Theorie

1. Originalfunktionen und Laplace-Transformation

– Eine Funktion f heisst Originalfunktion, falls

(i) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert
(ii) f stückweise glatt
(iii) für $t<0$ gilt $f(t)=0$
(iv) $|f(t)| = O(e^{\sigma t})$, $\sigma > 0$

– Sei f eine Originalfunktion. Dann ist die Laplace-Transformation von f $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ gegeben durch

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\}(s) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)}$$

2. Eigenschaften

(i) Linearität: $\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$

(ii) Differentiation: $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\}(s) = s\,\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0)$

(iii) Verschiebung: $\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{-at}\}(s) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

(iv) Faltung: $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)\,\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$

(v) f T-periodisch: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\,\mathcal{L}\{f_0(t)\}(s)$, wobei $f_0(t)$ nur eine Periode von f enthält.

– Darstellung mit Doetsch-Symbole ($\circ\!\!-\!\!\bullet$)

Laplace-transformierte $\mathcal{L}\{f\}$

$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$

Originalfunktion f

Beispiel:

$f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s)$

$\frac{d}{dt}f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; sF(s) - f(0)$

$(f*g)(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s)G(s)$

<u>Beispiel:</u> Löse die Differentialgleichung $x''(t) - x(t) = e^t$ mit $x'(0) = x(0) = 0$

$$\mathcal{L}\{x''(t) - x(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^t\}(s)$$

$$\frac{d}{dt}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\}(s) - \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^t\}(s)$$

$$t^n e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \; \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$s\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}x(t)\}(s) - \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0} - X(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$s\Big(sX(s) - x(0)\Big) - x'(0) + X(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$(s^2-1)X(s) = \frac{1}{s-1} \rightsquigarrow \text{Wir erhalten } X(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2-1)} = \frac{1}{(s-1)^2(s+1)}$$

$\to$ Partialbruchzerlegung $X(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1} = \frac{-1/4}{s-1} + \frac{1/2}{(s-1)^2} + \frac{1/4}{s+1}$

$\to x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t)$

Mit $t^n e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \; \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}\}(t) = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}(t) = -\frac{1}{4}e^t \qquad n=0, \; a=-1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2}\}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2}\}(t) = \frac{1}{2}te^t \qquad n=1, \; a=-1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}\}(t) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}(t) = \frac{1}{4}e^{-t} \qquad n=0, \; a=1$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1}\}(t) = -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^{-t}$$

$$= \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\sinh(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\sinh(t)$$

Tipps Serie 13

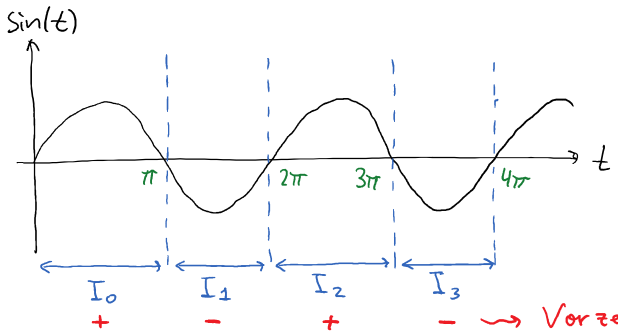
Aufgabe 1

(i) Ausmultiplizieren und integrieren

(ii) Integriere mit $\sin(x)$ in komplexe Form

(iii)

Wir wissen, dass $\sin(t)$ innerhalb $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$ nicht das Vorzeichen ändert $\left(I_k := [k\pi, (k+1)\pi] \right)$



$\rightsquigarrow$ Vorzeichen ist $(-1)^k$

für $t \in I_k$ hat $\sin(t)$ das Vorzeichen $(-1)^k$

$\rightsquigarrow \sin(t) = (-1)^k |\sin(t)|$ für $t \in I_k$

$\Rightarrow |\sin(t)| = (-1)^k \sin(t), \; t \in I_k$

Wir haben also $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \, dt = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(t) \, dt \Rightarrow \int_0^\infty |\sin(t)| \, dt = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(t) \, dt$

$\rightsquigarrow$ Wir können das gleiche für $|\sin(t)| e^{-st}$ machen

$$\int_0^\infty |\sin(t)| e^{-st} \, dt = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_{k\pi} \sin(t) e^{-st} \, dt$$ $\rightsquigarrow$ da e^{-st} immer ≥ 0 ist

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{ |\sin(t)| \}(z) := \int_0^\infty |\sin(t)| e^{-zt} \, dt = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(t) e^{-zt} \, dt$$

$\rightarrow$ Man muss nur noch das Integral in der Summe berechnen

zweimal partielle Integration (Rekursiv) $\hookleftarrow$

Tipp: versuche es mit der geometrischen Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty e^{-\pi k z}$ zu berechnen

Rücktransformieren

$\left[\text{Beispiel: } \displaystyle\sum_{k=0}^\infty x^k \xrightarrow{\text{„Rücktransf. GR"}} \frac{1}{1-x}, \; |x| < 1 \right]$

$\rightsquigarrow$ Was ist die Bedingung damit diese „Rücktransformation" der geometrischen Reihe gültig ist? $\rightsquigarrow$ Wir finden also eine Beschränkung für z in unserer Lösung

Nicht vergessen, dass $z \in \mathbb{C}$!

Aufgabe 2

- Partialbruchzerlegung (Tipp: $z=2$ ist eine Nullstelle vom Nenner)

$$\frac{-2z^2+18z-3}{z^3-z^2-8z+12} = \frac{A}{z-z_0} + \frac{B}{z-z_1} + \cdots$$

[• Nicht vergessen, dass der Ansatz für eine Nullstelle dritten Grades, zum Beispiel, $\frac{A}{z-z_0} + \frac{B}{(z-z_0)^2} + \frac{C}{(z-z_0)^3}$ ist]

- Verwende $\mathcal{L}\{t^n e^{-at}\}(z) = \frac{n!}{(z+a)^{n+1}}$ um die Rücktransformation zu schätzen

[Beispiel: $\frac{3}{(z+2)^3} = \frac{3}{2}\,\frac{2}{(z+2)^3} = \frac{3}{2}\,\frac{2!}{(z+2)^3} \rightarrow a=2,\ n=2 \rightarrow \frac{3}{(z+2)^3} = \mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\}(z)$]

- Für komplexe Nullstellen verwende nicht den reellen Ansatz

$\frac{1}{z^2+a} = \frac{Bz+C}{z^2+a} \rightarrow$ Anstatt verwende $\frac{1}{z^2+a} = \frac{A}{z+ia} + \frac{B}{z-ia}$

Aufgabe 3 und 4

- Wir wissen, dass $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\}(z) = z\,\mathcal{L}\{f(t)\}(z) - f(0) = zF(z) - f(0)$

Beispiel: $\mathcal{L}\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\}(z) = z\,\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\}(z) - \frac{d}{dt}f(t)\Big|_{t=0} = z\left(z\,\mathcal{L}\{f(t)\}(z) - f(0)\right) - f'(0)$

$$= z^2\mathcal{L}\{f(t)\}(z) - zf(0) - f'(0) = z^2F(z) - zf(0) - f'(0)$$

- Beide Seiten der DGL Laplace transformieren
- Anfangsbedingungen $\ddot{x}(0)$, $\dot{x}(0)$, $x(0)$ einsetzen
- Umformen und Gleichung für $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(z)$ finden
- Die Laplace-Rücktransformation von $X(z)$ ist gerade $x(t)$, also die Lösung der DGL die wir suchen

$\rightsquigarrow$ Für Rücktransformation verwende wieder $\mathcal{L}\{t^n e^{-at}\}(z) = \frac{n!}{(z+a)^{n+1}}$

Aufgabe 4

- Wir kennen die Laplace-Transformation für periodische Funktion

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\,\mathcal{L}\{f_0\}(s)$$

wobei $\mathcal{L}\{f_0\}(s)$ die Laplace-Transformation für nur eine Periode ist

$$\mathcal{L}\{f_0\}(s) = \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,e^{-st}\,dt$$

Beispiel: $f(t) = 2$-periodische Fortsetzung von $(t-1)^2$, $t \in [0,2]$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\,\mathcal{L}\{f_0\}(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot e^{-s}\cdot \mathcal{L}\{t^2\}(s)$$

$$= \frac{e^{-s}}{1-e^{-2s}}\cdot\frac{2}{s^3}$$