Theorie

1. Satz von Plancherel

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 \, ds = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(f_0)|^2 \, df_0}$$

was wir in der Übungsstunde und Vorlesung verwenden $\rightarrow$

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} \, dt \qquad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i f_0 t} \, dt$$

(Kreisfrequenz) $\xrightarrow{s = 2\pi f_0}$ (Frequenz)

Beispiel: Berechne $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} d\omega$ mit Hilfe der FT von $f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$\rightarrow \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t} \, dt = \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega} + \frac{1}{i\omega} e^{i\omega}$$

$$= \frac{2}{\omega} \sin(\omega) = 2 \operatorname{sinc}(\omega) \qquad \left[\operatorname{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x} \right]$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, dt \qquad [\text{Satz von Plancherel}]$$

$$\int_{-1}^{1} |1|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} \, d\omega$$

$$2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} \, d\omega \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

2. Laplace-Transformation

$$\boxed{\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt}$$

$\rightarrow$ Existenz der Laplace-Transformation

1. Die Funktion muss von *exponentieller Ordnung* sein, das heisst,

$$\exists \, C, s_0 > 0 \quad \text{s.d.} \quad |f(t)| \leq C e^{s_0 t} \quad \text{für } t > 0$$

$\rightarrow$ $|f(t)|$ darf nicht schneller als $Ce^{s_0 t}$ wachsen, weil sonst $f(t) \cdot e^{-s_0 t}$ divergiert

$\Rightarrow$ Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s_0 t} \, dt = \mathcal{L}\{f\}(s)$ divergiert (existiert nicht)

2. Integrierbarkeit $\int_0^T |f(t)|\,dt < \infty$, $T > 0$

$\Rightarrow$ bereits erfüllt, wenn $f(t)$ *stückweise stetig* in $t \in [0, \infty]$ ist

- Wenn **1.** und **2.** erfüllt sind, so existiert $\mathcal{L}\{f\}(s)$ für $\mathrm{Re}\{s\} > s_0$

Beispiel:

i. $\mathcal{L}\{f\}(s)$ von $f(t) = e^{t^3}$ existiert **nicht** (**1.** nicht erfüllt)

ii. $\mathcal{L}\{f\}(s)$ von $f(t) = \frac{1}{t-2}$ existiert **nicht** (**2.** nicht erfüllt) bei $t=2$ nicht integrierbar

iii. $\mathcal{L}\{f\}(s)$ von $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ **existiert**

1. erfüllt
2. $\int_{-T}^{T} \left|\frac{1}{\sqrt{t}}\right| dt = 2\int_0^T \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \left[4\sqrt{t}\right]_0^T = 4\sqrt{T} < \infty \quad \forall\, T > 0$

iv. $\mathcal{L}\{f\}(s)$ von $f(t) = (e^t)^7$ **existier für $s > 7$**

2. erfüllt
1. $(e^t)^7 = e^{7t} \rightsquigarrow e^{7t} \overset{?}{\leq} Ce^{s_0 t} \Rightarrow$ erfüllt, falls $C > 1$, $s_0 > 7$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{f\}(s)$ existiert für $\mathrm{Re}\{s\} > s_0 = 7$