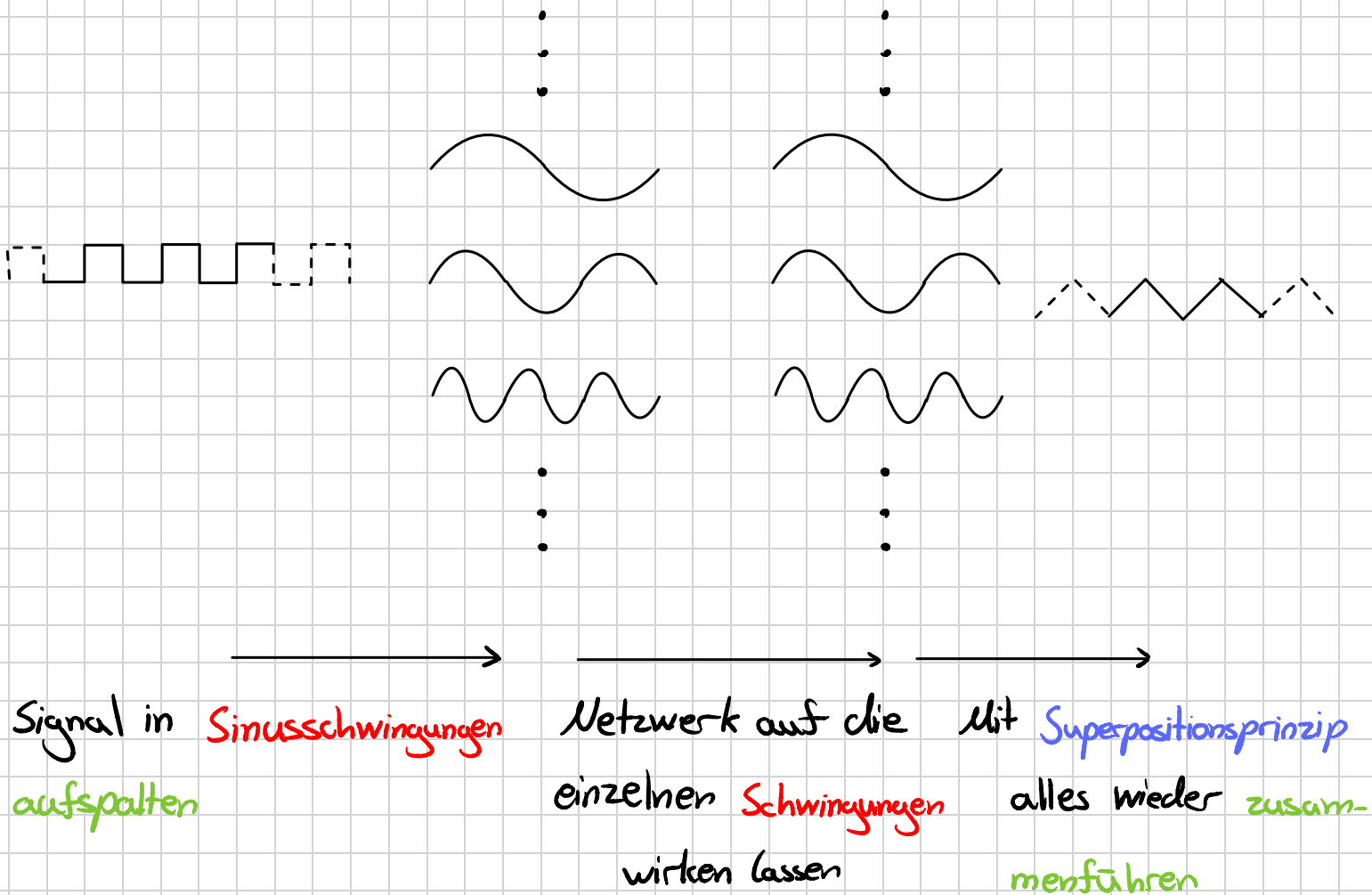




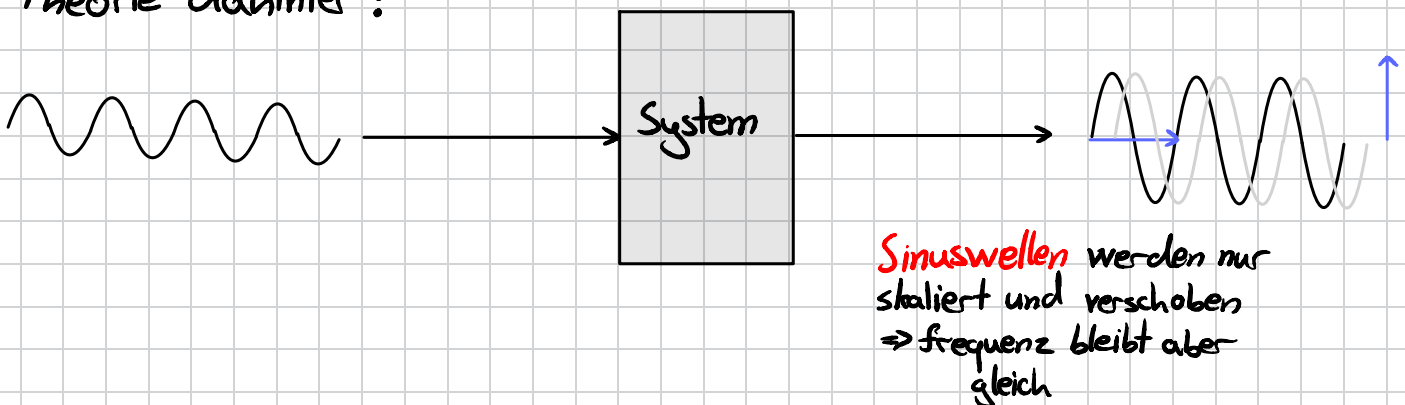
Die Idee / Motivation

Dank Zeigern können wir **wunderbar** mit Sinuswellen aber was machen wir wenn unser Signal nicht **sinusförmig** ist?

⇒ Dann teilen wir es in **sinuswellen** auf und superpositionieren anschließend die verschiedenen Ausgänge!



Theorie dahinter:



Die **Formel** der Fourierreihe hat starke **Ähnlichkeiten** mit dem Skalarprodukt auf $L[0;T]$



Typ 1
$$u(t) = \hat{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Koeffi-
zienten

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Typ 2
$$u(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \hat{c}_n \operatorname{trig}(n\omega t + \varphi_n)$$

Hier ist $\hat{c}_n$ gegeben durch: $\hat{c}_n = \sqrt{\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2}$

Der Winkel **widerum** ist

• wenn $\operatorname{trig} = \sin \longrightarrow \tan(\varphi) = \frac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n}$

• wenn $\operatorname{trig} = \cos \longrightarrow \tan(\varphi) = \frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_n}$

Das waren soweit die **mathematischen Basics**, aber bis jetzt können wir nicht nicht damit rechnen. Wir wünschen uns aber eine Form womit wir auch mit den komplexen Zeigern **rechnen** können

$$u(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \hat{c}_n \cos(n\omega t + \varphi) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \hat{c}_n e^{j(n\omega t + \varphi)} \right\}$$

In kurz zusammengefasst:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\hat{k}}_n e^{jn\omega t} \quad \text{mit} \quad \underline{\hat{k}}_n = \begin{cases} a_n - j b_n & n > 0 \\ a_n + j b_n & n < 0 \end{cases}$$

Alternativ kann man $\underline{\hat{k}}_n$ auch mit einem Integralform ausrechnen

$$\underline{\hat{k}}_n = \int_0^T u(t) e^{\mp jn\omega t} dt$$

Typ 3

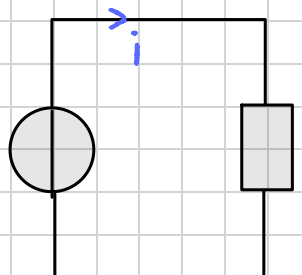
Aber wie können wir damit rechnen? Die einzelnen $\underline{\hat{k}}_n e^{jn\omega t}$ sind verschiedene Spannungszeiger $\rightarrow$ Ohmsches Gesetz !

Beispiel 1:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j \frac{4\pi}{n} e^{jn\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\hat{u}}_n e^{jn\omega t}$$

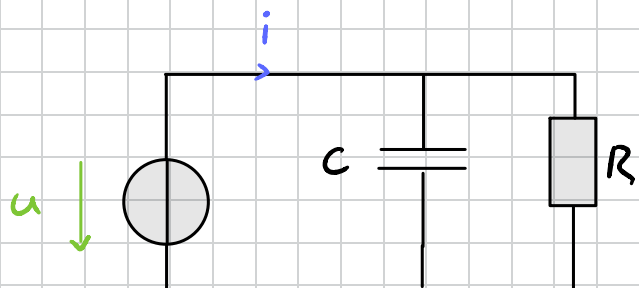
$$Z = R$$

$$\underline{\hat{i}}_n = \frac{\underline{\hat{u}}_n}{Z} = j \frac{4\pi}{nR}$$



Beispiel 2:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j \frac{4\pi}{n} e^{jn\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\hat{u}}_n e^{jn\omega t}$$



$$\underline{\hat{i}}_n = \frac{\underline{\hat{u}}_n}{\frac{R}{1+j\omega CR}} = \sqrt{1+(\omega CR)^2} \frac{\underline{\hat{u}}_n}{R} e^{\arctan(\omega CR)}$$

$$\underline{\hat{i}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{1+(\omega CR)^2} \frac{\underline{\hat{u}}_n}{R} e^{\arctan(\omega CR)} e^{jn\omega t}$$

Tricks und Tipps !

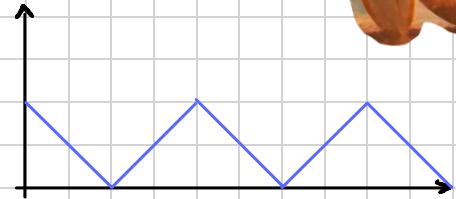
Sehr selten muss man wirklich ein Integral ausrechnen



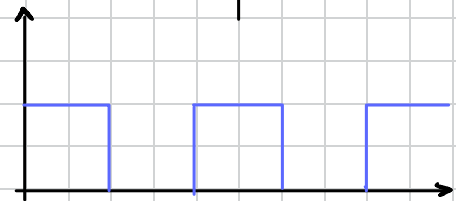
Zusammenfassung ist euer **Freund** !



=



+



Operationen mit Signalen zum "**himbiegen**"

↔ Strecken

→ Schieben

↕ Strecken

↔ Spiegeln

↑ Schieben

Vorhersehbare Ergebnisse

• Achsensymmetrie

$$\hat{b}_n = 0$$

• Antisymmetrie

$$\hat{a}_n = 0$$

• Halbwellensymmetrie

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_{2n} = \hat{b}_{2n} = 0$$

Wichtig ist :

• partielle Integration

• $\hat{a}_0$ kann man oft "ablesen"

Typische Klausuraufgabe

$\hat{a}_n \hat{b}_n$ berechnen $\rightarrow$ eins ist immer = 0 & $\hat{a}_0$ ablesen?

Größe berechnen

1. DC-separat errechnen

2. cos & sin wenn nötig frequenzweise **zusammenführen**

2'. c_n ausrechnen

3'. $\hat{u}_n = 2 \hat{c}_n$

3. In komplexe Zeiger zusammenführen

4. $\hat{u}_n = (\hat{a}_n - j \hat{b}_n)$

$$u(t) = u_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_n e^{jn\omega t}$$

Zu berechnende Größe für $\forall \hat{u}_n$ berechnen (inkl. u_{DC})

$\Rightarrow$ meistens: **Ohmsches Gesetz**

$$\hat{i} = i_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{i}_n e^{jn\omega t}$$

oder:
$$\hat{i} = i_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{\hat{i}_n\} \cos(n\omega t) + \operatorname{Im}\{\hat{i}_n\} \sin(n\omega t)$$

oder:
$$\hat{i} = \hat{i}_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{i}_n| e^{j\varphi_n} e^{jn\omega t}$$

+ Special tasks

Meistens wird das bevorzugt

Crazy Tipps für die Klausur

$$1) \quad \frac{a + jb}{c + jd} = \sqrt{\frac{c^2 + d^2}{a^2 + b^2}} e^{j(\arctan(\frac{b}{a}) - \arctan(-\frac{d}{c}))}$$

$$2) \quad \frac{c}{a + jb} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-j \arctan(\frac{b}{a})}$$

$$3) \quad jb = b e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$4) \quad \arctan\left(\frac{a}{b}\right) = -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right)$$

wichtig!

$$\int t^n e^{at} dt = \frac{t^n}{a} e^{at} - \frac{n}{a} \int t^{n-1} e^{at} dt$$

Aufgaben der Form:

Was ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$?

- x finden wo die Fourierreihe die gewünschte Form hat
- Fourierreihe mit expliziten / abgelesenen Wert ablesen
- Umformung: $\pm$ Term & Multiplikation
- Auf Symmetrie in der Summe achten

Bsp:

Was ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$?



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6\pi^2}{k^2+1} e^{j\frac{2\pi}{T} + n} =$$