Theorie

1. Fourier-Reihen

1.1 Periode

- Eine Funktion heisst periodisch, falls

$$\exists p > 0, \quad \text{sodass} \quad f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

p heisst Periode von f (die kleinste Periode heisst Fundamentalperiode)

1.2 Gerade/ungerade Fortsetzung

– Manchmal wollen wir Funktionen im Intervall $[0, L]$ periodisch fortsetzen.

$f(x)$ = Stückweise-Funktion (Im Intervall $[0, L]$)

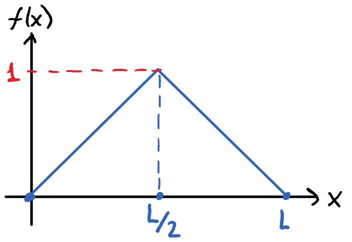
$\tilde{f}(x)$ = periodische Fortsetzung von $f(x)$ (Im Intervall $]-\infty, \infty[$)

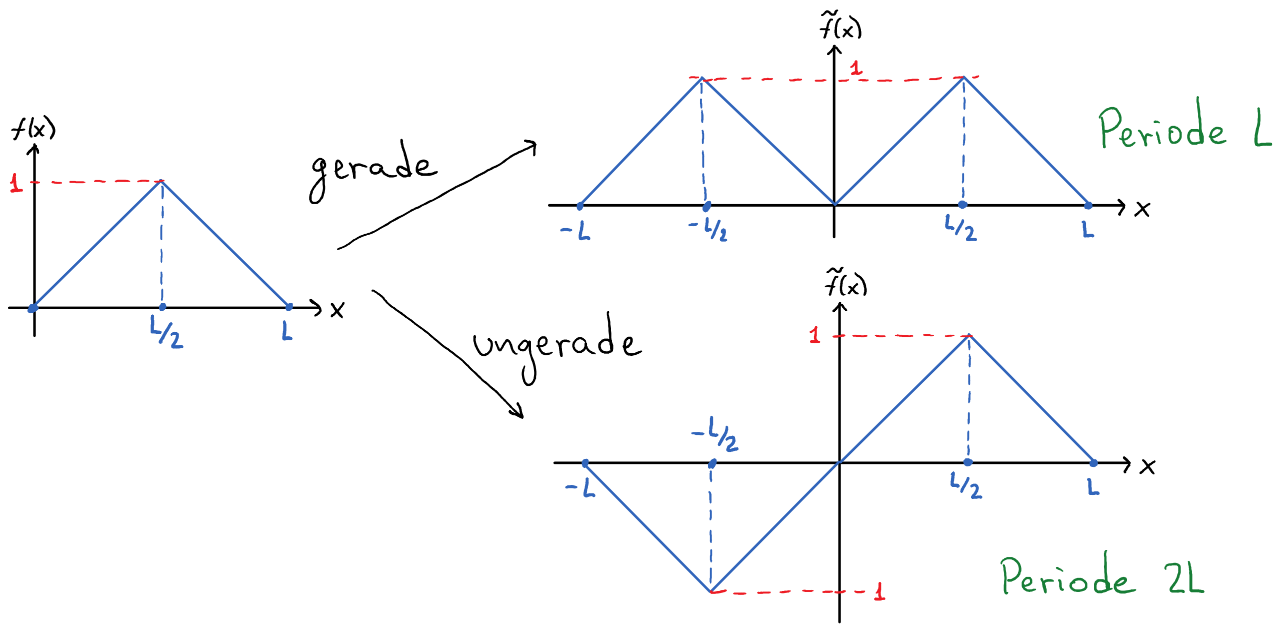
→ Gerade Fortsetzung von $f(x)$ $\Rightarrow$ $\tilde{f}(x)$ ist gerade $\quad (\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x))$

→ Ungerade Fortsetzung von $f(x)$ $\Rightarrow$ $\tilde{f}(x)$ ist ungerade $\quad (\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x))$

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{L}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2}{L}(L-x), & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad \rightarrow$$





1.3 Fourier-Reihen

- Darstellung von periodische Funktionen durch trigonometrische Funktionen $(\cos(x), \sin(x))$

- Ein trigonometrisches Polynom mit Grad N ist eine Linearkombination von trigonometrische Funktionen:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt) \quad \text{oder} \quad \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$$

- Die Reihen mit Grenzen ∞ $(N \to \infty)$ heissen trigonometrische oder Fourier-Reihen (Sie haben Periode 2π)

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt} \qquad\Big|\qquad f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad // \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \quad (k \geq 0)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \quad (k \geq 1)$$

- Für T-periodische Funktionen f gilt

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{\frac{2\pi ikt}{T}} \qquad\Big|\qquad f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-\frac{2\pi ikx}{T}}\,dx \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad // \qquad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(kx)\,dx \quad (k \geq 0)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(kx)\,dx \quad (k \geq 1)$$

- Eigenschaften:

(1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,g(x)\,dx$ mit $\begin{cases} f(-x) = f(x) & \text{(gerade)} \\ g(-x) = -g(x) & \text{(ungerade)} \end{cases} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,g(x) = 0$

→ Symmetrisches Integrieren (von $-a$ bis $+a$ für $a \in \mathbb{R}$) einer ungeraden und geraden Funktion ist immer Null

(2) $\cos(x)$ ist eine gerade Funktion
$\sin(x)$ ist eine ungerade Funktion

<u>$f(x)$ gerade</u> $(f(-x) = f(x))$

→ $b_k = 0 \ \forall k$

→ $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) dx$

<u>$f(x)$ ungerade</u> $(f(-x) = -f(x))$

→ $a_k = 0 \ \forall k$

→ $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) dx$

- Umformeln komplex ↔ reell

$a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = i(c_k - c_{-k})$ für $k > 0$

$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$ und $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i b_k)$ für $k > 0$

- Parsevalsche Identität

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)}$$

Tipps

Aufgabe 1

(a) # Sing innerhalb $|r| = ?$ $\mathrm{Res}(f|z_i)$ berechnen

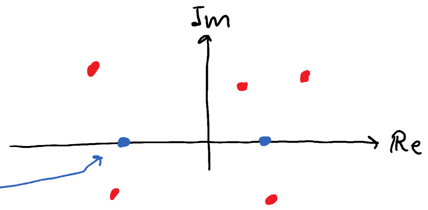
(b) $\sin(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, $z := e^{it}$

Tipp: $\dfrac{(z - 1/z)^{2n}}{z} = \dfrac{1}{z^{2n+1}} (1 - z^2)^{2n}$

Res $= a_{-1}$ (Laurent) mit $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Aufgabe 3

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ für $f(x) < Cx^{-2}$ $\forall x$



Singularitäten mit $\mathrm{Im}\{z_i\} = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}>0} \mathrm{Res}(f|z_i) + \pi i \sum_{\mathrm{Im}=0} \mathrm{Res}(f|z_i)$$

Aufgabe 4

$$\int_0^L f(t)\, dt = \int_\alpha^{\alpha+L} f(t)\, dt$$

Variablentransformation $s := t - L$ für $\int_L^{\alpha+L} f(t)\, dt$ (Periodizität von f ausnutzen)

$$\int_\alpha^{\alpha+L} f(t)\, dt = \int_\alpha^{L} f(t)\, dt + \int_L^{\alpha+L} f(t)\, dt$$

Aufgaben mit Fourrierreihen

- $f(x)$ gerade / ungerade $\Rightarrow$ $b_k = 0$ oder $a_k = 0$
- Integrale lösen (Partielle Integration)