Tipps

Aufgabe 1

(a) Orthonormal $\Rightarrow$ $\langle e_n, e_k \rangle_\omega = \begin{cases} 1, & n=k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$ mit $e_n(t) = e^{\frac{2\pi i n t}{\omega}}$

$\rightsquigarrow$ Zeige, dass $\frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(t)\overline{g(t)}\,dt$ mit $f(t) = e_n(t)$ und $g(t) = e_k(t)$ gleich ist wie $\begin{cases} 1, & n=k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

– betrachte den Fall $n=k$ separat

(b) Angenommen wir kennen die Fourierreihe und Fourierkoeffizienten einer 1-periodischen Funktion $g(t)$, finde die Fourierkoeffizienten (also ihre Formel) einer ω-periodischen Funktion $f(t)$. Wir müssen praktisch die Fourierreihe für generelle Perioden ω finden ausgehend von einer 1-periodischen Fourierreihe.

$$\boxed{\omega = 1} \qquad \underbrace{g(t)}_{\text{1-periodisch}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t) + b_k \sin(2\pi k t) \quad \text{mit} \begin{cases} a_k = 2\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\cos(2\pi k x)\,dx \\ b_k = 2\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin(2\pi k x)\,dx \end{cases}$$

– $f(t)$ ω-periodisch und $g(t)$ 1-periodisch $\Rightarrow$ $g(t) = f(\omega t)$

↳ $f(\omega t)$ ist 1-periodisch

$$\Rightarrow f(\omega t) = g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t) + \dots$$

$$\Rightarrow f(t) = ? \quad \text{und} \quad a_k, b_k = ?$$

– Für a_k, b_k $\rightsquigarrow$ Substitution $\rightsquigarrow$ $a_k = 2\int_{-1/2}^{1/2} \overset{\text{Subst.}}{f(\omega x)} \cos(2\pi k x)\,dx$

(c) Beweise erst die Formeln und setze sie dann ein

– Formeln zeigen: Ausmultiplizieren in komplexer Form

Aufgabe 2

(a) Finde $\hat{f}(k) = c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-\frac{2\pi i k x}{T}}\,dx$ ($\hat{f}(k) = c_k \Rightarrow$ komplexe Fourierkoeffizienten)

(b) Berechne erst $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2}$ mit Parseval

– Parseval: $\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$, wobei $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt$

$\hat{f}(k) \rightarrow$ (a) $\qquad e^{at}$

– $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2}$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \rightsquigarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = |c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$, falls $|c_k|^2 = |c_{-k}|^2$

!

– Für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+k^2)^2}$ betrachte die Ableitung nach a von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+k^2}$

was wir schon vorher berechnet haben

Aufgabe 3

(a) f gerade / ungerade $\Rightarrow$?

– verwende Aufgabe 1 (c)

(b) $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \Rightarrow \cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$

Aufgabe 4

$\hat{f}(k) = c_k$ bestimmen $\rightsquigarrow f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{i\pi k t} \rightarrow$ 2-periodisch

– Hier ist es nötig c_0 separat zu berechnen

ii) $f(t)$ an einer geschickten Stelle auswerten.

iii) Parseval: $|\hat{f}(k)|^2$ und $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |f(t)|^2\, dt = \|f\|^2$ finden $\rightsquigarrow \|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2$

– $|\hat{f}(k)|^2 = |\hat{f}(-k)|^2 \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = |\hat{f}(0)|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$