Theorie

1. Die komplexe Einheit

→ Definition:

Komplexe Einheit i → $\boxed{i^2 := -1}$ ⇝ „ $i = \sqrt{-1}$ "

Beispiel: Nullstellen von $x^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow X = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

$\Rightarrow \underline{x = \pm i}$

Beispiel: Nullstellen von $x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm 2i$

$\Rightarrow \underline{x = -1 \pm 2i}$

2. Darstellung

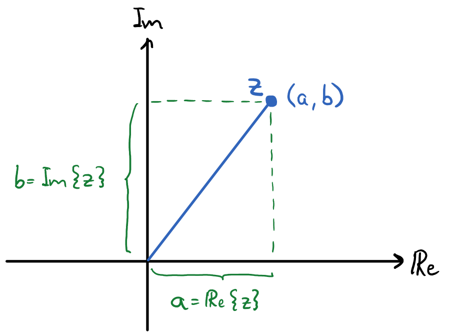
→ Alle komplexe Zahlen lassen sich mit Realteil und Imaginärteil beschreiben

$$z \in \mathbb{C} \longrightarrow z = a + bi \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \mathrm{Re}\{z\} = \text{Realteil von } z \\ b = \mathrm{Im}\{z\} = \text{Imaginärteil von } z \end{array}\right\} \text{! } a, b \in \mathbb{R}$$

• Da es „biwertige" Zahlen sind („2-Dimensional") können wir komplexe Zahlen mit einem Punkt auf zwei Achsen (Real- und Imaginärteil) eindeutig graphisch darstellen ⇒ Gauss'sche/Komplexe Zahlenebene

Kartesische Form

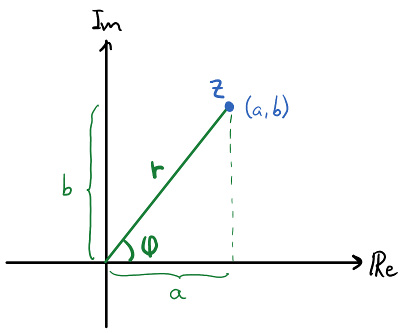
• Darstellung mit „x, y" Koordinaten (Re, Im)



$\boxed{z = a + bi}$

Polarform I

• Darstellung mit Betrag und Winkel



$\mathrm{Re}\{z\} = r\cos(\varphi)$, $\mathrm{Im}\{z\} = r\sin(\varphi)$

$\Rightarrow z = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi)$
$= r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ → $\boxed{z = r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi) = r\,\mathrm{cis}(\varphi)}$

! Nicht alle kennen die Cis-Form

Polarform II

• Darstellung mit Betrag und Winkel + Eulersche Identität

Eulersche Identität:

$\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)}$

$[\, e^{i\varphi} = e^{i\varphi + 2\pi n i}, \; n \in \mathbb{Z} \,]$
↳ 2π-periodisch

• da $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$

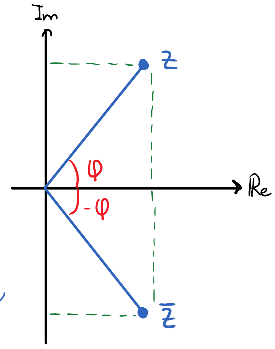
$\Rightarrow \boxed{z = re^{i\varphi}}$

	Kartesische Form	Polarform
Realteil $\mathrm{Re}\{z\}$	a	$r\cos(\varphi)$
Imaginärteil $\mathrm{Im}\{z\}$	b	$r\sin(\varphi)$
Betrag $\lvert z\rvert$	$\sqrt{a^2+b^2}$	r
Argument $\arg(z)$	$\tan^{-1}(b/a)$	φ

3. Konjugation

→ komplexe Konjugation ist definiert als die Abbildung

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = a+bi \longmapsto \bar{z} = a - bi$



Kartesische Form	$z = a+bi$	$\Rightarrow$	$\bar{z} = a - bi$
Polarform	$z = r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi)$	$\Rightarrow$	$\bar{z} = r\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)$
	$z = re^{i\varphi}$	$\Rightarrow$	$\bar{z} = re^{-i\varphi}$

$z \to \bar{z} \Rightarrow$ Spiegelung um die Realachse

- Eigenschaften

1. $z + \bar{z} = a+bi+a-bi = 2a = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$
2. $z - \bar{z} = a+bi-a+bi = 2bi = 2i\,\mathrm{Im}\{z\}$
3. $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = r^2 = |z|^2$

4. Moivrescher Satz

→ $\boxed{[\cos(x) + i\sin(x)]^n = \cos(nx) + i\sin(nx)}$ $\rightsquigarrow [\cos(x) + i\sin(x)]^n = [e^{ix}]^n = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(x)$

→ Polynome mit Grad q haben genau q Nullstellen

Beispiel: $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow (z+1)^2(z^2+1) = 0 \rightsquigarrow z = -1, -1, +i, -i$ (4 Nullstellen, 2 gleiche)

→ Falls ein Polynom mit reelle Koeffizienten eine komplexe Nullstelle z hat, dann ist ihre konjugierte komplexe Zahl $\bar{z}$ auch eine Nullstelle

Beispiel: $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0 \longrightarrow$ gegeben ist eine Nullstelle $z = +i \Rightarrow z' = \bar{z} = -i$ ist auch eine Nullstelle, da es nur reelle Koeffizienten hat

Beispiel: $z^4 = i$ Finde alle Nullstellen

- Wir wissen, dass es 4 Nullstellen gibt
- $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$
- Komplexe Exponentialfunktion ist 2π-periodisch → $i = e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{2}i + 2\pi i n}, \quad n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z^4 = i$

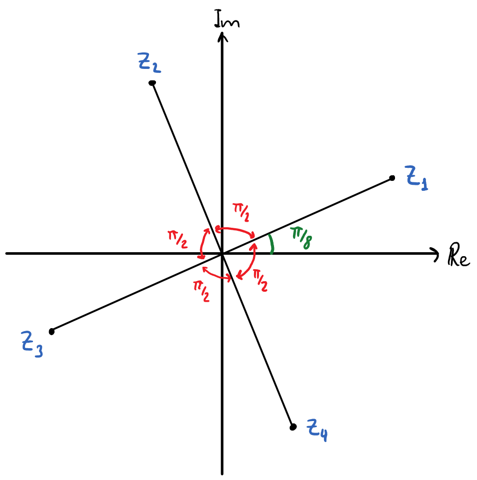
$z^4 = e^{\frac{\pi}{2}i + 2\pi n i}$

$(z^4)^{1/4} = \left(e^{\frac{\pi}{2}i + 2\pi n i}\right)^{1/4} = e^{\frac{\pi}{8}i + \frac{1}{2}\pi n i} \Rightarrow z = e^{\frac{\pi i + 4\pi i n}{8}}$

Setzen wir Werte für $n = [0,1,2,3]$
↓
Nur 4 Werte, da wir 4 Nullstellen haben

$$\begin{cases} z_1 = e^{\frac{\pi}{8}i} \\ z_2 = e^{\frac{5\pi}{8}i} \\ z_3 = e^{\frac{9\pi}{8}i} \\ z_4 = e^{\frac{13\pi}{8}i} \end{cases}$$

↳ für $n = 4 \Rightarrow z = e^{\frac{17\pi}{8}i} = e^{2\pi i + \frac{\pi}{8}i} = e^{\pi/8\, i}$



- Nullstellen sind alle gleich verteilt.
- für $z^n = a, \; a \in \mathbb{C}$ gilt also
  - Nullstellen haben einen Zwischenwinkel von $\frac{2\pi}{n}$
  - Erste Nullstelle bei $a^{1/n}$

⇒ Haben wir den Grad (n) und eine Nullstelle, so können wir ganz einfach die restlichen n-1 Nullstellen finden

5. Konventionen

→ Es ist eine Konvention alle komplexe Zahlen in kartesiche oder Polarform darzustellen

→ **Brüche**: Falls es eine komplexe Zahl im Nenner gibt, so können wir den Bruch nicht direkt in kartesische Form darstellen.

- Um das zu lösen, verwenden wir die Eigenschaft $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$
- Beispiel: $\frac{3+i}{3-i}$ → $z_n = 3-i$, $z_n \cdot \bar{z}_n = |z_n|^2 = 10$

$$\frac{3+i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3^2+6i-1}{10} = \frac{8}{10} + \frac{6}{10}i = \underline{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i}$$

↳ Mit $\bar{z}_n$ erweitern

6. Cos, Sin, Log

→ Cos, Sin

- $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) + \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = 2\cos(\varphi)$
- $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) - \cos(-\varphi) - i\sin(-\varphi) = 2i\sin(\varphi)$

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}} \qquad \boxed{\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

→ Logarithmus

- Eigenschaften

  i. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

  ii. $\log(a^n) = n\log(a)$

  iii. $e^{\ln(a)} = a \longrightarrow \ln(e^{i\varphi}) = i\varphi \ln(e) = i\varphi$

- Beispiel: $\log(1+\sqrt{3}i) = \log(2e^{i\pi/6})$

$$= \underline{\log(2) + i\frac{\pi}{6}}$$