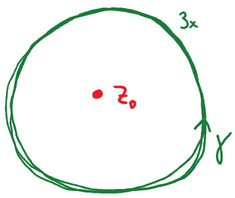
Theorie

① Umlaufzahl

- Die Umlaufahl sagt uns wie oft eine Singularität von einer Kurve γ umgelaufen wird

$\mathrm{Ind}_\gamma(z_i) = n \Rightarrow$ Singularität z_i wurde n-mal von γ umgelaufen



$\rightsquigarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = 3$

- Da die Singularität $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$-mal umgelaufen wird, wird sie auch $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$ mal integriert

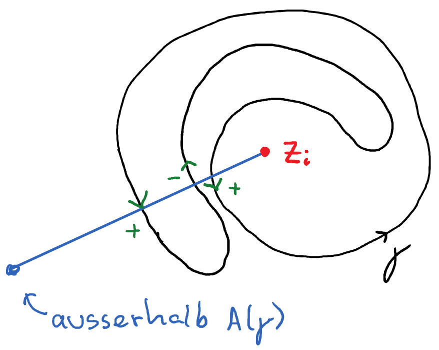
$$\int_{\gamma_i} f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f|z_i)\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$$

- Für alle Singularitäten in $A(\gamma)$ gilt also

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f|z_i)\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z_i)}$$

- Die Frage ist natürlich, wie man effektiv alle $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$ ganz einfach berechnen kann

$\rightsquigarrow$ Wir bilden eine Gerade von ausserhalb γ bis zur Singularität und zählen wie viele male γ unsere Gerade im positiven bzw negativen Sinn schneidet
↺ ↻

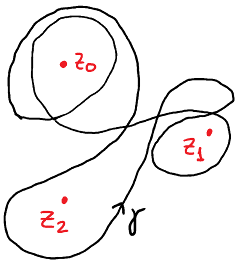


$2 \times \oplus + 1 \times \ominus = 1 \times \oplus$

$\Rightarrow \underline{\mathrm{Ind}_\gamma(z_i) = 1}$

[↺ ⊕ mathematisch positiv
↻ ⊖ mathematisch negativ]

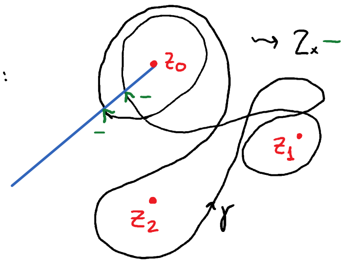
Beispiel:



Sei eine holomorphe Funktion f und ein Integrationsweg γ gegeben. Berechne $\int_\gamma f(z)\,dz$ (nehmen wir mal an alle Residuen seien bekannt).

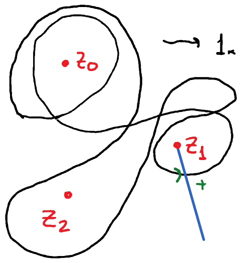
Wir müssen nur $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$ für alle $z_i \in A(\gamma)$ finden

für z_0:



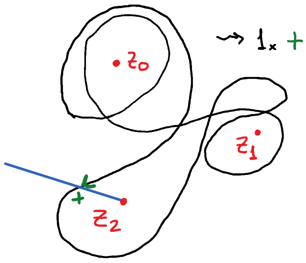
$\rightsquigarrow 2\times - \Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = -2$

für z_1:



$\rightsquigarrow 1\times + \Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_1) = 1$

für z_2:



$\rightsquigarrow 1\times + \Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_2) = 1$

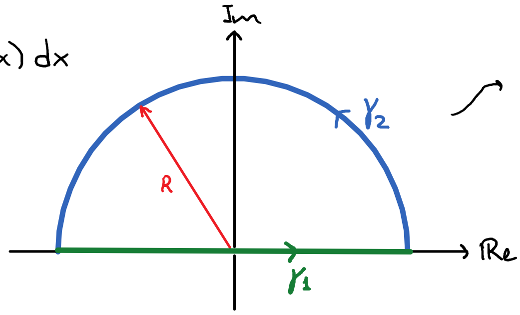
$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f|z_i)\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$$

$$= 2\pi i\,\big(\mathrm{Res}(f|z_0)\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) + \mathrm{Res}(f|z_1)\mathrm{Ind}_\gamma(z_1) + \mathrm{Res}(f|z_1)\mathrm{Ind}_\gamma(z_1)\big)$$

$$= 2\pi i\,\big(-2\,\mathrm{Res}(f|z_0) + \mathrm{Res}(f|z_1) + \mathrm{Res}(f|z_2)\big)$$

② Uneigentliche Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$



$\nearrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ist gerade $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ für $R \to \infty$

$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$

$$\left[\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx\right]$$

– Wir betrachten $\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

Was wir suchen mit $R \to \infty$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(R \cdot e^{it}) \cdot Rie^{it}\,dt \quad (\text{Parametrisierung} \to \text{Halbkreis: } Re^{it} \text{ für } t\,[0,\pi])$$

Falls $f(z) = \mathcal{O}(z^{-2}) \Rightarrow f(R \cdot e^{it}) = \mathcal{O}(R^{-2})$ → e^{it} spielt keine Rolle, da $|e^{it}| = 1$

$\Rightarrow f(R \cdot e^{it}) \cdot Rie^{it} = \mathcal{O}(R^{-1})$ $\quad (|Re^{it}| = R)$

wenn wir jetzt das mit $R \to \infty$ betrachten $\Rightarrow \lim\limits_{R\to\infty} \underbrace{f(Re^{it}) \cdot Rie^{it}}_{\mathcal{O}(R^{-1})} = 0$

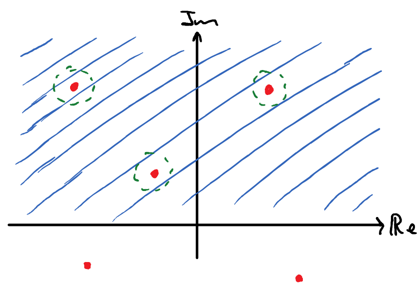
$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(Re^{it})\,Rie^{it}\,dt = \int_{\gamma_2} 0\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}_{0} = \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}$$

– Wenn wir uneigentliche Integrale mit $f(x) = \mathcal{O}(x^{-2})$ berechnen wollen, können wir Residuensatz für den oberen Teil der Re-Achse anwenden ($\mathrm{Im} \geq 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} \geq 0} \mathrm{Res}(f \mid z_i)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \to$



[nur die mit ◌ markierte Singularitäten werden in $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ betrachtet (weil sie $\mathrm{Im} \geq 0$ erfüllen)]

Tipps Serie 8

Aufgabe 2

(a)

- Was ist die Wirkung von k in γ_k?

Skizze kann hilfreich sein

- $\mathrm{Res}(f|z_i)$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$ $\forall z_i$ finden $\Rightarrow$ Residuensatz

(d)

- Wie sieht γ aus und welche Singularitäten sind innerhalb $A(\gamma)$?
- Was für eine Singularität ist es? (Ordnung?) benutze (c)
- Residuen und Umlaufzahlen berechnen $\rightarrow$ Residuensatz

(e)

- Residuen berechnen
- Das einzige was sich ändert, ist γ $\Rightarrow$ $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$ können variieren

  $\mathrm{Res}(f|z_i)$ hängt nur von f ab, was konstant ist

Aufgabe 3

- verwende $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f|z_0)$ und setze die Parametrisierung

eines Kreises um z_0 ein $\longrightarrow$ $\int_0^{2\pi} f(z_0+e^{it})\cdot \cancel{i}e^{it}\,dt = 2\pi \cancel{i}\,\mathrm{Res}(f|z_0)$

- Was passiert jetzt mit $\overline{z}_0$?
- $(\overline{z}_0 + e^{it}) = \left(\overline{z_0 + e^{-it}}\right) = \left(\overline{z_0 + e^{-it}}\right)$
- $\overline{f(\cdot)}\cdot g(\cdot) = \overline{f(\cdot)\,\overline{g(\cdot)}}$ $\rightarrow$ hier $g(t) = e^{it}$
- $\int \overline{h(\cdot)}\,d\cdot = \overline{\int h(\cdot)\,d\cdot}$
- Variablenwechsel (Tipp: $s := -t$)

Aufgabe 4

(a) Siehe Theorie (Uneigentliche Integrale)

- Finde Singularitäten
- Berechne $\mathrm{Res}(f \mid z_i)$ $\forall z_i$ mit $\mathrm{Im}\{z_i\} \geq 0$ (obere Halbebene)
- Residuensatz

(c)

- Finde die Nullstellen vom Nenner (Tipp: $\pm i$ sind Nullstellen)
- Theorie für uneigentliche Integrale verwenden)

Aufgabe 5

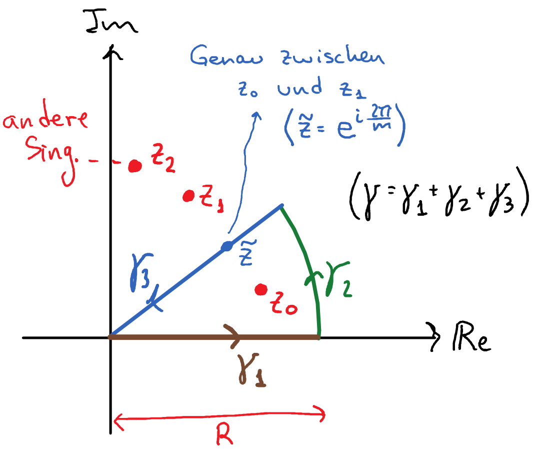
- Konvergiert $\int_0^\infty f(x)\,dx$ in diesem Fall für $a \in [0,\infty[$?
- Falls $f(x)$ eine gerade Funktion ist, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

  $f(-x) = f(x)$

- Verwende die Eigenschaft, dass $f(x)$ gerade ist und Theorie für das Berechnen von uneigentliche Integrale mit Residuensatz

Aufgabe 6 (Schwierig! :( )

- Finde die Singularitäten (abhängig von m)
- Geschickte Parametrisierung (nicht sicher wie man auf diese Idee selber kommen soll, aber ich gebe euch einfach eine geschickte Parametrisierung) → Kreissektor, der <u>nur die erste</u> Singularität enthält



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{} + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

Was wir suchen mit $R \to \infty$ $\Rightarrow$ $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^\infty f(x)\,dx$

Lösung von $\int_\gamma f(z)$ kennen wir

↳ Residuum von z_0 berechnen

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f \mid z_0)$ nur $z_0 \in A(\gamma)$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f|z_0) - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f|z_0) - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

– Wir müssen jetzt sehen, was $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ und $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3} f(z)\,dz$ gibt

* Da $m \geq n+2$ gilt, dürfen wir sagen, dass beide Null geben? Nein! Wir haben nicht die gleiche Parametrisierung wie in der Theorie die ich heute gegeben habe (mit Halbkreis auf der oberen Halbebene). Dafür müssen wir jetzt zeigen, dass es mit unsere Parametrisierung auch irgendwie nach Null konvergiert oder nach etwas anderes.

mit $R \to \infty$

– Finde die Parametrisierung für γ_2 und γ_3, setze sie in der Funktion f ein und betrachte $\lim_{R\to\infty}$

$$\gamma_2 \to \gamma_2(t) \in [a,b] \rightsquigarrow \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_a^b f(\gamma_2(t))\cdot\dot{\gamma}_2(t)\,dt = ?$$

$$\gamma_3 \to \gamma_3(t) \in [c,d] \rightsquigarrow \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_c^d f(\gamma_3(t))\cdot\dot{\gamma}_3(t)\,dt = ?$$

– Für γ_2 ist es gleich wie in der Zusammenfassung, es konvergiert nach 0. Beweise es! (genau gleich wie in der Zusammenfassung)

– Für γ_3 ist es schwieriger, es konvergiert nicht nach Null. Man kann es manipulieren bis es auf etwas ähnliches wie

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} h(n,m)\int_0^R f(z)\,dz = h(n,m)\underbrace{\int_0^\infty f(z)\,dz}_{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz,\ \text{auch was wir suchen}}$$

kommt

(Eine Variablentransformation ist nötig)

1) Singularitäten sind $z_k = e^{\frac{(2k-1)\pi i}{m}}$, $k = 1, 2, \dots, m$

also ist hier $z_0 = e^{\frac{\pi i}{m}}$ und $z_1 = e^{\frac{3\pi i}{m}}$ $\Rightarrow$ $\tilde{z} = e^{\frac{2\pi i}{m}}$

wo unsere geschickte Parametrisierung (also γ_3) geht (Mitte von z_0 und z_1)

2) Residuum von z_0 könnt ihr selber berechnen :) (Tipp: Ordnung 1)

↳ und dann auch $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f|z_0)$

3) Wir berechnen $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ und $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$

Parametrisierung: $\begin{cases} \gamma_2(t) = Re^{it}, & t \in [0, \frac{2\pi}{m}] \\ \gamma_3(t) = e^{\frac{2\pi i}{m}} \cdot (R-t), & t \in [0, R] \end{cases}$

$p \geq 1$ wegen $m \geq n+2$

i. $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} f(\gamma_2(t)) \cdot Rie^{it}\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \dots = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \mathcal{O}(R^{-p})\,dt = 0$

– Zeige, dass es nach Null konvergiert (mit $m \geq n+2$)

ii. $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(\gamma_3(t)) \cdot (-e^{\frac{2\pi i}{m}})\,dt = -\lim_{R\to\infty} e^{\frac{2\pi i}{m}} \int_0^R \frac{e^{\frac{2\pi i n}{m}} (R-t)^n}{\underbrace{e^{2\pi i}}_{1} (R-t)^m + 1}\,dt$

$= -\lim_{R\to\infty} e^{\frac{2\pi i(n+1)}{m}} \int_0^R \frac{(R-t)^n}{(R-t)^m + 1}\,dt = -\lim_{R\to\infty} e^{\frac{2\pi i(n+1)}{m}} \int_R^0 \frac{u^n}{u^m+1}\,du$ → Grenzen invertieren

$= \lim_{R\to\infty} e^{\frac{2\pi i(n+1)}{m}} \int_0^R \frac{x^n}{x^m+1}\,dx$ hier einfach x anstatt u benutzt (zum zeigen, dass es gerade $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ ist)

$\Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f|z_0) - \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}_{\to 0} - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$

↳ auch $e^{\frac{2\pi i(n+1)}{m}} \int_0^\infty f(x)\,dx$

$\int_0^\infty f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f|z_0) + e^{\frac{2\pi i(n+1)}{m}} \int_0^\infty f(x)\,dx$

↳ nach $\int_0^\infty f(x)\,dx$ auflösen $\Rightarrow$ $\int_0^\infty f(x)\,dx = \dots$:)

Aufgabe 4 b)

– Wir suchen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx \rightsquigarrow$ Tipps

$\nearrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

$\searrow ax^2 - bx = a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$

Die Sache ist, dass wir hier nicht direkt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx$ berechnen können (wegen a) und, dass b komplex ist ($b\in\mathbb{C}$)

Mit dem Tipp: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a}}\,dx$

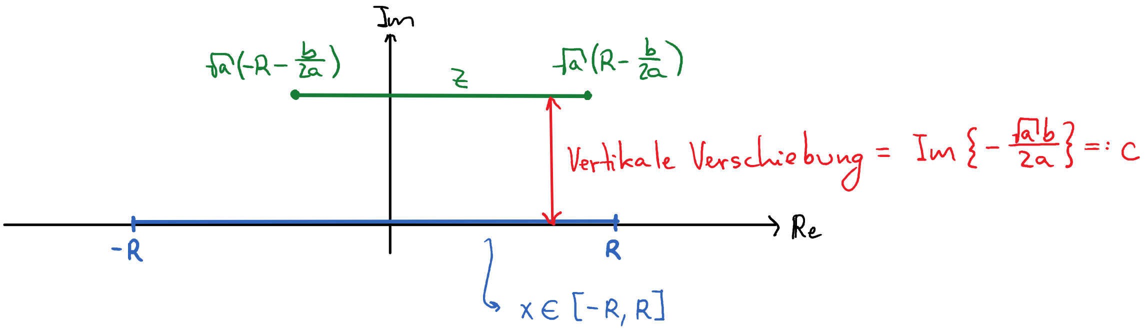
Substitution: $z := \sqrt{a}\left(x-\frac{b}{2a}\right) \Rightarrow e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2} = e^{-z^2}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a}}\,dx = \int_{?}^{?} e^{-z^2}\cdot e^{\frac{b^2}{4a}}\cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\,dz$$

$\frac{dz}{dx} = \sqrt{a} \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{a}}dz$

Viele würden sagen, dass wir hier wieder von $-\infty$ nach ∞ integrieren, und mit dem Tipp würde es dann $e^{b^2/4a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\pi}$ geben. Das Resultat ist richtig, aber wir müssen beweisen, dass das richtig ist.

Warum? $z = \sqrt{a}\left(x-\frac{b}{2a}\right) \rightsquigarrow$ mit $x \in \,]-\infty,\infty[$ haben wir auch eine vertikale Verschiebung wegen $b\in\mathbb{C}$ (falls $\mathrm{Im}\{b\}\neq 0$).



$x\in[-R,R] \rightsquigarrow$ Variablentransformation $\rightsquigarrow z \in \left[\mathrm{Re}\{\sqrt{a}(-R-\frac{b}{2a})\}+i\left(-\frac{\sqrt{a}}{2a}\right)\mathrm{Im}\{b\}, \ldots\right.$

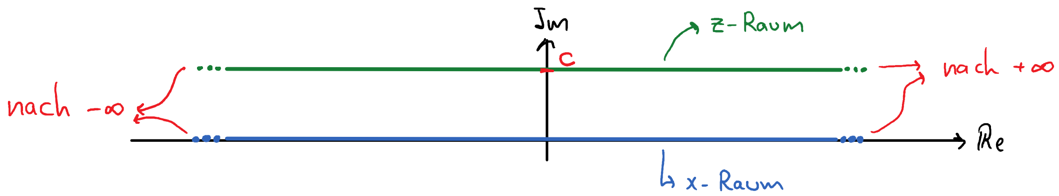
$z := \sqrt{a}\left(x-\frac{b}{2a}\right)$

$\left.\ldots \mathrm{Re}\{\sqrt{a}(R-\frac{b}{2a})\}+i\left(-\frac{\sqrt{a}}{2a}\right)\mathrm{Im}\{b\}\right]$

Gerade auf der reellen Achse

eine vertikal verschobte horizontale Gerade

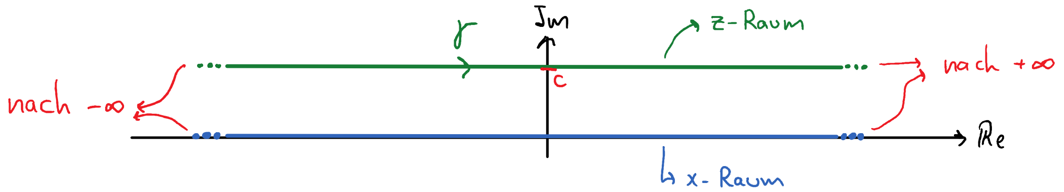
Uns interessiert was mit $R\to\infty$ passiert (da fürs Integral $x\in[-\infty,\infty]$)



– Da wir für $\mathrm{Re}\{z\} \in \,]-\infty, \infty[$ integrieren, ist die horizontale Verschiebung wegen b ($\mathrm{Re}\{b\} \neq 0$) irrelevant.

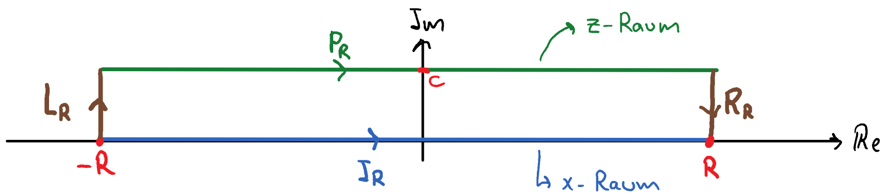
– Was wir beweisen müssen ist, dass $\int_\gamma e^{-z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

Das heisst, das Integral bleibt auch mit einer vertikalen Verschiebung erhalten. (Gibt uns immer noch als Lösung $\sqrt{\pi}$)



$$\int_\gamma e^{-z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

– Wir bilden ein geschlossenes System mit Wege J_R, P_R, L_R, R_R:



entgegengesetzte Richtung

$f(z) := e^{-z^2}$ ist holomorph $\Rightarrow \int_{L_R} f(z)\,dz + \int_{P_R} f(z)\,dz + \int_{R_R} f(z)\,dz - \int_{J_R} f(z)\,dz = 0$

(Das nur für $R \to \infty$)

Falls $\int_{P_R} f(z)\,dz = \int_{J_R} f(z)\,dz$ (unsere Annahme) $\Rightarrow \int_{L_R} f(z)\,dz + \int_{R_R} f(z)\,dz \overset{!}{=} 0$

Was zu zeigen ist: $\lim_{R\to\infty}\left(\int_{L_R} f(z)\,dz + \int_{R_R} f(z)\,dz\right) = 0$ $\left(\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{P_R} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz\right)$

– Ich kann noch zusätzlich als Tipp geben, dass die einzelne Integrale $\int_{L_R} f(z)\,dz$ und $\int_{R_R} f(z)\,dz$ mit $R \to \infty$ verschwinden. Also müssen wir schlussendlich nur die Konvergenz von beide Integrale zeigen.

Wir hatten vorher $c = \mathrm{Im}\left\{-\frac{\sqrt{a}\,b}{2a}\right\}$

i. $\lim_{R\to\infty}\int_{R_R} f(z)\,dz \rightarrow$ wir Parametrisieren R_R: $\gamma(t) = R + it$, $t \in [0, c]$ (unsere vertikale Verschiebung)

Ich habe hier $-P_R$ parametrisiert

$$\lim_{R\to\infty}\int_{R_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} -\int_0^c e^{-(R+it)^2}\,i\,dt = \lim_{R\to\infty} -e^{-R^2}\int_0^c e^{t^2}\cdot e^{-2Rit}\,dt$$

weil ich $-R_R$ parametrisiert habe (einfacher als R_R zu parametrisieren)

wir wissen, dass $\left|\int_0^c e^{t^2}\cdot e^{-2Rit}\,dt\right| \leq \int_0^c |e^{t^2} e^{-2Rit}|\,dt = \int_0^c |e^{t^2}|\underbrace{|e^{-2Rit}|}_{1}\,dt \leq \int_0^c |e^{t^2}|\,dt$

– Da $e^{t^2} > 0 \quad \forall\, t \in [0,c] \Rightarrow \int_0^c |e^{t^2}|\, dt = \int_0^c e^{t^2}\, dt$

Also haben wir $\lim_{R\to\infty} \int_{R_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} -e^{-R^2} \int_0^c e^{t^2} \cdot e^{-2Rit}\, dt \leq \lim_{R\to\infty} -e^{-R^2} \int_0^c e^{t^2} dt = 0$

weil $\int_0^c e^{t^2} dt$ nicht von R abhängt (und endlich ist) und

$\lim_{R\to\infty} -e^{-R^2} \cdot const = 0$

ii. Mache das gleiche wie in i. für $\int_{L_R} f(z)\, dz$ (Konvergenz nach Null mit $R\to\infty$)

– Wir haben also gezeigt, dass $\lim_{R\to\infty} \int_{R_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)dz = 0$

$$\lim_{R\to\infty} \left(\cancelto{0}{\int_{L_R} f(z)\, dz} + \int_{P_R} f(z)dz + \cancelto{0}{\int_{R_R} f(z)dz} - \int_{J_R} f(z)\, dz \right) = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{P_R} f(z)\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_{J_R} f(z)dz$$

$$\rightsquigarrow \lim_{R\to\infty} \int_{P_R} f(z) = \lim_{R\to\infty} \int_{J_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\, dx = e^{b^2/4a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \lim_{R\to\infty} \int_{P_R} e^{-z^2} dz = e^{b^2/4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$