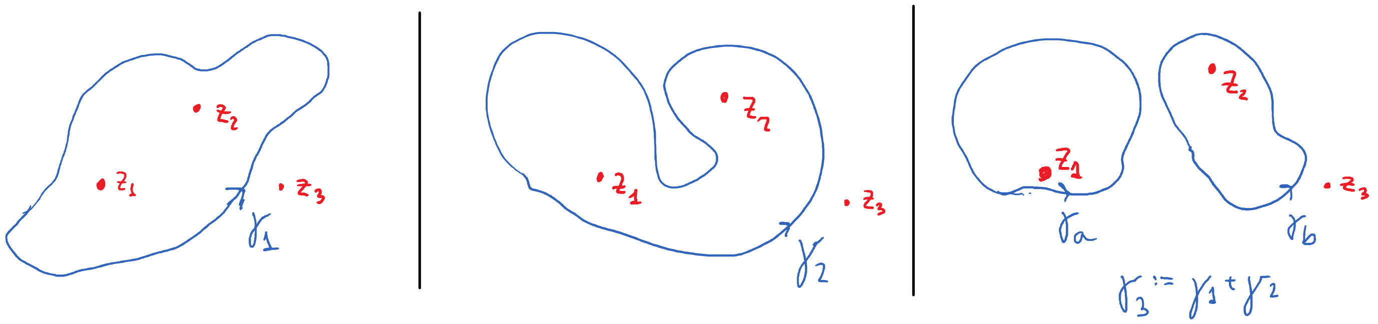
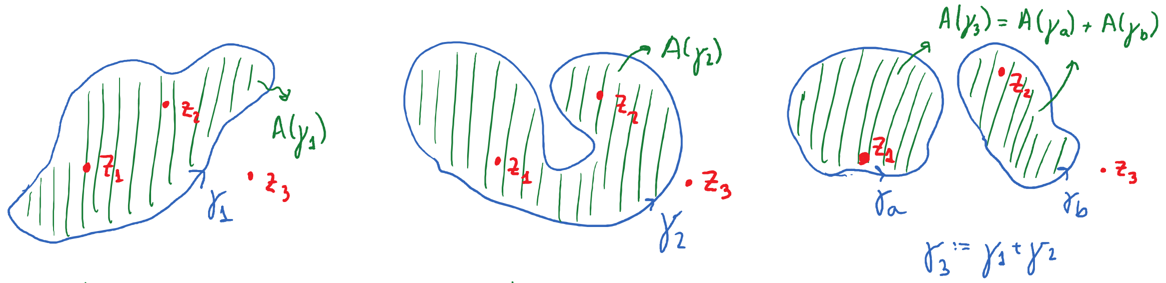
Theorie

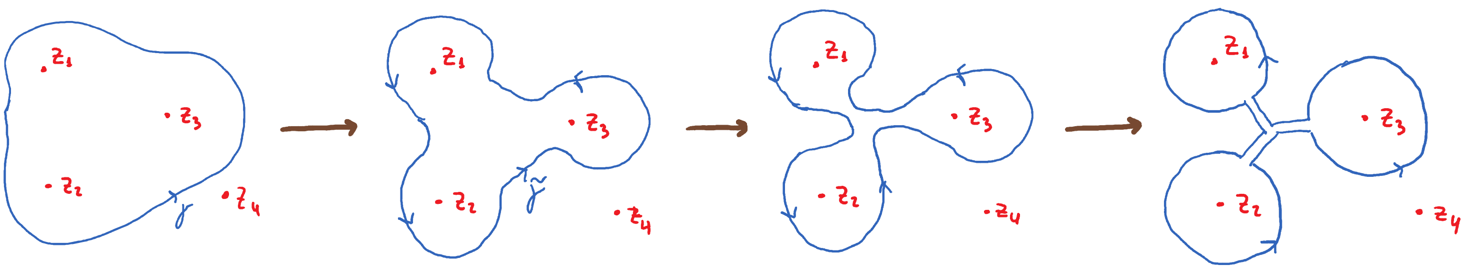


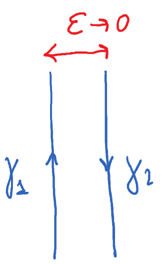
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$



z_1 und $z_2 \in A(\gamma_1)$ z_1 und $z_2 \in A(\gamma_2)$ z_1 und $z_2 \in A(\gamma_3)$

→ Singularitäten innerhalb bzw ausserhalb $A(\gamma_i)$ sind gleich $\Rightarrow \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_3}$

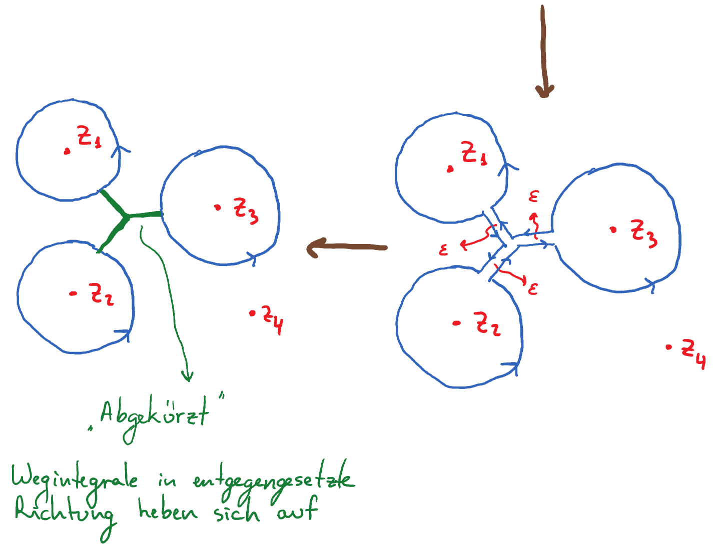


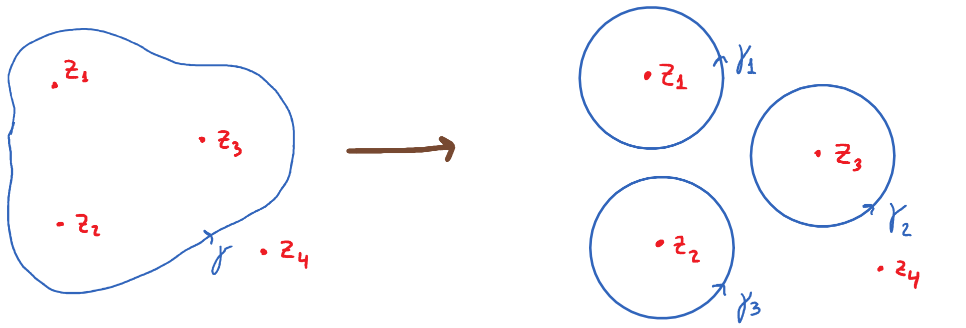


mit $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \gamma_1 = -\gamma_2$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\left(\text{da} \int_{\gamma} f(z)\,dz = -\int_{-\gamma} f(z)\,dz\right)$$





– Da hier alle Singularitäten erhalten sind, gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$

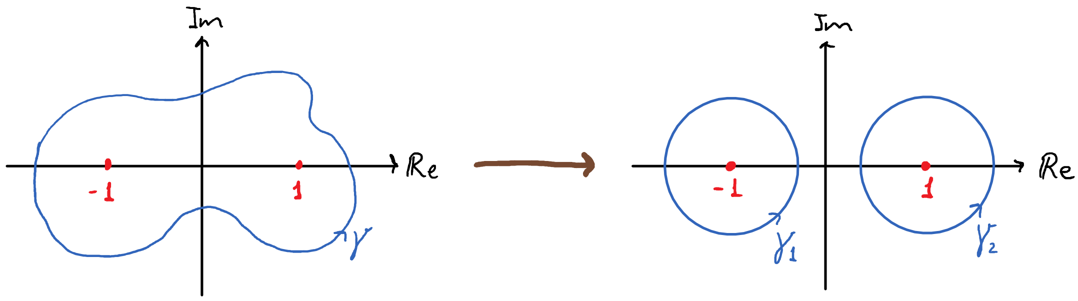
Für N Singularitäten haben wir also

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

wobei γ_i ein geschlossener Weg entspricht, der nur die Singularität z_i enthält (jetzt sehen wir warum der Begriff „isolierte Singularität" so wichtig ist)

– Bedeutung/Interpretation: Wir können unser Integral in mehrere Integrale aufteilen, wobei jedes Teilintegral nur eine Singularität enthält (also können wir immer Integralformel verwenden, da in γ_i nur eine Singularität liegt).

Beispiel: $g(z) := \frac{z+2}{(z+1)(z-1)}$. Berechne $\int_\gamma g(z)\,dz$ wobei $z = 1, -1$ in γ liegen



Singularitäten erhalten $\Rightarrow$ $\int_\gamma g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz$

$\int_{\gamma_1} g(z)dz \rightsquigarrow \int_{\gamma_1} \frac{\left(\frac{z+2}{z-1}\right)}{z+1}\,dz$ $\quad \left(\frac{z+2}{z-1}\right) \to f(z) = \frac{z+2}{z-1}$ $\Rightarrow \int_{\gamma_1} g(z)\,dz = -\pi i$

↳ nur Sing. $z=-1$ innerhalb γ_1

$\int_{\gamma_2} g(z)dz \rightsquigarrow \int_{\gamma_2} \frac{\left(\frac{z+2}{z+1}\right)}{z-1}\,dz$ $\quad \left(\frac{z+2}{z+1}\right) \to f(z) = \frac{z+2}{z+1}$ $\Rightarrow \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = 3\pi i$

↳ nur Sing. $z=-1$ innerhalb γ_1

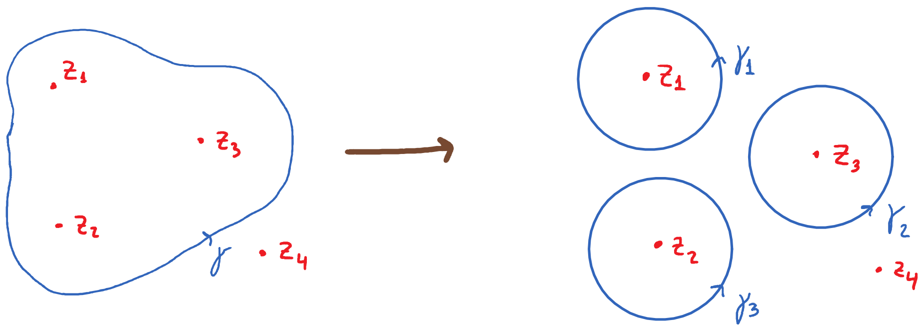
$\Rightarrow \int_\gamma g(z)dz = 3\pi i + (-\pi i) = 2\pi i$

[man kann es natürlich auch mit Partialbruchzerlegung lösen]

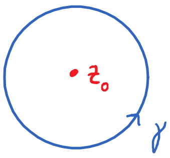
1. Wir können alle holomorphe Funktionen in Laurentreihen darstellen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

2. Wir können Integrale in Teilintegrale aufteilen, wobei ein Teilintegral nur eine Singularität enthält.



3. Wir untersuchen $\int_\gamma (z-z_0)^n \, dz$ für $n \in \mathbb{Z}$ und z_0 in $A(\gamma)$ liegt



$g_n(z) := (z-z_0)^n$. $\int_\gamma g_n(z) \, dz$

für $n \geq 0$ ist $g_n(z)$ holomorph $\Rightarrow \int_\gamma g_n(z) \, dz = 0, \quad n \geq 0$

für $n < 0$ können wir γ parametrizieren oder Integralformel verwenden

wir suchen $\int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^k} \, dz$, wobei hier $k = -n \quad (n < 0)$

$$f^{(k-1)}(z_0) = \frac{(k-1)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} \, dz \rightsquigarrow \text{Integralformel} \Rightarrow f(z) := 1$$

i. Für $k = 1 \Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z-z_0} \, dz = 2\pi i \, f(z_0) = 2\pi i$

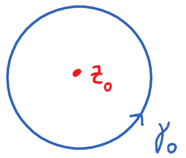
ii. Für $k > 1 \Rightarrow f^{(k-1)}(z_0) = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(1) \Big|_{z=z_0} = 0$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^k} \, dz = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

Also haben wir

$$\boxed{\int_\gamma (z-z_0)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}}$$

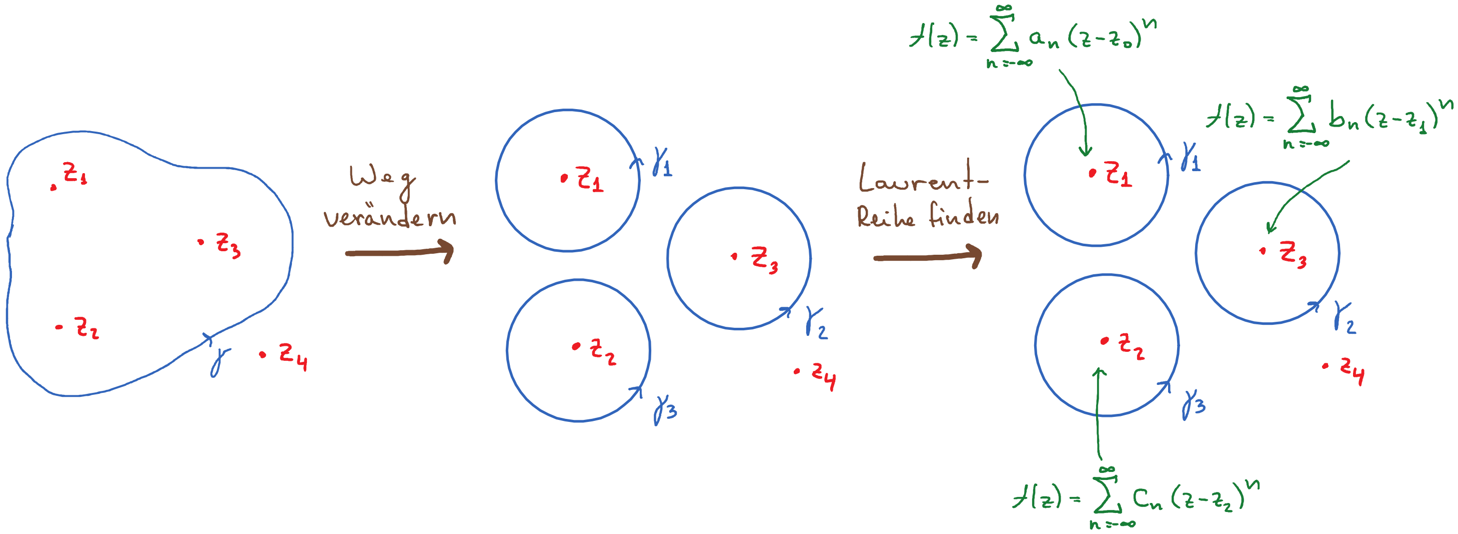
– Wenn wir also die Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0 (wo die Singularität ist) haben, gilt:



$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\gamma_0} (z-z_0)^n\,dz$$

$$= a_{-1} \cdot 2\pi i\,, \quad \text{weil } \int_{\gamma} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Wenn wir die Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0 kennen, ist $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz$ einfach $2\pi i$ mal der Koeffizient c_{-1} $\rightarrow$ wir müssen theoretisch nicht die ganze Entwicklung (alle Koeffizienten) kennen, nur c_{-1}. Der c_{-1}-te Koeffizient nennt man **Residuum**.



⚠ Wir müssen für jedes z_i eine neue Reihenentwicklung finden, da die Reihen einen Konvergenzradius haben $\Rightarrow$ Wir entwickeln die Reihe um die Singularität

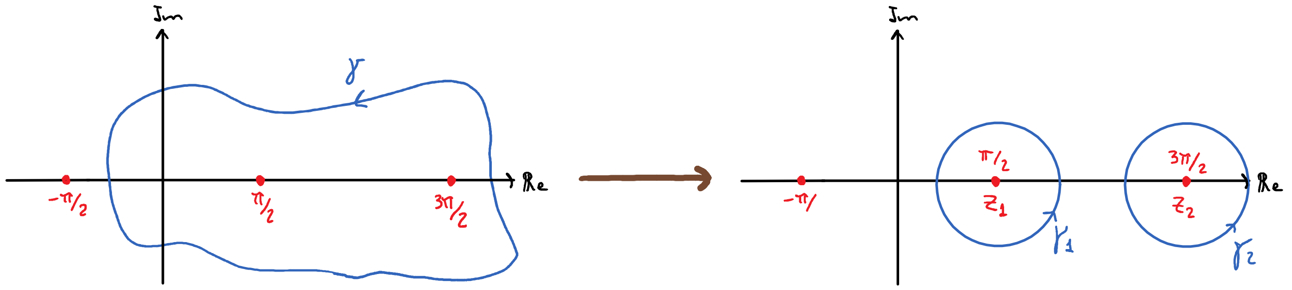
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1} + 2\pi i\, b_{-1} + 2\pi i\, c_{-1}$$

$$= 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f \mid z_i)$$

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f \mid z_i)}$$

$\operatorname{Res}(f \mid z_i)$ = Koeffizient c_{-1} der Laurentreihe der Funktion f mit Entwicklungspunkt z_i $\rightsquigarrow$ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \Rightarrow \operatorname{Res}(f \mid z_0) = c_{-1}$

<u>Beispiel:</u> Wir berechnen $\int_\gamma \tan(z)\,dz$



$\tan(z)$ hat Singularitäten bei $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, aber nur $z_1 = \frac{\pi}{2}$ und $z_2 = \frac{3\pi}{2} \in A(\gamma)$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f|z_i) = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f|z_1) + \mathrm{Res}(f|z_2) \right)$$

Wir suchen also die Potenzreihe (Laurentreihe) von $f(z)$ mit Entwicklungspunkt z_1 und z_2

für $z_1 \Rightarrow f(z_1) = -\frac{1}{x - \pi/2} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{45}\left(x - \pi/2\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x - \pi/2\right)^5\right)$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f|z_1) = -1$ $\quad c_{-1} = -1$ $\quad \left[-\frac{1}{x - \pi/2} = -1 \cdot \frac{1}{x - \pi/2} = -1 \cdot (x - \pi/2)^{-1} \right]$

für $z_2 \Rightarrow f(z_2) = -\frac{1}{x - \frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{45}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^5\right)$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f|z_2) = -1$

Da $\tan(z)$ periodisch ist, sind alle ihre Singularitäten gleich (gleiche Ordnung, gleiche Residuen etc)

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f|z_i) = 2\pi i(-1-1) = -4\pi i$$

– Problem: Wir wollen nicht für alle Singularitäten die ganze Laurentreihe berechnen. Uns interessiert nur der c_{-1}-te Koeffizient. Wie können wir ganz einfach $\mathrm{Res}(f|z_i)$ direkt finden?

Berechnung von $Res(f \mid z_i)$

i. Pole n-te Ordnung:

$$\boxed{Res(f \mid z_i) := \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-z_i)^n f(z) \right]}$$

ii. Pole 1. Ordnung:

$$\boxed{Res(f \mid z_i) = \lim_{z \to z_i} (z-z_i) f(z)}$$

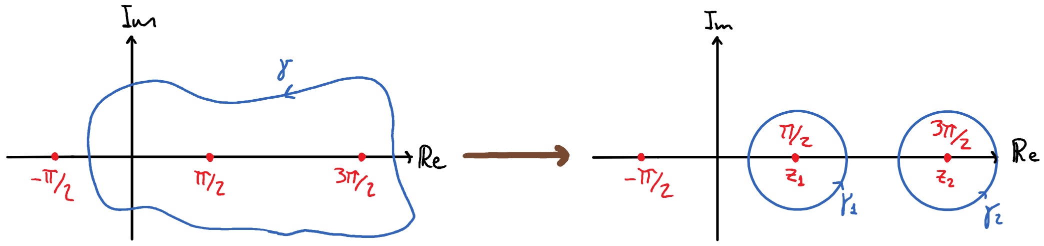
- Eine andere Methode für einfache Pole ist gegeben durch:

$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, wobei h, g holomorph an der Stelle z_i sind und $h(z_i) \neq 0$

$h(z)$ darf keine NS bei z_i haben (sonst wäre es hebbar)

$$\Rightarrow \boxed{Res(f \mid z_i) = \frac{h(z_i)}{g'(z_i)}}$$

Beispiel: Wir berechnen $\int_\gamma \tan(z)\, dz$



$\tan(z)$ hat Singularitäten bei $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, aber nur $z_1 = \frac{\pi}{2}$ und $z_2 = \frac{3\pi}{2} \in A(\gamma)$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_i Res(f \mid z_i) = 2\pi i \left(Res(f \mid z_1) + Res(f \mid z_2) \right)$$

erst untersuchen wir die Singularität von $\tan(z) \rightarrow$ Da die Singularitäten die Nullstellen von $\cos(z)$ sind $\left(\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}\right)$ und $\cos(z)$ NS. 1. Ordnung hat

$\Rightarrow$ $\tan(z)$ hat Singularität 1. Ordnung an der Stelle $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$$Res(f \mid \pi/2) = \lim_{z \to \pi/2} (z - \pi/2) \tan(z) = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} (z - \pi/2) \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(z) + (z - \frac{\pi}{2}) \cos(z)}{-\sin(z)} = -1$$

oder $\tan(z) = \frac{\sin(z) \to h(z)}{\cos(z) \to g(z)}$ h, g holomorph, $h(\pi/2) \neq 0$

$$\mathrm{Res}(f \mid \tfrac{\pi}{2}) = \frac{h(\pi/2)}{g'(\pi/2)} = \frac{\sin(\pi/2)}{-\sin(\pi/2)} = -1$$

Wir haben also $\mathrm{Res}(f \mid \frac{\pi}{2}) = -1 \Rightarrow \mathrm{Res}(f \mid \frac{3\pi}{2}) = -1$

$\tan(z)$ ist periodisch $\Rightarrow$ alle Sing. haben identische Eigenschaften

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f \mid z_1) + \mathrm{Res}(f \mid z_2)) = 2\pi i\,(-1-1) = \underline{-4\pi i}$$

Reelle Integrale

– Wir suchen $\int_0^{2\pi} F(\cos(\sigma), \sin(\sigma))\,d\sigma$

$\cos(\sigma) = \frac{e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}}{2}$ $\quad$ $\sin(\sigma) = \frac{e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}}{2i}$

– wenn wir die Zerlegung von cos, sin betrachten, sehen wir, dass das Umlaufen von 0 bis 2π von $e^{i\sigma}$ gerade das Umlauf des Einheitskreises entspricht. Das heisst, das Integrieren von 0 bis 2π von e^{ix} ist das Integrieren von z um den Einheitskreis, falls $z = e^{ix}$

also definieren wir $z = e^{i\sigma}$ und setzen es in cos, sin:

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(\sigma), \sin(\sigma))\,d\sigma = \int_{|z|=1} F\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) d\sigma$$

$\cos(\sigma) = \frac{z + 1/z}{2}$

$\sin(\sigma) = \frac{z - 1/z}{2i}$

wir müssen noch den Zusammenhang zwischen $d\sigma$ und dz finden.

$$\frac{dz}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}(e^{i\sigma}) = ie^{i\sigma} \Rightarrow d\sigma = \frac{1}{ie^{i\sigma}}\,dz = \frac{1}{iz}\,dz$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} F(\cos(x), \sin(x))\,dx = \int_{|z|=1} F\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2}\right) \frac{1}{iz}\,dz}$$

einsetzen von $\frac{z + 1/z}{2}$ bzw $\frac{z - 1/z}{2i}$ überall wo $\cos(x)$ bzw $\sin(x)$ vorkommt

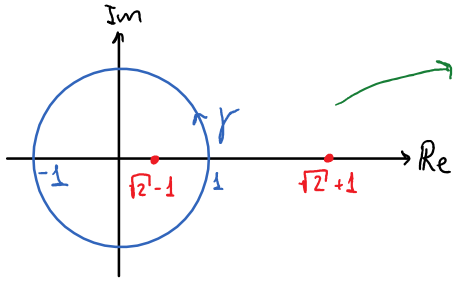
__Beispiele:__ Finde $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2} - \cos(x)}\, dx$

$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \rightsquigarrow$ wir setzen $z = e^{ix} \Rightarrow dx = \frac{1}{iz}\, dz$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2} - \cos(x)}\, dx = \int_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{z + 1/z}{2}} \cdot \frac{1}{iz}\, dz = \int_{|z|=1} \frac{-2i}{2\sqrt{2} - z - \frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{z}\, dz = -2i \int_{|z|=1} \frac{1}{2\sqrt{2}z - z^2 - 1}\, dz$$

$$= 2i \int_{|z|=1} \frac{1}{(z - \sqrt{2} + 1)(z - \sqrt{2} - 1)}\, dz$$

$$f(z) := \frac{1}{(z - \sqrt{2} + 1)(z - \sqrt{2} - 1)}$$



$\to$ nur $\sqrt{2} - 1$ liegt in $|z| < 1$ $(\in A(\gamma))$

Wir brauchen nur Residuum von $z = \sqrt{2} - 1$

$$\mathrm{Res}(f \mid \sqrt{2} - 1) = \lim_{z \to \sqrt{2} - 1} (z - \sqrt{2} + 1) \frac{1}{(z - \sqrt{2} + 1)(z - \sqrt{2} - 1)} = \lim_{z \to \sqrt{2} - 1} \frac{1}{(z - \sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{-2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2} - \cos(x)}\, dx = 2i \int_{|z|=1} f(z)\, dz = 2i \cdot 2\pi i\, \mathrm{Res}(f \mid \sqrt{2} - 1) = 2i \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{-2} = \underline{2\pi}$$

Tipps Serie 7

Aufgabe 1

(a) Singularität n-te Ordnung $\Rightarrow$ $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-z_0)^n}$

$h(z)$ holomorph (bei $z=z_0$) und $h(z_0) \neq 0$

(b) Nullstelle n-te Ordnung $\Rightarrow$ $f(z) = (z-z_0)\, h(z)$

$h(z)$ holomorph an der Stelle $z=z_0$ und $h(z_0)\neq 0$

Aufgabe 2

i. Pole finden

ii. Ordnung berechnen

iii. Residuum berechnen

(c), (d) Vielleicht ist es einfacher mit l'Hôpital (limes) anstatt Taylorreihe

Aufgabe 3

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^{z}\cdot e^{1/z} = \left(\sum \cdots\right)\left(\sum \cdots\right) \rightarrow \text{Potenzreihe von } e^{z} \text{ bzw } e^{1/z}$$

$\mathrm{Res}(e^{z+1/z}, z=0) \Rightarrow$ wo wir $c \cdot z^{-1}$ haben (bei der Laurentreihe)

für $e^{z+1/z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \cdots\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \cdots\right)$ finde k,n, so dass wir Termen mit z^{-1} bekommen

und addiere die Koeffizienten

Aufgabe 4

Residuensatz

Aufgabe 5

$$\left.\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i} \\ \cos(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+1/z}{2} \end{aligned}\right\} \text{in sin bzw cos einsetzen}$$

Nicht $dx = \frac{1}{iz}\, dz$ vergessern!