Theorie

1. Dirichlet-Kern

Fourierkoeffizienten

$$S_N f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \, e^{\frac{2\pi i k t}{T}} \quad \text{wobei} \quad c_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{\frac{-2\pi i k x}{T}} \, dx$$

- jetzt für 1-periodische Funktionen $(T = 1)$:

$$S_N f(t) = \sum_{k=-N}^{N} \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \, e^{-2\pi i k x} \, dx \cdot e^{2\pi i k t} = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \underbrace{\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k (t-x)}}_{=: D_N(t-x)} \, dx$$

$$\boxed{D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k x} = \frac{\sin\left(2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{2\pi x}{2}\right)}}$$

2. Faltung

- Für 1-periodische Funktionen f, g ist die Faltung $f * g$ definiert als

$$(f * g)(t) := \int_0^1 f(x) \, g(t-x) \, dx$$

Die Periode ändert nur die Integrationsgrenzen $\rightsquigarrow \int_0^T \ldots$

- So gilt auch für $S_N f(t)$

$$S_N f(t) = \int_0^1 f(x) \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k (t-x)} \, dx = (f * D_N)(t)$$

Nicht vergessern, dass für T-periodische Funktionen folgendes gilt

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, dx = \int_{-T/2+c}^{T/2+c} f(x) \, dx \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \int_0^T f(x) \, dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, dx \quad (\text{hier wäre } c = T/2)$$

Tipps Serie 10

Aufgabe 2

- f gerade $\Rightarrow b_k = 0$ und f ungerade $\Rightarrow a_k = 0$
- $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ und $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$

Aufgabe 4

- $\cos(2\pi z) = \frac{e^{i \cdot 2\pi z} + e^{-i \cdot 2\pi z}}{z}$
- Geometrische Reihe verwenden

$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz}$ (Fourierreihe)

Beispiel: $\frac{1}{\cos(z)} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = 2e^{iz} \frac{1}{1 + e^{2iz}} = 2e^{-iz} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{2ikz}$

- Wann konvergiert die Summe (Konvergenzradius)? Finde die Reihe für beide Regionen $\rightsquigarrow$ $|z| < \rho$ und $|z| > \rho$ (ρ = Konvergenzradius)

Aufgabe 5

$$f(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}}_{i.} = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)}_{ii.}$$

i. Superposition von komplexen Exponentialfunktionen mit verschiedenen Frequenzen und Gewichten c_k

ii. Superposition von trigonometrischen Funktionen ($\sin(x)$, $\cos(x)$) mit verschiedenen Frequenzen und Gewichten a_k bzw. b_k

Beispiel $f(z) = \sin^2(z)$

$$\sin^2(z) = \left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right]^2 = -\frac{1}{4}\left[e^{2iz} - 2e^{iz} \cdot e^{-iz} + e^{-2iz}\right] = -\frac{1}{4}e^{2iz} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2iz}$$

komplexe Fourierreihe

$$\sin^2(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[e^{2iz} + e^{-2iz}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2z) \longrightarrow \text{reelle Fourierreihe}$$

Aufgabe 1

(c) $\Delta_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} - f(x) = S_N f(x) - f(x)$

Es ist 2π-periodisch!

1. Definition von c_k einsetzen (mit der Faltung): $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y)\,dy$

2. Verwende Aufgabe 1. b)

$$\Delta_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_N(x-t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\cdot \underbrace{2\pi}\, f(x)$$

Verwende Aufgabe 1 b)

3. Substitution beim $D_N(x-t)$ damit wir ein $D_N(y)$ erzeugen ($y := x-t$)

Grenzen anpassen

Wir machen das alles damit wir beide Integrale zusammensetzen können

4. Die Gleichung $\sin((N+1/2)y)\cdot h(y)$ ist gerade $(f(x+y)-f(x))\cdot D_N(y)$

(d) $h(y) = \dfrac{f(x+y)-f(x)}{\sin(y/2)}$

- Fixiere immer x und betrachte nur was mit y passiert
- h stetig differenzierbar folgt $h(y)$ und $h'(y)$ sind stetig

wir wissen, dass $h(y)$ stetig differenzierbar für $y \neq 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) ist, da $f \in C^2$. Also müssen wir nur zeigen, dass $\lim_{y\to 0} h(y)$ und $\lim_{y\to 0} h'(y)$ existieren

dann haben wir es auch für alle andere n gezeigt, weil $h(y)$ 2π-periodisch ist

- Verwende l'Hôpital für beide $\lim_{y\to 0}$
  - bei l'Hôpital leiten wir nach y ab!
  - nicht vergessern, dass $f \in C^2$

(e)

- Partielle Integration $\Rightarrow \int_a^b g(y)\sin(\alpha y)\,dy = [\cdots]_a^b + \frac{1}{\alpha}\int_a^b g'(y)\cos(\alpha y)\,dy$

- Integrale beschränken:

$$\int_a^b g(y)\sin(\alpha y)\,dy \leq \left|\int_a^b g(y)\sin(\alpha y)\,dy\right| \leq \left|[\cdots]_a^b\right| + \frac{1}{\alpha}\int_a^b |g'(y)|\cdot|\cos(\alpha y)|\,dy$$

- $\int_a^b |g'(y)||\cos(\alpha y)|\,dy \leq$? $\to$ was ist der maximale Wert von $|\cos(\alpha y)|$?

versuche etwas unabhängig von α zu finden

- $\lim_{\alpha\to\infty}$ betrachten

(f) Verwende Teilaufgabe (d) und (e)