

Theorie

- Wir können alle Singularitäten folgendermassen aufteilen:

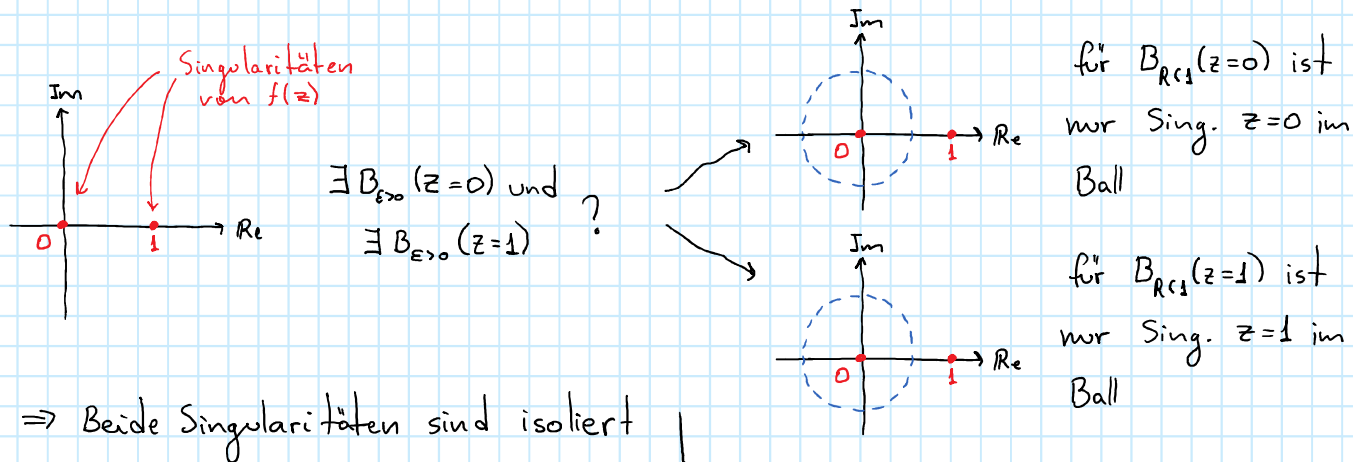
- 1) Isolierte Singularitäten
 - i. Hebbare Singularitäten
 - ii. Polstellen
 - iii. Wesentliche Singularitäten
- 2) Nicht isolierte Singularitäten.

Es ist besser erst zu zeigen was überhaupt „isoliert“ hier bedeutet

2) Nicht isolierte Singularitäten

Eine Singularität heisst isoliert, falls $\exists B_{\varepsilon>0}(z_0)$ s.d. die Singularität an der Stelle z_0 die einzige Singularität in $B_{\varepsilon}(z_0)$ ist. Es ist nicht isoliert, falls diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Beispiel: $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 z}$ → zwei Singularitäten: $\begin{cases} z=0 \\ z=1 \end{cases}$

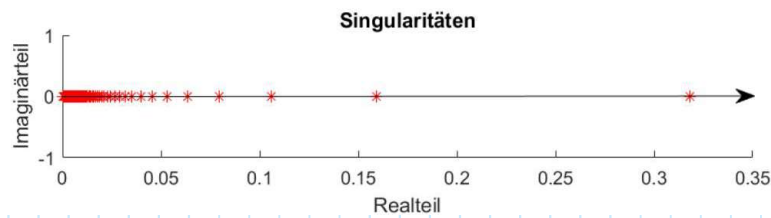


Beispiel: $f(z) := \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$

Singularitäten von $f(z)$ sind gerade die Nullstellen von $\sin(\frac{1}{z})$.

$\sin(\frac{1}{z})$ ist gerade null bei $\frac{1}{z} = n\pi, n \in \mathbb{N} \Rightarrow z = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{N} (n \neq 0)$

Die Singularität an der Stelle $z=0$ ist nicht isoliert. Warum?



Hier sind die Singularitäten von $f(z)$ auf der Re-Achse dargestellt. Wie wir sehen können, nimmt der Abstand zwischen den Singularitäten (mit $z \rightarrow 0$) mit ein Faktor n^{-1} ab. Da wir unendlich viele Singularitäten haben und der Abstand immer kleiner wird, ist $z=0$ von einer Singularität mit unendlich kleiner Abstand benachbart \Rightarrow nicht isoliert.

Generell haben Funktionen mit nicht isolierte Singularitäten folgende Form:

$$f(z) = \frac{1}{\text{period-func}\left(\frac{1}{z}\right)}$$

⚠ Obwohl $\cosh(z)$ und $\sinh(z)$ keine periodische Funktion auf der Re-Achse sind, haben sie unendlich viele Nullstellen auf der Im-Achse (sind dort periodisch)

1) Isolierte Singularitäten

i. Hebbare Singularitäten

- Eine Singularität heisst hebbar, falls die Funktion sich analytisch fortsetzen lässt.

Beispiel: $f(z) = \frac{(z-3)}{(z-3)(z-2)}$

$$f(z) = \frac{(z-3)}{(z-3)(z-2)} = \frac{1}{z-2} =: \check{f}(z) \text{ für } z \neq 3$$

„Singularität vollständig abgekürzt“

Wir haben $f(z)$ analytisch fortgesetzt (an der Stelle $z=3$), weil jetzt die Fortsetzung $\check{f}(z)$ holomorph an der Stelle $z=3$ ist

Beispiel: $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \mathcal{O}(z^7)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) =: \check{f}(z) \text{ ist holomorph}$$

$\Rightarrow z=0$ ist eine hebbare Singularität.

an der Stelle $z=0$

- Wir haben zwei Methoden um hebbare Singularitäten zu identifizieren.

1) Explizite Abkürzung der Singularität (mit Verwendung der Taylorreihe, zum Beispiel).

2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ konvergiert.

Da "echte" Singularitäten bei den Singularitäten "explodieren" ($\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$), müssen wir nur sehen ob $f(z)$ überhaupt an der Singularität konvergiert.

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ konvergiert \Rightarrow hebbare Singularität

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ divergiert \Rightarrow nicht hebbare Singularität

- Das ist analog zu sagen, dass die entsprechende Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ von $f(z)$ keine Terme mit negativen Exponenten hat.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

Beispiel: $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z)}{1} = \underline{1}$$

Da $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ konvergiert $\Rightarrow z=0$ ist eine hebbare Singularität

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k$$

$$\text{mit } C_k = \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{(k+1)!}, & \text{für } \underline{k > 0} \text{ und } \underline{k = 2n}, n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist $C_k = 0 \forall k < 0 \Rightarrow$ Laurentreihe hat keine Terme mit negativen Exponenten (man kann es eigentlich direkt von der Taylorreihe ablesen)

ii. Polstellen

- Polstellen sind nicht hebbare Singularitäten mit endlicher Ordnung. Das heisst, es kommen Termen mit negativen Koeffizienten in endlicher Anzahl vor in der Laurentreihe.

Wenn es in endliche Anzahl vorkommt, dann muss es auch ein $k \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $(z-z_0)^k f(z)$ an der Stelle z_0 hebbbar ist.

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^k f(z) \text{ konvergiert}$$

Der minimale k mit dieser Eigenschaft nennt man Ordnung der Singularität

Beispiel: $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$

$f(z)$ hat eine Polstelle 1. Ordnung an der Stelle $z=0$ (auch gültig für $z=\pi n, n \in \mathbb{Z}$)

$$\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = \infty \Rightarrow \text{Singularität } z=0 \text{ ist nicht hebbbar.}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^1 \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin(z)} = 1 \Rightarrow \text{konvergiert schon für } k=1 \Rightarrow \text{Polstelle 1. Ordnung}$$

- Man kann normalerweise für Polynome im Nenner die Ordnung direkt ablesen.

Beispiel: $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2 z}$

$$\bullet \lim_{z \rightarrow 2} |f(z)| = \infty \Rightarrow z=2 \text{ nicht hebbbar}$$

$$\bullet \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{1}{(z-2)^2 z} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{(z-2)z} \text{ divergiert}$$

$\Rightarrow z=2$ nicht 1. Ordnung

$$\bullet \lim_{z \rightarrow 2} (z-2)^2 \frac{1}{(z-2)^2 z} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \text{ konvergiert}$$

$\Rightarrow z=2$ hat 2. Ordnung

$$\bullet \lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = \infty \Rightarrow z=0 \text{ nicht hebbbar}$$

$$\bullet \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{(z-2)z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \text{ konvergiert}$$

$\Rightarrow z=0$ hat 1. Ordnung

$$z=2 \rightarrow \text{Polstelle 2. Ordnung}$$

$$z=0 \rightarrow \text{Polstelle 1. Ordnung}$$

iii. Wesentliche Singularitäten

– Wesentliche Singularitäten sind nicht hebbare Singularitäten mit unendlicher Ordnung. Das heißt, Laurentreihe hat unendlich viele Terme mit negativen Exponenten oder $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^k f(z)$, $k \in \mathbb{N}$, divergiert $\forall k$.

Beispiel: $f(z) = e^{1/z}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^k e^{1/z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{1/z}}{\frac{1}{z^k}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^z}{z^k} = \infty \quad \forall k, \text{ da die Exponentialfunktion}$$

immer schneller wächst als Polynome. \Rightarrow wesentliche Singularität

oder:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \Rightarrow e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k} \quad \rightsquigarrow \text{Das ist nicht die Laurentreihe, weil es nicht in der } \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \text{ ist}$$

es darf nur $(z-z_0)^k$ enthalten und nicht $\frac{1}{(z-z_0)^k}$. Das können wir lösen indem wir die Grenzen vertauschen

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=-\infty}^0 \frac{1}{k!} z^k = \text{Laurentreihe von } e^{1/z}$$

\hookrightarrow hat unendliche viele Terme mit negativen Exponenten
 \Rightarrow wesentliche Singularität

Tipps Serie 6

Aufgabe 1

(a) Taylorreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$ [Entwicklungspunkt $z=a$]

(b) Anstatt alles wieder zu berechnen verwende Lösung von (a)

$\log(f(z)) =$ Taylorreihe von $\log(z)$ mit $f(z)$ in z eingesetzt
mit Potenzreihe von $f(z)$ eingesetzt \Rightarrow Schneller Termen mit z^0, z^1, \dots, z^4
finden

Aufgabe 2

Potenzreihe mit Cauchy-Produktsatz oder Integrieren

Aufgabe 3/4

Potenzreihe für alle mögliche Bereiche berechnen...

Aufgabe 5

(a)

1. Alle Singularitäten finden
2. Gibt es nicht isolierte Singularitäten?
3. Nach Hebbarkeit testen
4. Ordnung der Polstellen bestimmen (oder ist es eine wesentliche Sing.?)

(b)

- i. Nullstellen von $\cosh(z)$ finden \rightarrow Ordnung?
- ii. Hebbar? Pol (Ordnung)? Wesentliche Sing?
- iii. Hebbar? Pol (Ordnung)? Wesentliche Sing? Oder keine der drei?