Theorie

1. Reihen

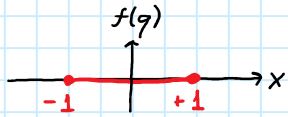
– Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. $B_R(z_0) \subseteq U$. Dann ist f um z_0 als Potenzreihe dartellbar

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}$$

1.1 Geometrische Reihen

– In Analysis haben wir gelernt, dass in $\mathbb{R}$

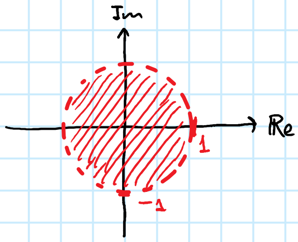
$$f(q) = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n , \quad |q| < 1$$



Potenzreihe konvergiert nur in $]-1,1[$

– In $\mathbb{C}$ ist es analog

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n , \quad |z| < 1$$



Potenzreihe konvergiert nur in $B_1(0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$

Beispiel 1.1: $f(z) = \frac{1}{2z+3}$ finde die Potenzreihe von $f(z)$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$

$\to$ Wir suchen etwas in der Form $\frac{1}{1-az}$

↳ a sagt uns unser Konvergenzradius

$\left(|az| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{|a|} \right)$

$$\frac{1}{2z+3} \overset{\cdot \frac{1}{3}}{=} \frac{1/3}{\frac{2}{3}z + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}z\right)}$$

↳ Geometrische Reihe verwenden

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}z\right)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n , \quad \left|-\frac{2}{3}z\right| < 1$$

Gültig für $\left|-\frac{2}{3}z\right| < 1 \longrightarrow \left|\frac{2}{3}\right| |z| < 1 \longrightarrow |z| < \frac{3}{2}$

$$f(z) = \frac{1}{2z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n, & |z| < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2z+3}, & |z| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Diese Potenzreihe geht leider nur für $|z| < \frac{3}{2}$.

Betrachte $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ anstatt $\frac{1}{1-z}$. Die Potenzreihe lautet $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ und konvergiert für $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$.

$\Rightarrow$ Um die Potenzreihe auf dem anderen Bereich zu finden, müssen wir die Geometrische Reihe mit der Inversion von z finden.

$$\frac{1}{1-\text{etwas mit } z} \longrightarrow \frac{1}{1-\text{etwas mit } 1/z}$$

$$|z| < \rho \qquad\qquad |z| > \rho$$

schauen wir das vorherige Beispiel: $f(z) = \frac{1}{2z+3}$

wir brauchen hier etwas mit $\frac{1}{z}$

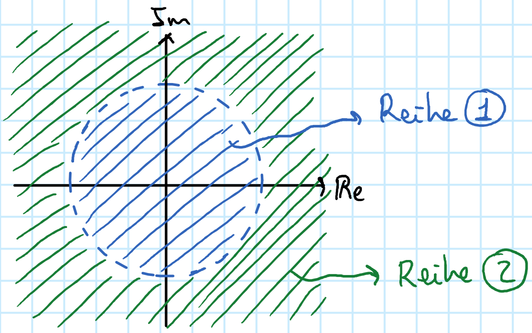
$$f(z) = \frac{1}{2z+3} \cdot\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}} = \frac{1/z}{2+\frac{3}{z}} \cdot\frac{1/2}{1/2} = \frac{1/2z}{1+\frac{3}{2z}} = \frac{1}{2z}\cdot \underbrace{\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{2z}\right)}}_{\text{Geometrische Reihe}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^n}\cdot\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}}$$

$\rightarrow$ Gültig für $\left|-\frac{3}{2z}\right| < 1 \rightsquigarrow \left|\frac{3}{2}\right|\cdot\frac{1}{|z|} < 1 \rightsquigarrow |z| > \frac{3}{2}$

Also haben wir
$$f(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n, & |z| < \frac{3}{2} \quad \text{Reihe } 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2} \quad \text{Reihe } 2 \end{cases}$$

Bemerkung: keine Aussage für $|z| = \frac{3}{2}$. Wir wissen nicht ob eine der Reihen für ein z mit $|z| = \frac{3}{2}$ überhaupt konvergieren wird.



Gültige Bereiche für Reihe 1/2

1.2 Konvergenzradius

– Zum wissen wann/wo man eine gegebene Reihendarstellung verwenden kann ist es nützlich den Konvergenzradius zu berechnen. Er ist gegeben durch:

$$\boxed{\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{a_k}}}$$

<u>Beispiel 1.2:</u> $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot z^n$. Für welche z ist die Potenzreihe definiert?

→ Wir suchen den Konvergenzradius von $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n}_{a_n} z^n \qquad z_0 = 0$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot\frac{3^n}{2^n}}{(-1)^{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 3^n 2^{n+1}}{(-1)^{n+1}3^{n+1}2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{-1}\cdot\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

also konvergiert die Potenzreihe nur für $|z| < \frac{2}{3}$

wäre $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{1}{z^n}$ so würde es für $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{2}{3} \Rightarrow |z| > \frac{3}{2}$!

<u>Beispiel 1.3:</u> $f(z) = \frac{3z+4}{2z^2+5z+3}$. Finde die entsprechende Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$

Partialbruchzerlegung von $f(z) = \frac{3z+4}{(2z+3)(z+1)} = \frac{1}{2z+3} + \frac{1}{z+1}$

$$\frac{1}{2z+3} = \begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}}z^n, & |z| < \frac{3}{2}\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(2z)^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2}\end{cases} \qquad \text{(Beispiel 1.1)}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad \text{für } |z| < 1$$

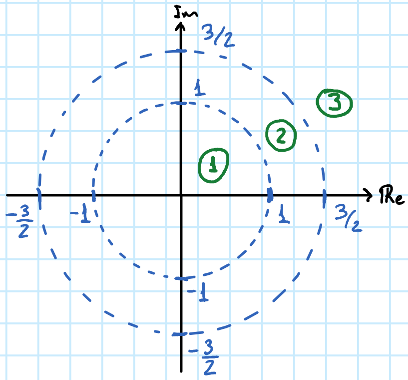
$$\frac{1}{z+1} = \frac{1/z}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n} \quad \text{für } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

wir haben also

$$\frac{1}{2z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n, & |z| < \frac{3}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+z} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, & |z| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}, & |z| > 1 \end{cases}$$

Da $f(z) = \frac{1}{2z+3} + \frac{1}{z+1}$ müssen wir für alle Bereiche eine Fallunterscheidung machen:

$$f(z) = \frac{3z+4}{2z^2+5z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, & |z| < 1 \quad (1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}, & 1 < |z| < \frac{3}{2} \quad (2) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2} \quad (3) \end{cases}$$



1.3 Cauchy-Produktregel

– Produkt von zwei Summen

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}}$$

Beispiel 1.4: $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$. Finde die Reihendarstellung von $f(z)$ für $z_0 = 0$

$$f(z) = \left[\frac{1}{z+1}\right]^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$$

$a_n = (-1)^n z^n$

$b_k = (-1)^k z^k$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^k \cdot (-1)^{n-k} z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^n z^n}_{\substack{\text{unabhängig von } k \\ \text{(und wird } n\text{-mal addiert)}}} = \sum_{n=0}^{\infty} n (-1)^n z^n$$

Beispiel 1.4 (Methode 2)

– Wir bemerken, dass $F(z) := \int f(z)\,dz = \int \frac{1}{(z+1)^2}\,dz = -\frac{1}{z+1} + c$

$$-\frac{1}{z+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \longrightarrow \text{also } F(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + c$$

Da $F(z) = \int f(z)\,dz \Rightarrow f(z) = \frac{d}{dz} F(z)$

$$f(z) = \frac{d}{dz}\left[-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + c\right] = -\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(-1)^n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(-1)^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n z^n$$

also ist $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ gegeben durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n z^n$ (für $|z|<1$)

1.4 Formeln

Wir berechnen eine generelle Formel für die Potenzreihendarstellung von $\frac{1}{az+b}$ mit Entwicklungspunkt z_0

i. $$\frac{1}{z+b} = \frac{1}{(z-z_0)+b+z_0} = \frac{\frac{1}{b+z_0}}{\frac{(z-z_0)}{b+z_0}+1} = \frac{1}{b+z_0}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{(z-z_0)}{b+z_0}\right)} = \frac{1}{b+z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{b+z_0}\right]^n (z-z_0)^n$$

$\rightsquigarrow$ für $\frac{|z-z_0|}{|b+z_0|} < 1 \Rightarrow |z-z_0| < |b+z_0|$

ii. $$\frac{1}{z+b} = \frac{1}{(z-z_0)+b+z_0} = \frac{\frac{1}{z-z_0}}{1+\frac{b+z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{(z-z_0)}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{b+z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-(b+z_0)\right]^n \frac{1}{(z-z_0)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-(b+z_0)\right]^n \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \quad \text{oder} \quad = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[-\frac{1}{b+z_0}\right]^{n+1}(z-z_0)^n$$

Schon in Laurentreihe (kommt nächste Woche :))

$\rightsquigarrow$ für $\frac{|b+z_0|}{|z-z_0|} < 1 \Rightarrow |z-z_0| > |b+z_0|$

Also haben wir

$$\frac{1}{z+b} = \begin{cases} \frac{1}{b+z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{b+z_0}\right]^n (z-z_0)^n, & |z-z_0| < |b+z_0| \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[-(b+z_0)\right]^n \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}, & |z-z_0| > |b+z_0| \end{cases}$$

Beispiel 1.5: $f(z) = \frac{1}{2z+3}$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 2$

↳ z wird mit 2 multipliziert

$$f(z) = \frac{1}{2z+3} = \frac{1/2}{z+3/2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+3/2} \longrightarrow b = \frac{3}{2},\ z_0 = 2$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3/2+2}\sum_{n=0}\left[-\frac{1}{3/2+2}\right]^n (z-2)^n, \quad |z-z_0| < |3/2+2|$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3/2+2} \sum_{n=0} \left[- \frac{1}{3/2+2} \right]^n (z-2)^n , \quad |z - z_0| < | 3/2 + 2 |$$

$$= \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n (z-2)^n , \quad |z-2| < \frac{7}{2}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\frac{3}{2} + 2 \right) \right]^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{n+1}} , \quad |z-2| > \frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{n+1}} , \quad |z-2| > \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow f(z) = \begin{cases} \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n (z-2)^n , & |z-2| < \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{n+1}} , & |z-2| > \frac{7}{2} \end{cases}$$

Tipps Serie 5

Aufgabe 2

$$|z-z_0| < |w-z_0| \Rightarrow \frac{|z-z_0|}{|w-w_0|} < 1$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$ ist die Geometrische Reihe von was?

Aufgabe 3

Partialbruchzerlegung + Cauchy-Produktformel (oder Trick → Integrieren)

bei Komplexe Nullstellen: $\frac{1}{z^2+a^2} = \frac{A}{z+ia} + \frac{B}{z-ia}$, $A, B \in \mathbb{C}$

Aufgabe 4

finde $g'(x)$, $g''(x)$ und zeige, dass $g^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

$P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ = polynom bis Grad n von $\frac{1}{x}$ $\Rightarrow a\frac{1}{x^n} + b\frac{1}{x^{n-1}} + \dots + c\frac{1}{x} + d$

↳ $P_n(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_{n+1} x^n$

Zeige es mit Induktionsbeweis (man hat schon für $n=1,2$ gezeigt ⟶ $g'(x), g''(x)$)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{P_n(x)} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} P_n(x) e^{-x} = 0$$

↳ $\lim_{y\to 0} P_n\left(\frac{1}{y}\right) e^{-\frac{1}{y}} = 0 \quad \left(y := \frac{1}{x}\right)$