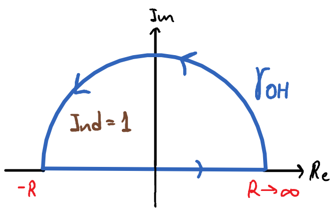
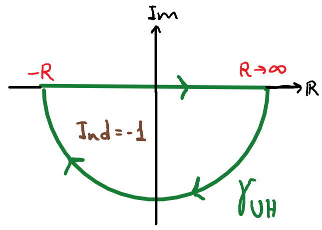
Theorie

1. Uneigentliche Integrale

– Wir haben schon gesehen, wie wir Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dt$ mit dem Residuensatz berechnen können, falls $f(x) \leq C x^{-2}\ \forall x$ gilt. Wir haben gesagt, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dt = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f|z_i)$, wobei hier z_i einer Singularität in der oberen Halbebene (OH) entspricht. Aber das geht alles auch für die untere Halbebene (UH)





$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f|z_i), \quad z_i \in OH$$

nur falls $[f(z) = o(z^{-2})\ \forall z \text{ mit } \mathrm{Im}\{z\} > 0]$

$[f(z) = o(z^{-2})\ \forall z \text{ mit } \mathrm{Im}\{z\} < 0]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f|z_i), \quad z_i \in UH$$

UH hat Index $-1\ \forall z_i \in UH \Rightarrow 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f|z_i)(-1)$

– Also ist es egal, ob wir jetzt den Residuensatz für die obere oder untere Halbebene anwenden (wir bekommen nur einen Faktor -1 für die untere Halbebene)

– Die Bedingung $f(z) = o(z^{-2})$ $[f(z) \leq C z^{-2}\ \forall z]$ muss nur für alle z auf dem Halbkreis erfüllt sein, damit $\underbrace{\int_0^{\pi} f(Re^{it}) Rie^{it}\,dt}_{OH}$ bzw $\underbrace{\int_0^{-\pi} f(Re^{it}) Rie^{it}\,dt}_{UH}$ nach Null konvergiert.

(also nur für $z \in OH$ bzw $z \in UH$ (Je nachdem für welche Halbebene man den Residuensatz anwenden will))

– Das ist wichtig, weil es Funktionen gibt, wo diese Bedingung nur für eine Halbebene gilt.

Beispiel: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it}}{t^2+2}\, dt \rightsquigarrow f(z) = \frac{e^{-iz}}{z^2+2}$

$\frac{1}{z^2+2} = \mathcal{O}(z^{-2})\ \forall z \in \mathbb{C}$ aber $\frac{e^{-iz}}{z^2+2} = \cancel{\mathcal{O}(|z|^{-2})\ \forall z} \rightarrow$ gilt nicht $\forall z$

Das würde nur gültig sein, falls $|e^{-iz}|$ beschränkt ist [nicht vergessern, dass $z \in \mathbb{C}$]

$|e^{-iz}| = |e^{-ia}||e^{b}| = e^{b}$, wobei $z = a+bi \rightsquigarrow b = \operatorname{Im}\{z\}$

i. Residuensatz mit OH: hier wäre $b \geq 0 \Rightarrow e^b \geq 1 \Rightarrow \frac{e^b}{|z^2+2|} \neq \mathcal{O}(|z|^{-2})$, weil wir $R \to \infty$ betrachten $\Rightarrow$ b geht auch eventuell nach $\infty \Rightarrow \frac{e^{-iz}}{|z^2+2|} \to \infty$ für gewisse $z \in$ OH da die Exponentialfunktion schneller als Polynome wächst.

Also ist hier die Bedingung für das Anwenden des Residuensatzes nicht erfüllt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f|z_i) \text{ für } \forall z_i \text{ auf der oberen Halbebene ist nicht gültig}$$

ii. Residuensatz mit UH: hier wäre $b \leq 0 \Rightarrow e^b \leq 1 \Rightarrow \frac{e^b}{|z^2+2|} = \mathcal{O}(|z|^{-2})$ für $z \in$ UH

$0 < |e^b| \leq 1$ für $b \leq 0$

also können wir hier Residuensatz verwenden um das Integral zu berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = -2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f|z_i) \text{ für } \forall z_i \text{ auf der unteren Halbebene ist gültig}$$

2. Fouriertransformation

$$\boxed{\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt}$$

- Eigenschaften:
  - i. $\mathcal{F}\{f(t)+g(t)\} = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$
  - ii. $\mathcal{F}\{f(t)\cdot g(t)\} = \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)$ [Faltung]
  - iii. $\mathcal{F}\{\frac{d}{dt} f(t)\} = i\omega \hat{f}(\omega)$
  - iv. $\mathcal{F}\{t f(t)\} = i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega)$

Beispiel: Berechne $\mathcal{F}\{t^2 f''(t)\}(\omega)$, wobei $\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega)$

$$\mathcal{F}\{t^2 f''(t)\}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{t f''(t)\}(\omega) = i^2 \frac{d}{d\omega}\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{f''(t)\}(\omega) = -\frac{d^2}{d\omega^2} i\omega \mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega)$$

$$= -\frac{d^2}{d\omega^2}(i\omega)^2 \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{d^2}{d\omega^2}\left[\omega^2 \hat{f}(\omega)\right]$$

Tipps Serie 12

Aufgabe 1

- Definition einsetzen, umformeln

(c) Substitution ($s = t/a$)

(d) Partielle Integration

Aufgabe 2

- Residuensatz für uneigentliche Integrale
- Wann ist die Bedingung für das Anwenden des Residuensatzes erfüllt (Was für einen Integrationsweg sollen wir verwenden? → Obere oder untere Halbebene)
  ⇝ Betrachte $\omega \geq 0$ bzw $\omega < 0$
- Betrachte auch die Symmetrie von $\hat{f}(\omega)$. Falls $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}(\omega)$ ⇒ wir müssen alles nur für $\omega \geq 0$ oder $\omega < 0$ berechnen

(b) $e^{-iat} = \cos(at) - i\sin(at) \Rightarrow \cos(at) = \mathrm{Re}\{e^{-iat}\}, \quad \sin(at) = -\mathrm{Im}\{e^{-iat}\}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(at)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{Re}\{e^{-iat}\}\,dt = \mathrm{Re}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iat}\,dt\Big\} = \mathrm{Re}\{\mathcal{F}\{f\}(a)\} = \mathrm{Re}\{\hat{f}(a)\}$$

↳ $f(t)$ rein reell

analog für $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(at)\,dt = -\mathrm{Im}\{\hat{f}(a)\}$

(d) $g(t)$ ist nicht rein reell $(g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{Re}\{e^{-iat}\}\,dt \neq \mathrm{Re}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-iat}\,dt\Big\}$

aber $g(t) = \dfrac{1}{t^2+i} = \dfrac{t^2-i}{t^4+1} = \dfrac{t^2}{t^4+1} - i\,\dfrac{1}{t^4+1}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos(\alpha t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{rein reell}}{\frac{t^2}{t^4+1}} \cos(\alpha t)\,dt}_{\mathrm{Re}\{\mathcal{F}\{\frac{t^2}{t^4+1}\}(\omega)\}} - i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{rein reell}}{\frac{1}{t^4+1}} \cos(\alpha t)\,dt}_{\mathrm{Re}\{\mathcal{F}\{\frac{1}{t^4+1}\}\}(\omega)}$$

↳ Aufgabe 2 (a) [a = 1]

Aufgabe 3

- Verwende Aufgabe 1 um eine DGL in ω-Raum zu finden

  $\mathcal{F}\{\frac{d}{dt}f(t)\}(\omega) = i\omega\, \mathcal{F}\{f\}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$

  $\mathcal{F}\{t f(t)\}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$

- Aufstellen der DGL in Fourierraum $\Rightarrow$ gewöhnliche homogene lineare DGL

  Die könnt ihr direkt lösen [Analysis I/II]

- Verwende Separation für diese DGL in ω-Raum

<u>Beispiel</u> $y'(x) - xy(x) = 0$

$$\frac{dy}{dx} - xy = 0 \rightsquigarrow dy = xy\,dx \longrightarrow \frac{1}{y}dy = x\,dx \rightsquigarrow \int \frac{1}{y}dy = \int x\,dx$$

$$\ln(y) + c_1 = \frac{1}{2}x^2 + c_2$$

$$e^{\ln(y)} \cdot e^{c_1} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{c_2}$$

$$y \cdot c_3 = e^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow y(x) = c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

↳ Konstante c ⇝ hängt vom Anfangswert ab $(y(0))$

- Mit der Lösung der DGL ⟶ Rücktransformation (sie wurde schon in der Vorlesung gegeben) ↳ $\left[\mathcal{F}\{e^{-t^2}\} = \sqrt{\pi}\, e^{\omega^2/4}\right]$

Aufgabe 4 → Lösung ist hier praktisch schon gegeben

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$

- Quadratisch ergänzen: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + i\omega x)}dx$

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2 = ax^2 + i\omega x - \frac{\omega^2}{4a} \Rightarrow ax^2 + i\omega x = \left(\sqrt{a}x + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4a}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + i\omega x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}})^2 - \frac{\omega^2}{4a}}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{a}}du = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du}_{\sqrt{\pi}}$$

↳ $u := \sqrt{a}x + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sqrt{a}$

(b) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (von (a))

Schreibe $g(x)$ als Linearkombination von $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc.

$\rightsquigarrow$ Da wir in (a) schon $\hat{f}(\omega)$ berechnet haben, kennen wir also auch $\mathcal{F}\{\frac{d}{dx}f(x)\}(\omega)$, $\mathcal{F}\{\frac{d^2}{dx^2}f(x)\}(\omega)$ etc (Aufgabe 1 (d))

- Bei $g_1(x)$ kommen Linearkombinationen von $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$ vor