Nachbesprechung Serie 2

Aufgabe 5

$M := \{ z \in \mathbb{C} \mid \alpha |z|^2 + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0 \}$ wobei $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$

$\alpha = 0 \Rightarrow$ Gerade

Wir haben für $z = x + yi$, $\beta = a + bi$ eingesetzt in $\underbrace{\beta z}_{\omega} + \underbrace{\bar{\beta} \bar{z}}_{\bar{\omega}} + \gamma = 0$

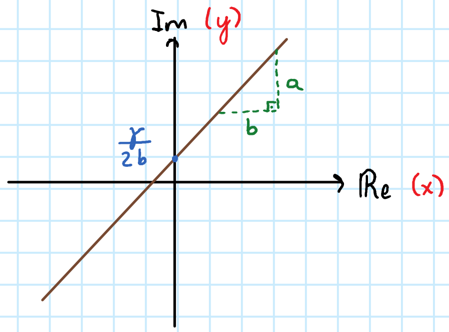
$\omega + \bar{\omega} + \gamma = 0$, $\quad \omega + \bar{\omega} = 2 \mathrm{Re}\{\omega\}$

$2 \mathrm{Re}\{\beta z\} + \gamma = 0$

$2 \mathrm{Re}\{(x+yi)(a+bi)\} + \gamma = 0$

$2(xa - yb) + \gamma = 0$

$2yb = 2xa + \gamma \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{Steigung}} x + \underbrace{\frac{\gamma}{2b}}_{\text{Anfangsbedingung}}$



$\alpha = 1 \Rightarrow$ Kreis

$\alpha |z|^2 + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0 \quad$ mit $z = x + yi$, $\beta = a + bi$

$(x+yi)(x-yi) + (a+bi)(x+yi) + \overline{(x+yi)}\,\overline{(a+bi)} + \gamma = 0$

$x^2 + y^2 + ax + \cancel{ayi} + \cancel{bxi} - by + xa - \cancel{xbi} - \cancel{ayi} - yb + \gamma = 0$

$x^2 + 2ax + y^2 - 2yb + \gamma = 0$

$(x+a)^2 - a^2 + (y-b)^2 - b^2 + \gamma = 0$

$(x+a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - \gamma \rightsquigarrow$ Kreis mit Mittelpunkt $(-a, b)$ und Radius $r = \sqrt{a^2 + b^2 - \gamma}$

$|x + yi + a - bi|^2 = a^2 + b^2 - \gamma$

$|z - (-\bar{\beta})| = \sqrt{|\beta|^2 - \gamma}$

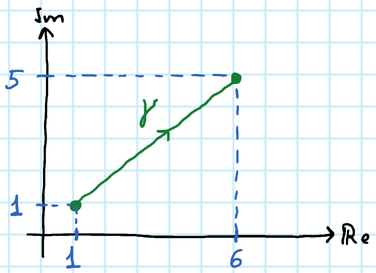
$\hookrightarrow$ also für $|z - z_0| = r$ wähle $\beta = -\bar{z}_0$ und $\gamma = |\beta|^2 - r^2$ $\quad \lrcorner$

Theorie

1. Kurvenintegrale

– Wir wollen das Integral einer bestimmten Abbildung auf einem bestimmten Weg integrieren.

Beispiel:



Wir suchen $\int_\gamma f(z)\,dz$, wobei $f(z) = z^2$

→ Das heisst, wir lassen alle Punkte durch die Abbildung gehen und summieren es am Ende

$$\underbrace{\text{„}\forall z \in \gamma \rightsquigarrow f(z) = z^2 \longrightarrow \Sigma\text{"}}_{\int_\gamma f(z)\,dz}$$

– Die Schwierigkeit beim Berechnen des Integrals besteht darin, dass wir nur die komplexe Zahlen auf γ integrieren wollen. Dafür benutzen wir die sogenannte Parametrisierung von γ.

1.1 Parametrisierung

– Eine Parametrisierung ist eine Funktion, die für eine laufende Variable im Intervall $[a,b]$, alle gewünschten komplexen Zahlen z auf dem Weg γ gibt.

Beispiel: Wir suchen die Parametrisierung für das vorherige Beispiel Nennen wir mal unsere laufende Variable t. Wir suchen $\gamma(t)$ die für $t \in [a,b]$ (wobei wir a und b ($a,b \in \mathbb{R}$) willkürlich auswählen können) alle z auf γ „referenziert"

$\gamma(t) := 1+i+t(5+4i) \rightsquigarrow$ Gerade! $\gamma(t) = z_0 + t \cdot z_r$, z_0 = Anfangsverschiebung („Achsenabschnitt")

$z_0, z_r \in \mathbb{C}$
$t \in \mathbb{R}$

z_r = Richtung/Steigung

t = Skalierungsfaktor

Da wir uns nur mit den Werten von $1+i = z_0$ bis $6+5i$ interessieren, definieren wir unser Interval $I := [0,1]$. Also läuft t von 0 bis 1 $(t \in I)$

Setzen wir $\gamma(t)$ im z vom $\int_\gamma f(z)\,dz$ und lassen t von 0 bis 1 gehen, so können wir die Abbildung aller komplexen Zahlen auf γ integrieren.

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,dz$$

Wenn wir dieses Integral richtig anschauen, sehen wir, dass es hier ein Problem gibt

Wir wollen nicht mehr nach z (dz) integrieren, sondern nach t (dt), unsere neue Variable der Parametrisierung. Wir suchen also ein Verhältnis zwischen der infinitesimalen Integrationslänge im z-Raum und im t-Raum.

Einfach gesagt, das Verhältnis zwischen dz und dt.

Dieses erhalten wir indem wir unser $z=\gamma(t)$ nach t ableiten:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\gamma(t)}{dt} = \gamma'(t) \rightarrow \frac{dz}{dt} = \gamma'(t) \Rightarrow dz = \gamma'(t)\,dt$$

Setzen wir $dz = \gamma'(t)\,dt$ im Integral, so erhalten wir

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

– Generalisiert:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt, \quad t\in[a,b]}$$

<u>Beispiel:</u> Wir berechnen jetzt $\int_\gamma f(z)\,dz$

- Für die Abbildung gilt $f(z) = z^2$
- Für den Integrationsweg (ihre Parametrisierung) gilt $\gamma(t) = 1+i+t(5+4i)$, $t\in[0,1]$

Einsetzen von $\gamma(t)$ in $f(z) \Rightarrow f(\gamma(t)) = [1+i+t(5+4i)]^2 = (1+i)^2 + 2(1+i)\cdot t(5+4i) + [t(5+4i)]^2$

$$= \cancel{1} + 2i - \cancel{1} + 2t + 18ti + t^2(9+40i)$$

$$= 2i + t(2+18i) + t^2(9+40i)$$

Berechnen von $dz \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\gamma(t) = (5+4i) \Rightarrow dz = (5+4i)dt$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 [2i + t(2+18i) + t^2(9+40i)]\cdot(5+4i)\,dt$$

$$= (5+4i)\left[2it + \frac{1}{2}t^2(2+18i) + \frac{1}{3}t^3(9+40i)\right]_0^1 = -\frac{232}{3} + \frac{413}{3}i$$

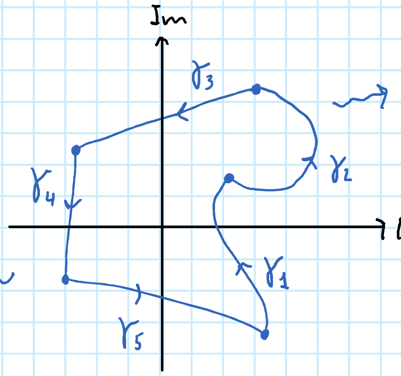
1.2 Eigenschaften

i. Linearität: $\int_\gamma \alpha f(z) + \beta g(z)\, dz = \alpha \int_\gamma f(z)\, dz + \beta \int_\gamma g(z)\, dz$

ii. $\int_\gamma f(z) = - \int_{-\gamma} f(z)\, dz \rightarrow -\gamma =$ die in umgekehrte Richtung durchlaufene Kurve.

iii. Ist γ eine Kette von Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ so gilt

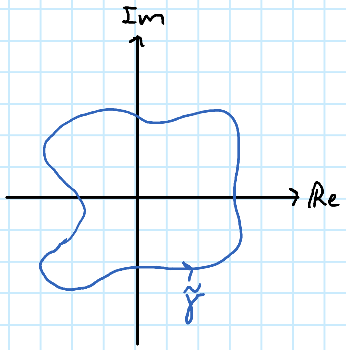
$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{n=1} \int_{\gamma_n} f(z)\, dz}$$

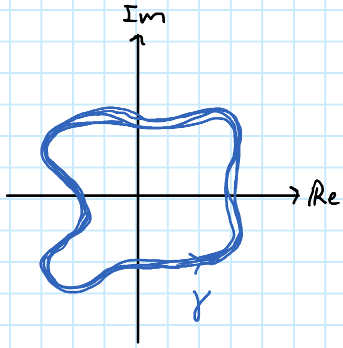


$\rightsquigarrow \gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_4} f(z)dz \leftsquigarrow$

iv. Durchläuft γ den Weg $\tilde{\gamma}$ k mal, so gilt





$\gamma =$ k-mal $\tilde{\gamma}$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = k \cdot \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz$$

(„k mal das gleiche Integral da wir $\tilde{\gamma}$ k mal durchlaufen")

Notation: $\gamma = k \cdot \tilde{\gamma}$

2. Cauchy-Integralsatz

2.1. Satz von Cauchy

– Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$, eine in ganz U stetige Funktion. Dann gilt

i. $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ für <u>alle</u> <u>geschlossene</u> Kurven $\gamma \in U$

Bemerke, dass es unabhängig vom Weg ist!

ii. $f(z)$ besitzt eine Stammfunktion $F(z)$ mit $F'(z) = f(z)$

Mit ii. können wir i. beweisen.

- Für eine geschlossene Kurve γ gilt, dass die Endpunkten identisch sind $\Rightarrow$ Wenn wir γ im Intervall $[a,b]$ definieren, so gilt $\gamma(a)=\gamma(b)$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0,$$ da $f(z)$ die Stammfunktion $F(z)$ besitzt und $\gamma(b)=\gamma(a) \Rightarrow F(\gamma(b)) = F(\gamma(a))$

■

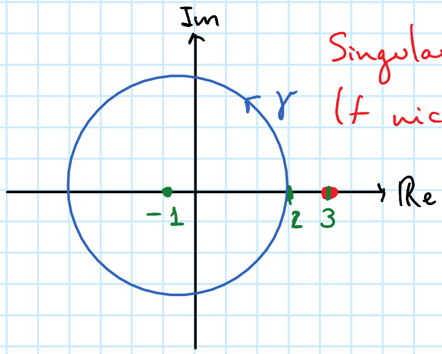
2.2. Satz von Cauchy (Erweiterung)

- Sei jetzt $f: U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet. Für jede geschlossene Kurve in U gilt

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$$

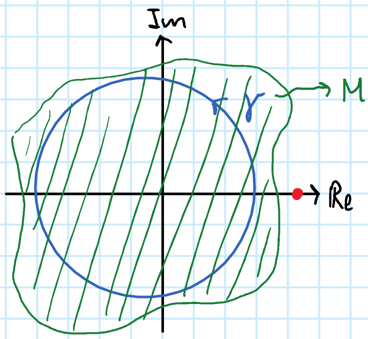
Beispiel: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-3}$ mit $\gamma \Rightarrow |z+1| = 3$ (Kreis mit Mittelpunkt $(-1,0)$ und Radius 3

Wir suchen $\int_\gamma f(z)\,dz$



Singularität
(f nicht holomorph hier :()

Aber wir können ein einfach zusammenhängendes Gebiet $M \subset U$ finden, so dass der ganze Weg γ in M liegt und f auch innerhalb ganz ist.



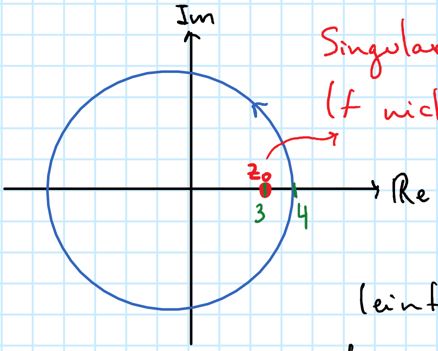
M ist einfach zusammenhängend, f ist innerhalb M ganz und $\gamma \in M$.

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{|z+1|=3} \frac{1}{z-3}\,dz = 0$$

Bemerkung:

$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz \rightarrow$ Integrationsweg ist Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r

<u>Beispiel:</u> $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-3}$. Wir wollen jetzt wieder $\int_\gamma f(z)\,dz$ berechnen aber jetzt mit $\gamma := |z+1| = 5$. Also suchen wir $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz$

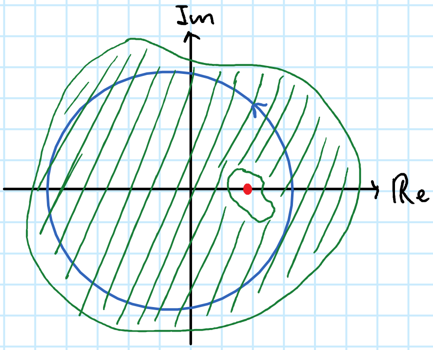


Singularität
(f nicht holomorph hier :))

Hier ist es unmöglich, ein Gebiet M zu finden (einfach zusammenhängend), so dass γ in M liegt und f innerhalb ganz ist.

$\Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz = 0$ gilt <u>nicht</u>! $\rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz \neq 0$

– Einige würden argumentieren, dass man so ein M finden kann:



Also mit $z=3$ ausserhalb M. Aber das ist <u>nicht</u> einfach zusammenhängend.

2.3 Satz von Cauchy (Interpretation)

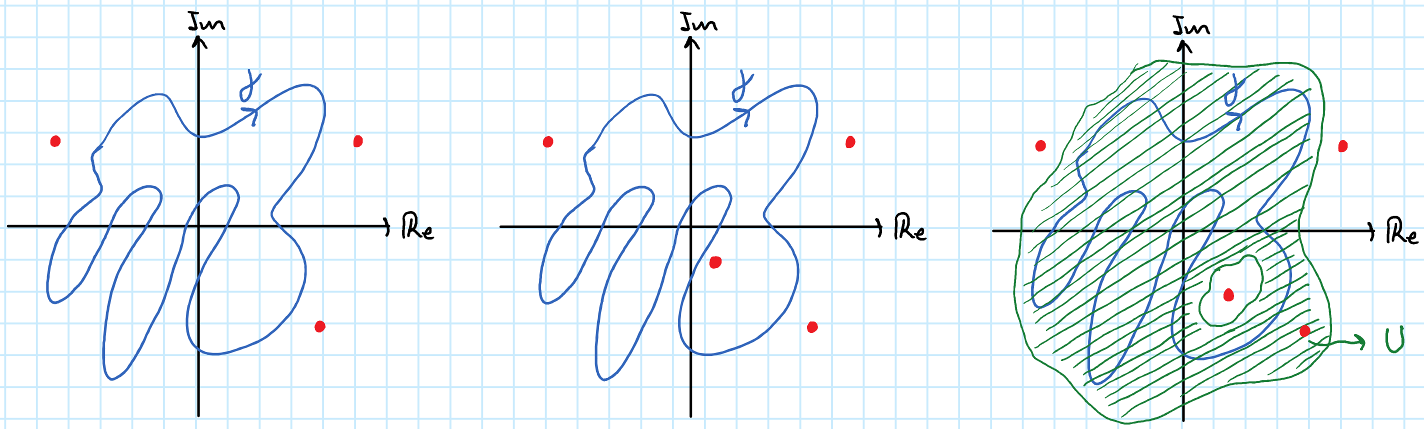
– Wir können diese beide Theoreme wie folgt interpretieren: Für eine beliebige holomorphe (nicht unbedingt überall) Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ und eine geschlossene Kurve γ gilt

i. Falls es innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche <u>keine</u> Singularität gibt, so ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

ii. Falls es jetzt eine Singularität innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche gibt, so gilt die Aussage $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ <u>nicht</u>!

Versuche die beschränkteste Menge M zu finden, so dass γ innerhalb M ist. Das wäre gerade die von γ eingeschlossene Fläche. Also definieren wir M als diese Fläche. Wir müssen nur die Positionen der Singularitäten betrachten um jetzt die Gültigkeit von $\int_\gamma f(z) = 0$ zu zeigen.

<u>Beispiel:</u> • = Singularität von $f(z)$



$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ $\qquad$ $\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0$ $\qquad$ $\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0$

wobei $f: U \to \mathbb{C}$
(also f nur in U definiert)

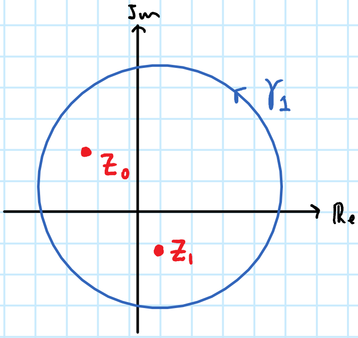
Bemerkung: Dort wo $\int_\gamma f(z) \neq 0$ steht, bedeutet es nicht, dass es strikt unterschiedlich null sein wird. Es kann schon den Zufall geben, wo das Integral gerade null gibt.

– Korollar: Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet U. Dann ist das Integral von f unabhängig von der Kurve, das heisst, seien γ_1, γ_2 zwei Kurven von p nach q, wobei $p, q \in U$. Dann gilt

$$\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}$$

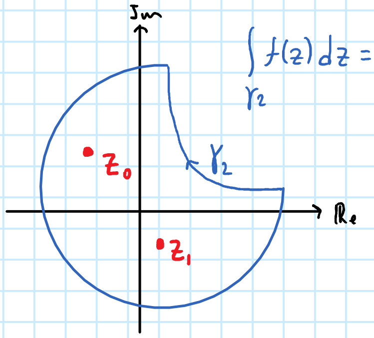
Das haben wir schon in 2.1 bewiesen $\left(\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \right)$

– Das gilt auch für den Fall wo wir Singularitäten innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche haben. Betrachte $f: U \to \mathbb{C}$, f holomorph mit Singularitäten bei $z = z_0$ und $z = z_1$:



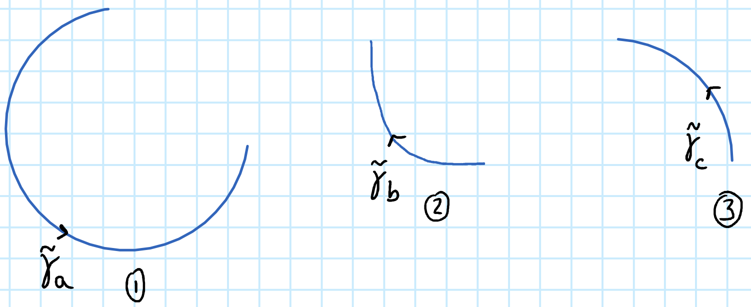
$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \neq 0$. Sagen wir mal $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \sigma \in \mathbb{C}$

Wir definieren jetzt γ_2 und wollen jetzt $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ berechnen.



$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = ?$

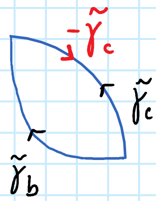
Dafür definieren wir ein Paar Wegfragmente:



Wir haben $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_a + \tilde{\gamma}_c$ und $\gamma_2 = \tilde{\gamma}_a + \tilde{\gamma}_b$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}_a} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_b} f(z)\,dz \quad \to \text{ mit } \tilde{\gamma}_a = \gamma_1 - \tilde{\gamma}_c$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_b} f(z)\,dz \longrightarrow \tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_c =$$



$\int_{\tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz = 0$

$\downarrow$

($\tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_c$ ist geschlossen und enthält keine Singularität)

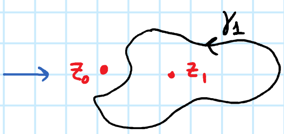
$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \sigma$$

$$\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}$$

$$\int_{\tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}_b} f(z)\,dz + \int_{-\tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz$$

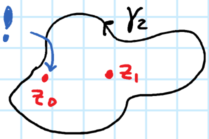
– Folgerung: Das Integral, obwohl Singularitäten innerhalb der Fläche von γ_1 und γ_2 existieren, ist unabhängig vom Weg. Das ist nur gültig, falls die Singularitäten innerhalb und ausserhalb der von γ_1 bzw γ_2 eingeschlossene Fläche gleich bleiben.

! $\to$



$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \neq \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

!

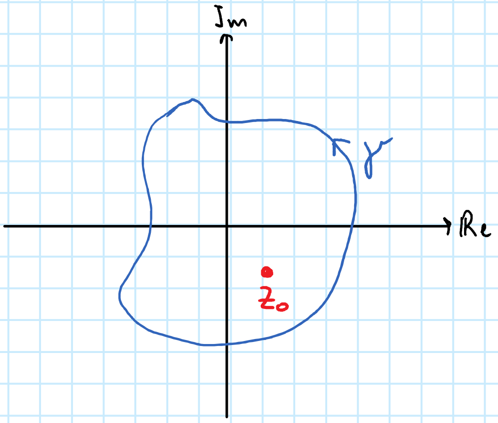


2.4. Integralformel von Cauchy

– Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet U. Dann gilt für jeden Punkt $z_0 \in U$ und jede geschlossene Kurve γ in U, die z_0 einmal im mathematisch positiven Sinn umläuft.

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}$$

⚠ $f(z_0)$ ist $f(z)$ ausgewertet an der Stelle $z = z_0$

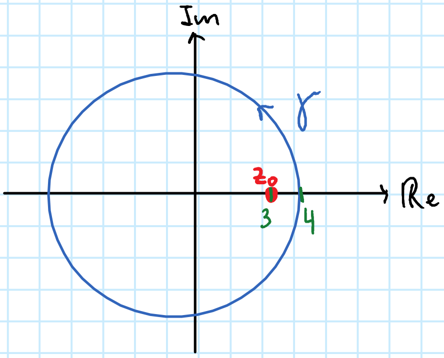


Umgeformt: $\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$

Wir integrieren $\frac{f(z)}{z - z_0}$, wobei es nur eine Singularität an der Stelle $z = z_0$ innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche gibt (da $f(z)$ ganz in U ist).

– Wir haben uns bis jetzt nur mit dem Fall beschäftigt, wo es keine Singularität innerhalb γ gibt. Jetzt mit der Integralformel können wir effektiv das Integral mit Singularitäten innerhalb γ berechnen.

<u>Beispiel</u>: Wir berechnen $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\, dz$



Wenn wir uns die Integralformel ansehen, merken wir, dass eine Ähnlichkeit zu dem Beispielsintegral besteht

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}_{} \approx \underbrace{\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\, dz}_{}$$

Das Integral wäre gleich, falls $f(z) = 1$, $z_0 = 3$ und $\gamma \to |z+1| = 5$

Die Bedingungen, damit die Integralformel auch mit unseren Werten funktioniert, sind:

i. $f(z) = 1$ muss ganz in γ sein ✓

ii. $z_0 = 3$ ist in γ (und auch die einzige Singularität in γ) ✓

Da die Bedingungen erfüllt sind, gilt

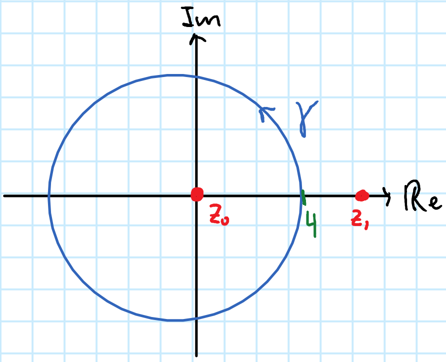
$$f(3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=5} \frac{f(z)}{z-3}\,dz,$$ wobei $f(z)=1$ wie wir es vorher definiert haben

da $f(z) = 1 \Rightarrow f(3) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz$$ $\rightsquigarrow$ nach $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz$ aufgelöst

$$\Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz = \boxed{2\pi i}$$

Beispiel: Wir berechnen $\int_{|z+1|=5} \frac{\sin(x)}{z\cdot(z-7)}\,dz$



Wir haben hier nicht nur eine, sondern zwei Singularitäten (bei $z_0 = 0$ und $z_1 = 7$)
Da aber nur eine Singularität innerhalb von $\gamma: |z+1| = 5$ liegt, sind die Bedingungen für die Cauchy-Integralformel erfüllt.

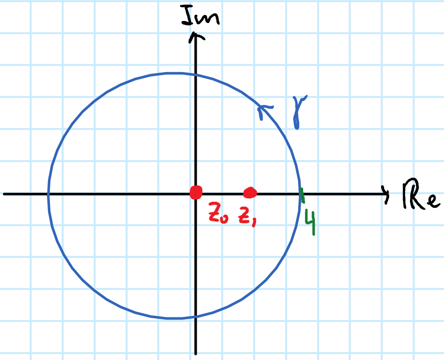
$$\underbrace{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}_{} \approx \underbrace{\int_{|z+1|=5} \frac{\sin(x)}{z(z-7)}\,dz}_{} = \int_{|z+1|=5} \frac{f(z)}{z}\,dz \quad \text{für } f(z) := \frac{\sin(z)}{z-7}$$

i. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z-7}$ ist ganz in γ ✓ ($z_1 = 7$ ist ausserhalb γ!)
ii. $z_0 = 0$ ist innerhalb γ (und auch die einzige Singularität in γ) ✓

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$ mit $f(z) := \frac{\sin(z)}{z-7}$, $\gamma: |z+1| = 5$, $z_0 = 0$

$$\frac{\sin(0)}{0-7} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=5} \frac{f(z)}{z}\,dz \Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{f(z)}{z}\,dz = \int_{|z+1|=5} \frac{\sin(z)}{z\cdot(z-7)}\,dz = \boxed{0}$$

Beispiel: Wir berechnen $\displaystyle\int_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz$



Hier haben wir zwei Singularitäten aber beide liegen innerhalb γ. Wir können hier nicht Cauchy-Integralformel direkt anwenden!
(nur eine Singularität in γ nicht erfüllt)

Aber was wir machen können ist unsere Funktion $\frac{z^2-z+1}{(z-1)z}$ umformeln, so dass wir mehrere Funktionen mit je eine Singularität erhalten

$\Rightarrow$ Partialbruchzerlegung (PBZ)

$$\frac{z^2-z+1}{(z-1)z} = \underset{h(z)}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{z-1}}} - \underset{g(z)}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{z}}}$$

Cauchy-Integralformel anwendbar?

$$\Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz = \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\,dz = \underbrace{\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz}_{i.} - \underbrace{\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz}_{ii.}$$

i. $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \approx \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz$

$f(z) := 1, \quad \gamma: |z+1| = 5, \quad z_0 := +1 \rightsquigarrow f(z_0) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz \Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz = 2\pi i$$

ii. $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \approx \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz$

$f(z) := 1, \quad \gamma: |z+1| = 5, \quad z_0 := 0 \rightsquigarrow f(z_0) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz \Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

$$\int_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz = \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz - \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz = \underset{i.}{2\pi i} - \underset{ii.}{2\pi i} = 0$$

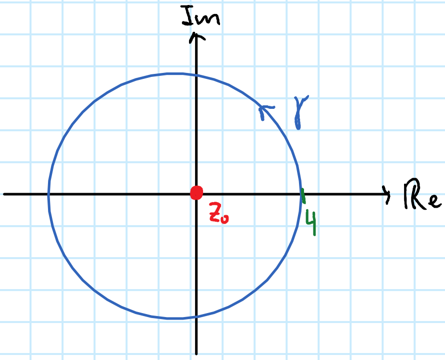
2.5 Integralformel von Cauchy für die n-te Ableitung $f^{(n)}$

– Sei $f: U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f beliebig oft differenzierbar, und für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ gilt die Formel:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \qquad\qquad f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z)$$

– Jetzt können wir auch Aufgaben lösen, wo mehrfache Singularitäten vorkommen

<u>Beispiel:</u> Wir berechnen $\displaystyle\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3}\, dz$



Da wir eine dreifache Singularität an der Stelle $z=0$ haben, müssen wir die Ableitung der Cauchy-Integralformel verwenden.
In diesem Fall für $n=2$

$$f^{(2)}(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\, dz \approx \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3}\, dz$$

$$f(z) := 1, \quad \gamma: |z+1| = 5, \quad z_0 := 0 \rightsquigarrow f^{(2)}(z) = \frac{d^2}{dz^2}(1) = 0 \Rightarrow f^{(2)}(z_0) = 0$$

$$0 = \frac{2}{2\pi i} \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3}\, dz \Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3}\, dz = 0$$

Tipps Serie 4

1

(a) Parametrisierung: Kreis mit Mittelpunkt z_0, Radius r und mit k Umdrehungen.

(b) Parametrisierung einsetzen

2 Parametrisierung! $\int_\gamma f(z)dz = \sum_i \int_{\gamma_i} f(z)dz$

Zerlegung von γ in mehrere Wegfragmente

3 Partialbruchzerlegung falls nötig. Welche Singularitäten liegen in γ? Cauchy-Integralformel

4

(a) n-te Ableitung der Integralformel

(b) Ist eine Partialbruchzerlegung wirklich nötig?