# Theorie

## 1. Fouriertransformation

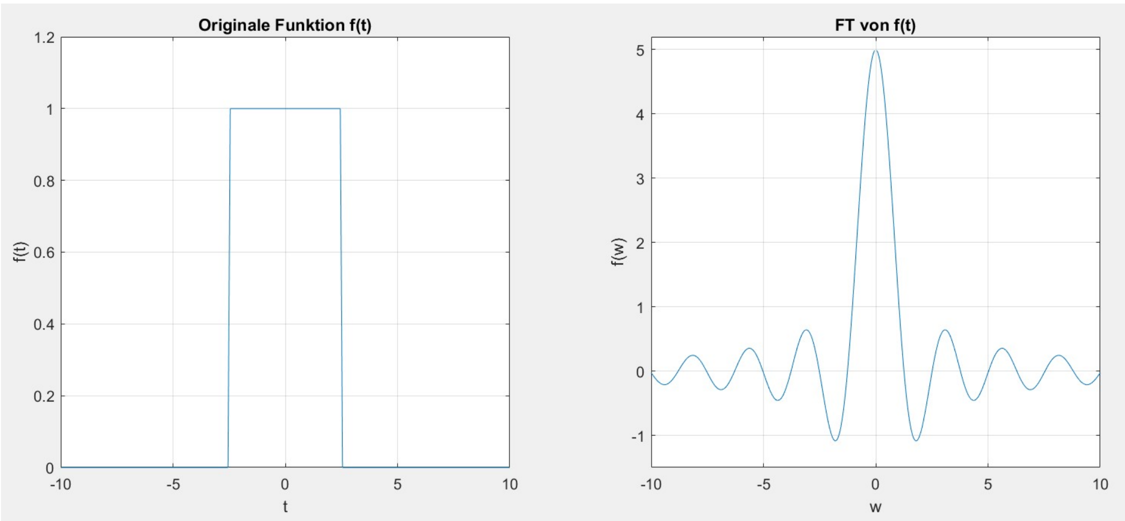
$$\boxed{\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt}$$

<u>Beispiel:</u> Finde die Fouriertransformation $\hat{f}(\omega)$ von $f(t) = \begin{cases} 1, & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{T/2}^{T/2} e^{-i\omega t}\, dt = \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t}\right]_{-T/2}^{T/2} = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega T/2} + \frac{1}{i\omega} e^{i\omega T/2}$$

$$= \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \qquad \left[\operatorname{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}\right]$$

[T = 5]




### → Eigenschaften

1. $\mathcal{F}\{f(t) + g(t)\} = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$
2. $\mathcal{F}\{f(t) \cdot g(t)\} = \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)$ [Faltung]
3. $\mathcal{F}\{\frac{d}{dt} f(t)\} = i\omega \hat{f}(\omega)$
4. $\mathcal{F}\{t f(t)\} = i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega)$
5. $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$

**Beispiel:** Berechne $\mathcal{F}\{t^2 f''(t)\}(\omega)$ in Abhängigkeit von $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$

$$\mathcal{F}\{t^2 f''(t)\}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{t f''(t)\}(\omega) = i^2 \frac{d}{d\omega}\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{f''(t)\}(\omega) = -\frac{d^2}{d\omega^2}\, i\omega\, \mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega)$$

$$= -\frac{d^2}{d\omega}(i\omega)^2\, \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{d^2}{d\omega^2}\left[\omega^2 \hat{f}(\omega)\right]$$

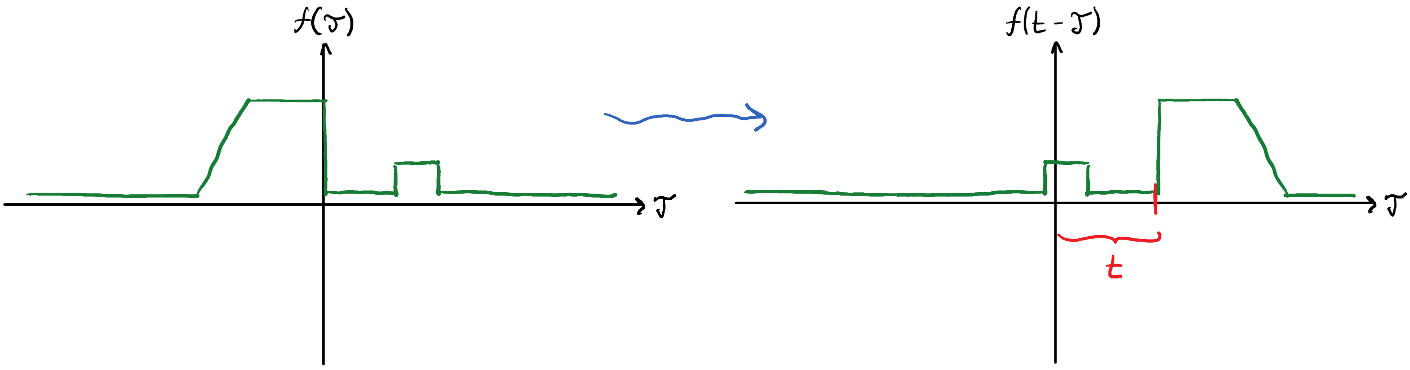
## 2. Faltung

$$\boxed{(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau}$$

→ Eigenschaften

1. $\mathcal{F}\{f*g\}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
2. $(f*g)(t) = (g*f)(t)$

$g(t-\tau) \Rightarrow$ Spiegelung and der y-Achse
\+ Verschiebung um $t$ nach rechts




→ $(f*g)(t)$ berechnen

1. Eine der Funktionen spiegeln und verschieben
2. Finde die Multiplikation der beiden Funktionen
3. Multiplikation von 2. integrieren $(-\infty, \infty)$

In Abhängigkeit von $t$