Theorie

1. Cauchy-Riemannschen Gleichungen

– Eine Funktion definiert auf $U \subset \mathbb{C}$ lässt sich als Funktion $\tilde{f}$ auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auffassen

$$\tilde{f}(x,y) = \underbrace{f(x+iy)}_{f(z)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

wobei $x = \mathrm{Re}\{z\}$, $y = \mathrm{Im}\{z\} \longrightarrow z = x+iy$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(x+h, y) - \tilde{f}(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h}$$

⚠ $h \in \mathbb{R}$

$$= f'(x+iy), \text{ falls } f \text{ komplex differenzierbar ist}$$

(Bem.: hier haben wir Differenzierbarkeit auf der Re-Achse definiert)

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(x, y+h) - \tilde{f}(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+i(y+h)) - f(x+iy)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+iy+ih) - f(x+iy)}{h} = i \lim_{h \to 0} \frac{f(x+iy+ih) - f(x+iy)}{ih}$$

$$= if'(x+iy), \text{ falls } f \text{ komplex differenzierbar ist}$$

(Bem.: hier haben wir Differenzierbarkeit auf der Im-Achse definiert)

Damit es jetzt generell differenzierbar ist, müssen diese zwei Ableitungen die gleiche sein:

$$\Rightarrow \quad \boxed{i \frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+iy)}$$

– Wenn wir jetzt auch die Abbildung in Re- bzw Im-Teil teilen, das heisst

$$\tilde{f}(x,y) = f(x+iy) = \underbrace{u(x,y)}_{\mathrm{Re}\{\tilde{f} \text{ bzw } f\}} + i\underbrace{v(x,y)}_{\mathrm{Im}\{\tilde{f} \text{ bzw } f\}}$$

Dann können wir zusätzliche Gleichungen finden

$$i \frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+iy)$$

$$i \frac{\partial}{\partial x} (u(x,y) + iv(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y} (u(x,y) + i\,v(x,y))$$

$$\underline{i \frac{\partial}{\partial x} u(x,y)} - \underline{\frac{\partial}{\partial x} v(x,y)} = \underline{\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)} + \underline{i \frac{\partial}{\partial y} v(x,y)}$$

Da $u(x,y)$ und $v(x,y)$ reell sind, müssen wir hier nur Re- bzw Im-Teil vergleichen (Koeffizientenvergleich)

Realteile $\Longrightarrow$ $-\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x,y)$

Imaginärteile $\Longrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y)$

andere Schreibweise:

$$-v_x = u_y$$
$$u_x = v_y$$

– Theorem: Eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn die Cauchy-Riemannschen Gleichungen erfüllt sind.

⚠ holomorph = komplex differenzierbar = analytisch

<u>Beispiel</u>: $f(z) = z^2$

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$i \frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = i \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2xyi - y^2) = i(2x + 2yi) = 2xi - 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xyi - y^2) = 2xi - 2y$$

$\overset{?}{=}$

Ja, also ist $f(z) = z^2$ holomorph

<u>Beispiel</u>: $f(z) = \bar{z}$

$$f(x+iy) = x - iy$$

$$i \frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = i \frac{\partial}{\partial x}(x - iy) = i$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y}(x - iy) = -i$$

$\overset{?}{=}$ Nein, also ist $f(z) = \bar{z}$ <u>nicht</u> holomorph

Beispiel: $f(z) = x^2 - x + 2xyi - yi - y^2$ für $z = x+iy$, $z \in \mathbb{C}$

wir versuchen es jetzt mit den anderen zwei Gleichungen (die mit Ableitungen von $u(x,y)$ und $v(x,y)$)

$$f(z) = (x^2 - x - y^2) + i(2xy - y) \rightsquigarrow \begin{array}{l} u(x,y) = \mathrm{Re}\{f(z)\} = x^2 - x - y^2 \\ v(x,y) = \mathrm{Im}\{f(z)\} = 2xy - y \end{array}$$

$$u_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - x - y^2) = 2x - 1 \qquad v_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - y) = 2y$$

$$u_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - x - y^2) = -2y \qquad v_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - y) = 2x - 1$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i. Ist } u_x \overset{?}{=} v_y & \Rightarrow \quad 2x - 1 \overset{?}{=} 2x - 1 \\ \text{ii. Ist } u_y = -v_x & \Rightarrow \quad -2y \overset{?}{=} -2y \end{array}\right\} \text{Ja, also ist hier } f(z) \text{ holomorph}$$

(Bem.: $x^2 - x + 2xyi - yi - y^2$ entspricht $(x+yi)^2 - (x+iy) = z^2 - z$. Also ist $f(z) = z^2 - z$ und Polynome sind <u>immer</u> holomorph)

2. Laplace-Operator:

– Der Laplace-Operator (Δ) ist die Summe der zweifachen partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ nach allen Variablen.

– Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ist der Laplace-Operator gegeben durch

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f$$

↳ $f = f(x_1, x_2, \dots x_n) \rightsquigarrow$ nur Abkürzung :)

Notation: $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$

– Da wir hier in $\mathbb{C}$ sind, benutzen wir nur den zweidimensionalen Laplace-Operator

$$\Delta f(x+iy) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x+iy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x+iy)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

<u>Beispiel:</u> $f(z) := z^2 - z$. Berechne $\Delta f(z)$

$$f(x+iy) = x^2 - x + 2xyi - yi - y^2$$

$$\begin{aligned}
\Delta f(x+iy) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x+iy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x+iy) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - x + 2xyi - yi - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - x + 2xyi - yi - y^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(2x - 1 + 2yi) + \frac{\partial}{\partial y}(2xi - i - 2y) \\
&= 2 - 2 = 0 \quad \lrcorner
\end{aligned}$$

– Theorem: Alle komplex differenzierbare Funktionen erfüllen $\Delta f(z) = 0$

$$\begin{aligned}
\Delta f(x+iy) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x+iy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x+iy) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(u(x,y) + i\,v(x,y)\big) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(u(x,y) + i\,v(x,y)\big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + i\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) + i\,v(x,y)\Big)
\end{aligned}$$

Abkürzung $(u = u(x,y),\ v = v(x,y))$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}u}_{u_x = v_y} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}u}_{u_y = -v_x} + i\Big(\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}v}_{v_x = -u_y} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}v}_{v_y = u_x}\Big) \quad (= \Delta u + \Delta v) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{\partial}{\partial x}v\Big) + i\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{\partial}{\partial y}u\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u\Big) \\
&= \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}v - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}v} + i\Big(\cancelto{0}{-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u}\Big) \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3. Mengen

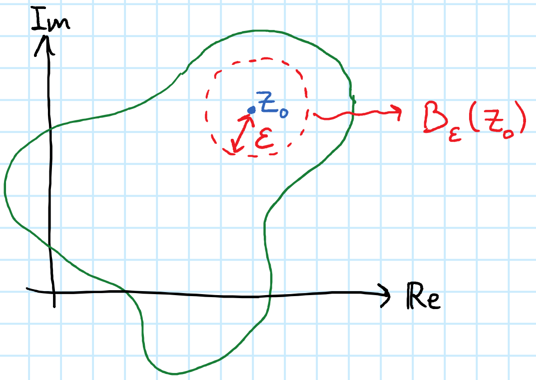
– Teilmengen von $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \ldots$ können verschiedene Eigenschaften haben. Diese Eigenschaften können uns sagen, wie bestimmte Abbildungen oder komplexe Integrale, zum Beispiel, sich verhalten werden. Hier werden wir grundsätzlich 4 Eigenschaften betrachten:

i. Offen

in $\mathbb{R}$: $U \subset \mathbb{R}$ heisst offen, falls $\forall x \in U \; \exists\, \varepsilon > 0$ s.d. $x + \varepsilon \in U$

in $\mathbb{C}$: $U \subset \mathbb{C}$ heisst offen, falls $\forall z \in U \; \exists\, B_{\varepsilon>0}(z)$ s.d. $B_{\varepsilon>0}(z) \in U$, wobei

$B_{\varepsilon>0}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$



~~Beispiel: $U \subset \mathbb{R}$, $U :=]-\infty, 1]$~~

~~für Werte $x \in U$ mit $x \to -\infty$ ist es klar, dass es offen ist. Für $x \to 1$ können wir auch unendlich nahe entfernt sein (Abstand kann unendlich klein sein, dass heisst, wir können immer näher dran kommen ($\varepsilon > 0$) ohne die Grenze zu überschreiten ($\Rightarrow x + \varepsilon > 0$ ist immer noch in U))~~

~~↳ $0.99999\ldots + 10^{-999\ldots} \in U$~~

Beispiel: $U \subset \mathbb{R}$, $U :=]-\infty, 1]$

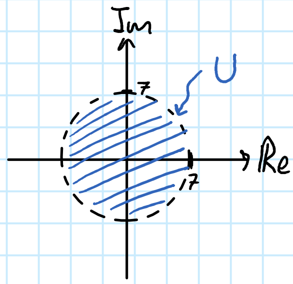
für $x \to -\infty$ ist es offen, aber für $x \to 1$ ist es nicht offen, weil $1 \in U$ und $1 +$ irgend eine Zahl grösser als Null ist dann nicht mehr in U.

Hier haben wir eine Mischung von offen und nicht offen. U ist also nicht offen (Schau mal die Definition von offen: $\forall x \in U \ldots$)

!

Beispiel: $B_7(0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 7 \}$ ist offen

$\forall z \in B_7(0) \; \exists\, B_{\varepsilon>0}(z)$ s.d. $B_{\varepsilon>0}(z) \in B_7(0)$



<u>Beispiel:</u> $U := \mathbb{C}$, U ist offen

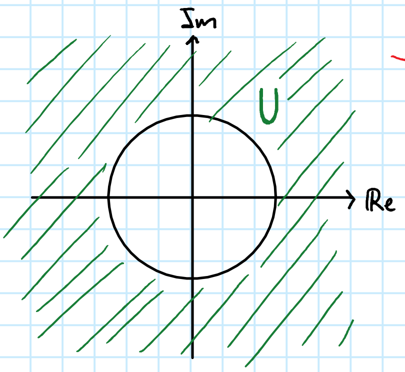
<u>Beispiel:</u> $U := \emptyset = \{\}$, U ist offen (kein $z \Rightarrow \forall z$ erfüllt)

ii. **Abgeschlossen:** $U \subset \mathbb{C}$ heisst abgeschlossen, falls $\mathbb{C} \setminus U$ offen ist

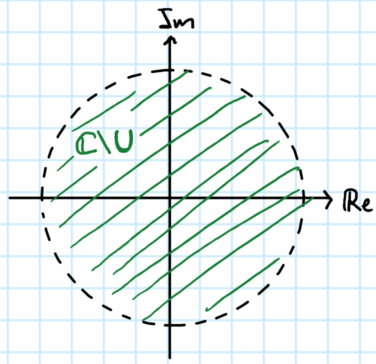
↳ Komplementärmenge einer offenen Menge

<u>Beispiel:</u> $U \subset \mathbb{C}$, $U := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 3 \}$

$\mathbb{C} \setminus U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3 \} = B_3(0)$ ⇝ $B_R(z_0)$ ist immer offen, also ist U abgeschlossen



→ für $z \in U$ ist U für $r \to \infty$ (also in Polarform) offen aber für $r \to 3$ nicht offen $\Rightarrow$ U ist nicht offen



$\mathbb{C} \setminus U$ ist offen

<u>Beispiel:</u> $U := \mathbb{C}$

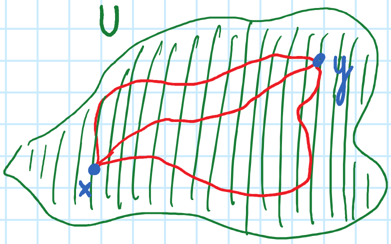
U ist offen (Bedingung für alle $z \in U = \mathbb{C}$ erfüllt. Da U die ganze komplexe Ebene entspricht, sind alle mögliche z in U)

$U \setminus \mathbb{C} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C} = \emptyset = \{\}$. Wie wir schon gesehen haben, ist die leere Menge offen. $\Rightarrow$ U ist abgeschlossen

$\mathbb{C}$ ist offen und abgeschlossen

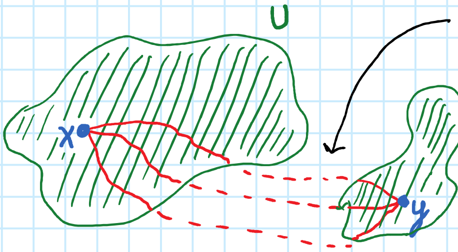
⚠ Wenn eine Menge Halboffen (↳ manchmal offen, manchmal nicht) ist (also eine Mischung wie bei $]3, 2]$, zum Beispiel), dann sagen wir einfach, dass die Menge nicht offen ist (offen nur falls Bedingung für $\forall z$ erfüllt ist!) Gleich für abgeschlossen: Falls $\mathbb{C} \setminus U$ offen ist, dann ist U abgeschlossen. Aber falls $\mathbb{C} \setminus U$ manchmal offen und manchmal nicht offen ist, dann ist U nicht abgeschlossen

iii. **Wegzusammenhängend:** für jedes Paar x, y (x, y ∈ U) gibt es einen <u>stetigen</u> Weg von x nach y.



Wegzusammenhängend

Für alle Paare x, y ($x, y \in U \subset \mathbb{C}$) existiert ein Weg, die die beiden verknüpft und <u>komplett</u> in U liegt



nicht stetig!

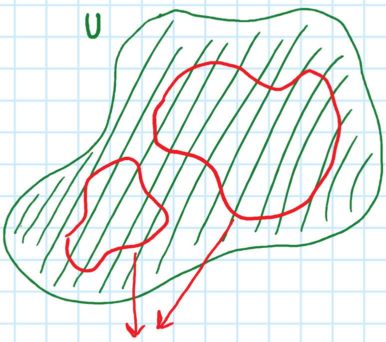
nicht wegzusammenhängend

Es ist unmöglich x und y durch einen stetigen Weg zu verknüpfen. Generell sind <u>disjunkte</u> Mengen nicht wegzusammenhängend

↳ $A, B \subset \mathbb{C}$, $A \cap B = \emptyset$

iv. **Einfach zusammenhängend:** Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend, falls sie wegzusammenhängend <u>und</u> Nullhomotop ist. Nullhomotop heisst, dass „bei geschlossene Wege nur Elemente von U enthalten sind (in die geschlossene Fläche)".

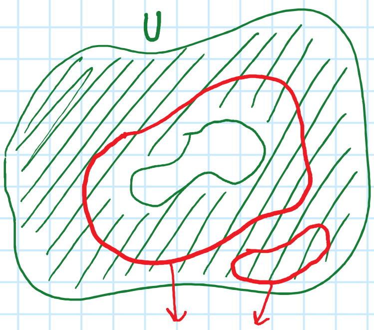
↳ stetig



geschlossene Wege

Für alle geschlossene Wege ist die innere Fläche vom Weg in U

⇒ einfach zusammenhängend

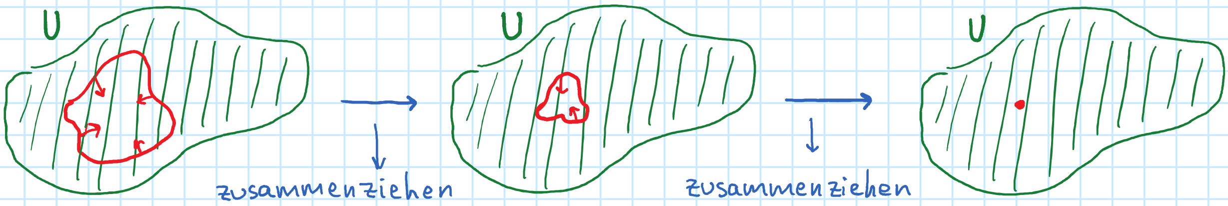


geschlossene Wege

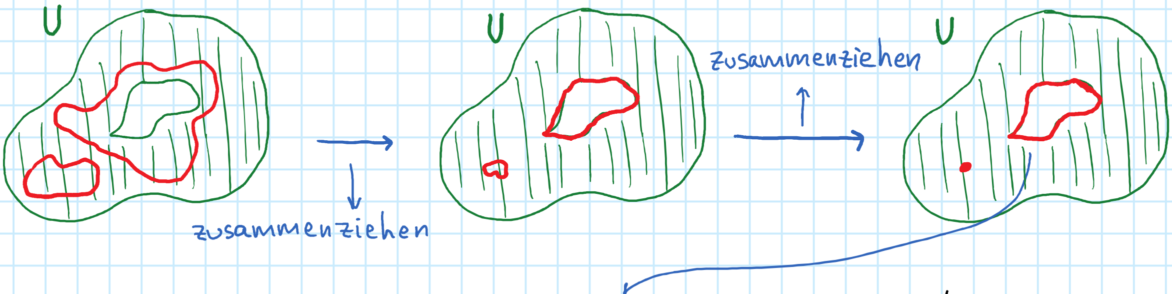
Für gewisse Wege ist die innere Fläche nicht ganz in U

⇒ nicht einfach zusammenhängend

– Nullhomotopie kann auch wie folgt interpretiert werden: jeder geschlossene Weg lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen



Wir ziehen den Weg zusammen und schauen, ob es möglich ist, es zu einen Punkt transformieren. Hier ist es für alle geschlossene Wege möglich und deshalb ist U auch einfach zusammenhängend



Hier ist es nicht möglich den Weg zu einen Punkt zusammenziehen, weil sonst der Weg nicht in U ist (ein Weg ist nichts anderes als die Zusammensetzung von verschiedenen Punkten $z_i \in U$. Also müssen Wege, egal ob geschlossen oder nicht, immer in U sein). Hier wäre also U nicht einfach zusammenhängend

Tipps Serie 3

Aufgabe 2

– finde $f(z)$ in der Form $f(x,y)$, also wo wir etwas als Funktion von x und y ($x = \mathrm{Re}\{z\}$, $y = \mathrm{Im}\{z\}$) haben, indem man in z einfach $x+iy$ einsetzt. Hier könnt auswählen in welche Form ihr die Cauchy-Riemannschen Gleichungen aufbaut. Für $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ muss man zusätzlich die Abbildung in $\mathbb{R}e$ bzw $\mathbb{I}m$ aufteilen.

Aufgabe 3

(a) $u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + 3x^2 - 3y^2$

holomorph $\Rightarrow$ $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$

Da wir ein Verhältnis zwischen u und v haben, können wir v von u berechnen.

i. Finde u_x, also $\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)$

ii. Benutze Cauchy-Riemannsche Gleichung (v_y ist gerade u_x)

iii. Geeignete Integration nach y (eine Lösung für v)

iv. Schritte i, ii, iii mit u_y und v_x

v. Lösung von iii und iv soll gleich sein. Wann ist es erfüllt?

(b) harmonisch $\Rightarrow$ $\Delta f(z) = 0$

$$\Delta f(x+iy) = \Delta(u(x,y) + v(x,y)) = \Delta u(x,y) + \Delta v(x,y) \overset{!}{=} 0$$

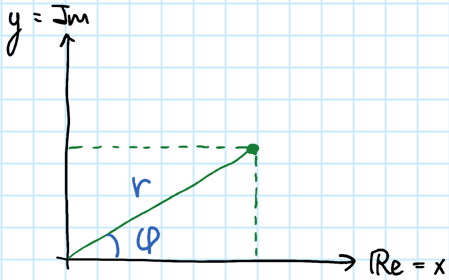
i. $\Delta u(x,y) \overset{!}{=} 0$. Für welche Werte a ist das für $\forall z = x+iy$ erfüllt?

ii. Analog zu (a), finde $v(x,y)$ für alle $u(x,y)$ mit a von i.

(c) Cauchy-Riemann

Aufgabe 4

– Polarkoordinaten



$$x(r,\varphi) = r\cos(\varphi)$$
$$y(r,\varphi) = r\sin(\varphi)$$

– $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$
$= u(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) + iv(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$

Finde mit Kettenregel $\frac{\partial}{\partial r}u(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}u(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial r}v(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}v(x,y)$

<u>Beispiel:</u> $\frac{\partial}{\partial r}u(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = u_x \cdot x_r + u_y \cdot y_r$
$= u_x \cdot \underbrace{\cos(\varphi)} + u_y \cdot \underbrace{\sin(\varphi)}$

da $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}x = \frac{\partial}{\partial r}(r\cos(\varphi)) = \cos(\varphi)$ ⋮ $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}y = \frac{\partial}{\partial r}(r\sin(\varphi)) = \sin(\varphi)$

– Benutze $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ um die Ableitungen zu umformulieren.

<u>Beispiel:</u> $\frac{\partial}{\partial r}u(x,y) = u_x\cos(\varphi) + u_y\sin(\varphi) \quad | \quad u_x = v_y$
$= v_y\cos(\varphi) + u_y\sin(\varphi)$

⚠ Nicht vergessern, dass x bzw y Funktionen von r und φ sind. Hier steht x anstatt $x(r,\varphi)$ nur als Abkürzung (gleich wie u_x, u_y, etc)

(b) $\frac{\partial f(x+iy)}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow$ holomorph

Wir müssen nach $\bar{z}$ ableiten, aber $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ hat natürlich kein $\bar{z}$. Also müssen wir eine Variablentransformation durchführen und $f(x+iy)$ mit z und $\bar{z}$ ausdrücken.
Wir suchen x und y als Funktion von z und $\bar{z}$

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{x+iy+x-iy}{2} = x \,, \quad \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{x+iy-x+iy}{2i} = y$$

$$\rightsquigarrow x(z,\bar{z}) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{und} \quad y(z,\bar{z}) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\Rightarrow f(x+iy) = f(x(z,\bar{z}) + iy(z,\bar{z})) = u(x(z,\bar{z}), y(z,\bar{z})) + iv(x(z,\bar{z}), y(z,\bar{z}))$$

Was ist $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x(z,\bar{z}) + iy(z,\bar{z}))$? $\rightsquigarrow$ Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(u(x(z,\bar{z}), y(z,\bar{z})) + iv(x(z,\bar{z}), y(z,\bar{z}))\right)$$

$$= u_x \cdot x_{\bar{z}} + u_y \cdot y_{\bar{z}} + i\left(v_x \cdot x_{\bar{z}} + v_y \cdot y_{\bar{z}}\right)$$ $\rightsquigarrow$ Abkürzung ($u_x = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y)$ etc...)

Die Funktionen $x(z,\bar{z})$ und $y(z,\bar{z})$ sind bekannt, also ist auch $x_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} x(z,\bar{z})$ auch bekannt (analog für $y_{\bar{z}}$)

$$\rightsquigarrow x(z,\bar{z}) = \frac{z+\bar{z}}{2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} x(z,\bar{z}) = x_{\bar{z}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow y(z,\bar{z}) = \frac{z-\bar{z}}{2i} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} y(z,\bar{z}) = y_{\bar{z}} = -\frac{1}{2i}$$

$x_{\bar{z}}$ und $y_{\bar{z}}$ einsetzen und Cauchy-Riemannschen Gleichungen ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) verwenden und zeigen, dass $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x+iy) \overset{!}{=} 0$