Theorie

1. Komplexe Funktion

→ Funktion $f: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)$

Beispiel: $f(z) = z^2 \qquad z = x + yi$

$$\Rightarrow f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{Re\{f(z)\}} + \underbrace{(2xy)}_{Im\{f(z)\}} i$$

→ Wir können es auch als eine zweidimensionale Funktion betrachten (da $z = x+yi$)

$$f(z) = f(x+yi) = \tilde{f}(x,y) \qquad \left[\text{für } f(z) = z^2 \Rightarrow f(x+yi) = \tilde{f}(x,y) = x^2 - y^2 + 2xyi \right]$$

2. Cauchy-Riemannsche Gleichungen

→ Eine Funktion definiert auf $U \subset \mathbb{C}$ lässt sich als Funktion $\tilde{f}$ auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auffassen

$$\tilde{f}(x,y) = \underbrace{f(x+iy)}_{f(z)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

wobei $x = Re\{z\}$, $y = Im\{z\} \rightsquigarrow z = x+iy$

- $\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(x+h,y) - \tilde{f}(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h}$ ⚠ $h \in \mathbb{R}$

$$= f'(x+iy), \text{ falls } f \text{ komplex differenzierbar ist}$$

(Bem.: hier haben wir Differenzierbarkeit auf der Re-Achse definiert)

- $\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(x,y+h) - \tilde{f}(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+i(y+h)) - f(x+iy)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+iy+ih) - f(x+iy)}{h} = i \lim_{h\to 0} \frac{f(x+iy+ih) - f(x+iy)}{ih}$$

$$= i f'(x+iy), \text{ falls } f \text{ komplex differenzierbar ist}$$

(Bem.: hier haben wir Differenzierbarkeit auf der Im-Achse definiert)

Damit es jetzt generell differenzierbar ist, müssen diese zwei Ableitungen die gleiche sein:

$$\Rightarrow \boxed{i \frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+iy)}$$

→ Wenn wir jetzt auch die Abbildung in Re- bzw Im-Teil teilen, das heisst

$$\tilde{f}(x,y) = f(x+iy) = \underbrace{u(x,y)}_{\mathrm{Re}\{\tilde{f} \text{ bzw } f\}} + i\underbrace{v(x,y)}_{\mathrm{Im}\{\tilde{f} \text{ bzw } f\}}$$

Dann können wir zusätzliche Gleichungen finden

$$i\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+iy)$$

$$i\frac{\partial}{\partial x}(u(x,y) + iv(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(u(x,y) + i\,v(x,y))$$

$$i\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) + i\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)$$

Da $u(x,y)$ und $v(x,y)$ reell sind, müssen wir hier nur Re- bzw Im-Teil vergleichen (Koeffizientenvergleich)

Realteile $\Longrightarrow$ $$\boxed{-\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)}$$

Imaginärteile $\Longrightarrow$ $$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y)}$$

andere Schreibweise:

$$-v_x = u_y$$
$$u_x = v_y$$

→ **Theorem**: Eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph wenn die Cauchy-Riemannschen Gleichungen erfüllt sind

⚠ holomorph = komplex differenzierbar = analytisch

<u>Beispiel</u>: $f(z) = z^2$

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$i\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = i\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2xyi - y^2) = i(2x + 2yi) = 2xi - 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xyi - y^2) = 2xi - 2y \quad \stackrel{?}{=}$$

Ja, also ist $f(z) = z^2$ holomorph

<u>Beispiel</u>: $f(z) = \bar{z}$

$$f(x+iy) = x - iy$$

$$i\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = i\frac{\partial}{\partial x}(x - iy) = i$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y}(x - iy) = -i \quad \stackrel{?}{=}$$

Nein, also ist $f(z) = \bar{z}$ <u>nicht</u> holomorph

Beispiel: $f(z) = x^2 - x + 2xyi - yi - y^2$ für $z = x+iy$, $z \in \mathbb{C}$

wir versuchen es jetzt mit den anderen zwei Gleichungen (die mit Ableitungen von $u(x,y)$ und $v(x,y)$)

$$f(z) = (x^2 - x - y^2) + i(2xy - y) \rightsquigarrow \begin{array}{l} u(x,y) = \operatorname{Re}\{f(z)\} = x^2 - x - y^2 \\ v(x,y) = \operatorname{Im}\{f(z)\} = 2xy - y \end{array}$$

$$u_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - x - y^2) = 2x - 1 \qquad v_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - y) = 2y$$

$$u_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - x - y^2) = -2y \qquad v_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - y) = 2x - 1$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{i. Ist } u_x \overset{?}{=} v_y & \Rightarrow & 2x - 1 \overset{?}{=} 2x - 1 \\ \text{ii. Ist } u_y = -v_x & \Rightarrow & -2y \overset{?}{=} -2y \end{array}\right\} \text{Ja, also ist hier } f(z) \text{ holomorph}$$

(Bem.: $x^2 - x + 2xyi - yi - y^2$ entspricht $(x+yi)^2 - (x+iy) = z^2 - z$. Also ist $f(z) = z^2 - z$ und Polynome sind <u>immer</u> holomorph)

3. Laplace Operator

→ Der Laplace-Operator (Δ) ist die Summe der zweifachen partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ nach allen Variablen.

→ Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ist der Laplace-Operator gegeben durch

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f$$

↳ $f = f(x_1, x_2, \dots x_n) \rightsquigarrow$ nur Abkürzung ☺

Notation: $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$

→ Da wir hier in $\mathbb{C}$ sind, benutzen wir nur den zweidimensionalen Laplace-Operator

$$\Delta f(x+iy) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x+iy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x+iy)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Beispiel: $f(z) := z^2 - z$. Berechne $\Delta f(z)$

$$f(x+iy) = x^2 - x + 2xyi - yi - y^2$$

$$\begin{aligned} \Delta f(x+iy) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x+iy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x+iy) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - x + 2xyi - yi - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - x + 2xyi - yi - y^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2x - 1 + 2yi) + \frac{\partial}{\partial y}(2xi - i - 2y) = 2 - 2 = \underline{0} \end{aligned}$$

→ Theorem: Alle komplex differenzierbare Funktionen erfüllen $\Delta f(z) = 0$

$$\begin{aligned}
\Delta f(x+iy) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x+iy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x+iy) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u(x,y) + i\,v(x,y)\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(u(x,y) + i\,v(x,y)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + i\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) + i\,v(x,y)\right) \qquad \text{Abkürzung } (u = u(x,y),\ v = v(x,y)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}u}_{u_x = v_y} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}u}_{u_y = -v_x} + i\left(\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}v}_{v_x = -u_y} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}v}_{v_y = u_x}\right) \qquad (= \Delta u + \Delta v) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial}{\partial x}v\right) + i\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial}{\partial y}u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u\right) \\
&= \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}v - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}v} + i\left(\cancelto{0}{-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u}\right) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

4. Ableitungen

→ Die Ableitung einer Funktion an der Stelle z_0 ist definiert als

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z+z_0) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{oder} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \quad \left[\begin{array}{l} h \to 0 \\ \Rightarrow |h| \to 0 \end{array}\right] \quad ! \ h \in \mathbb{C}$$

- Der Limes existiert, falls die Cauchy-Riemannsche Gleichungen erfüllt sind

→ Beispiel: $f(z) = z^3 + z^2 \rightsquigarrow f'(z) = 3z^2 + 2z$

Beispiel: $f(z) = e^z \rightsquigarrow f'(z) = e^z$

Beispiel: $f(z) = \bar{z} \longrightarrow \bar{z}$ erfüllt nicht die Cauchy-Riemannschen Gleichungen $\Rightarrow f'(z)$ existiert nicht

Beispiel: $\tilde{f}(x,y) = x^2 - y^2 + 3x + (2xy + 3y)i \longrightarrow$ wir wollen die Ableitung mit z ($f'(z)$) und nicht x,y

mit $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(z) = \tilde{f}(x,y) &= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + 3\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\cdot\left(\frac{z-\bar{z}}{2\cancel{i}}\right)\cancel{i} + 3\left(\frac{z-\bar{z}}{2\cancel{i}}\right)\cancel{i} \\
&= \frac{1}{4}\left(z^2 + \cancel{2z\bar{z}} + \cancel{\bar{z}^2}\right) + \frac{1}{4}\left(z^2 - \cancel{2z\bar{z}} + \cancel{\bar{z}^2}\right) + \frac{6}{4}\left(z + \cancel{\bar{z}}\right) + \frac{2}{4}\left(z^2 - \cancel{\bar{z}^2}\right) + \frac{6}{4}\left(z - \cancel{\bar{z}}\right) \\
&= \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{6}{4}z + \frac{2}{4}z^2 + \frac{6}{4}z \\
&= z^2 + 3z
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f'(z) = 2z + 3$

- Man kann es natürlich auch mit $f'(x+yi) = \frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} f(x+yi)$ lösen

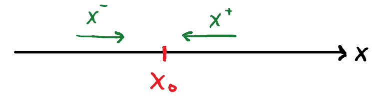
→ Produkt-/Quotienten-/Kettenregel und altbekannte Ableitungsregeln sind auch in $\mathbb{C}$ gültig

⚠ Bevor man $f'(z)$ berechnet ⇒ Ist f überhaupt holomorph?

6. Limes in $\mathbb{C}$

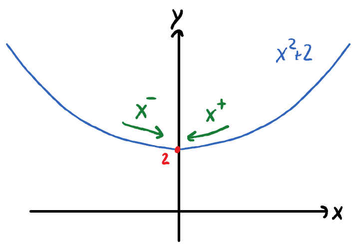
→ Der Limes einer Funktion in $\mathbb{R}$ ist relativ trivial, da man nur die Konvergenz von zwei Richtungen zeigen muss (von $-x$ und $+x$ Richtung)

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert, falls $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ⟶



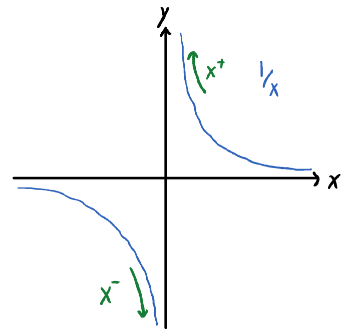
<u>Beispiel:</u> $\lim_{x \to 0} (x^2+2) = 2$

$\lim_{x \to 0^-} (x^2+2) = 2 \qquad \lim_{x \to 0^+} (x^2+2)$

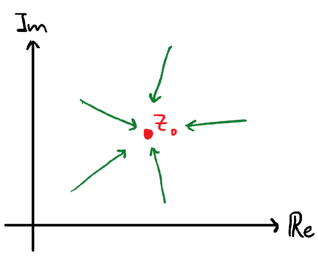


<u>Beispiel:</u> $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$



→ In $\mathbb{C}$ ist es komplizierter, da wir etwas zweidimensionales haben (wir können von unendlich verschiedenen Richtungen zu Punkt z_0 „konvergieren")

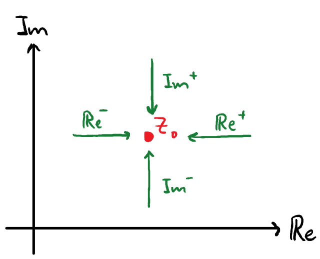


Damit der Limes existiert, müssen <u>alle</u> möglichen <u>Kurven</u> zur gleichen Abbildung von f konvergieren (wenn die Kurve nach z_0 geht)

→ Tipps für Limes Berechnung

1. <u>Widerspruch</u>

i. Betrachte den Limes für etwas rein Relles oder rein Imaginäres (also 4 Richtungen). Sie sollten alle gleich sein (weil es von der Richtung unabhängig sein sollte)



$$\left.\begin{array}{l} \text{rein reell} \rightsquigarrow z = x \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) \\ \text{rein imaginär} \rightsquigarrow z = yi \Rightarrow \lim_{y \to 0} f(yi) \end{array}\right\} \text{Vergleichen} \leftarrow \text{mit}$$

Es reicht zu zeigen, dass der Limes nicht existiert, aber falls jetzt $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{y \to 0} f(iy)$ gibt es keine Aussage

<u>Beispiel:</u> $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$

rein reell $\quad \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$

rein imaginär $\quad \lim_{y \to 0} f(iy) = \lim_{y \to 0} \frac{i\cancel{y}}{-i\cancel{y}} = -1$

$\neq \Rightarrow \lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ existiert nicht

↱(von wo wir zum Punkt konvergieren)

ü Da der Limes von der Richtung unabhängig sein soll, muss es auch unabhängig von θ sein, falls wir $|z|e^{i\arg(z)}$ in z einsetzen und $r \to 0$ gehen lassen

$\Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} f(re^{i\theta}) \rightsquigarrow$ Keine Aussage, falls es unabhängig von θ ist

$\Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} f(re^{i\theta}) \rightsquigarrow$ existiert nicht, falls es abhängig von θ ist

Beispiel: $\lim_{z\to 1+i} \log(z)$

$\to 1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$$\lim_{z\to 1+i} \log(z) = \lim_{z\to 0} \log(1+i-z) \Rightarrow \lim_{r\to 0} \log(|1+i-re^{i\theta}|) + i\arg(1+i-re^{i\theta}) = \log(|1+i|) + i\cdot\arg(1+i) = \log(\sqrt{2}) + i\cdot\frac{\pi}{4}$$

unabhängig von $\theta \Rightarrow$ Limes kann existieren → andere Methode verwenden

Beispiel: $\lim_{z\to 0} \log(z) - \log(|z|)$

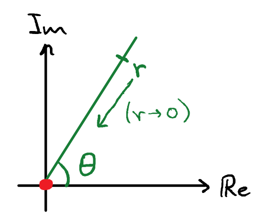
$[\log(z) = \log(|z|) + i\cdot\arg(z)]$

$$\lim_{z\to 0} \log(z) - \log(|z|) \Rightarrow \lim_{r\to 0} \log(re^{i\theta}) - \log(|re^{i\theta}|) = \lim_{r\to 0} \cancel{\log(|re^{i\theta}|)} + i\arg(re^{i\theta}) - \cancel{\log(|re^{i\theta}|)} = \lim_{r\to 0} i\cdot\overbrace{\arg(re^{i\theta})}^{\theta}$$

$= \lim_{r\to 0} i\cdot\theta$ → Es ist abhängig von $\theta \Rightarrow \lim_{z\to 0} \log(z) - \log(|z|)$ existiert nicht!

- Warum ist es überhaupt möglich, dass $\lim_{z\to 0} f(z)$ nicht existiert, falls $\lim_{r\to 0} f(re^{i\theta})$ unabhängig von θ ist?

$\lim_{r\to 0} re^{i\theta}$ entspricht eine Gerade mit Winkel θ, wobei $re^{i\theta}$ zum Punkt $(0,0)$ konvergiert $\rightsquigarrow$



aber

Damit der Limes existiert, müssen alle möglichen Kurven zur gleichen Abbildung von f konvergieren (wenn die Kurve nach z_0 geht) → nicht nur Geraden

Beispiel: $\lim_{z\to 0} \frac{[\mathrm{Im}\{z\}]^2}{\mathrm{Re}\{z\}}$

eine nicht-lineare Kurve

$\lim_{r\to 0} f(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin^2(\theta)}{r\cos(\theta)} = 0$ aber $\lim_{x\to 0} f(x^2 + ix) = \lim_{x\to 0} \frac{(ix)^2}{x^2} = -1$

↳ unabhängig von θ aber $\neq -1 \Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z)$ existiert nicht

2. Limes Regeln

- $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = \lim_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim_{z\to z_0} g(z)$
- $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)}$

Vorsichtig! $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ etc.

- $\lim_{z\to z_0} f(z) \pm g(z) = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z)$

[nur gültig, falls $\lim_{z\to z_0} f(z)$ und $\lim_{z\to z_0} g(z)$ existieren]

3. Stetige Funktionen

- Falls eine Funktion $f(z)$ an der Stelle z_0 stetig ist, dann existiert auch der Limes $\lim_{z\to z_0} f(z)$
- Das ist nützlich, falls die Funktion die zusammensetzung von mehrere Funktionen ist.
- Mit „2. Limes Regeln" lässt sich vieles vereinfachen

Beispiel: $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z^2}{2z+2}$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{2z+2} = \frac{\lim_{z\to 0} z^2}{\lim_{z\to 0} 2z+2}$$] → Polynome sind stetig an der Stelle $z=0$ → Beide Limes existieren

$$= \frac{0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{2z+2} = 0}$$

• Polynome, trigonometrische Funktionen, log, e^z usw. sind in einer Umgebung um 0 stetig. Funktionen mit $\bar{z}$, $\mathrm{Re}\{z\}$, $\mathrm{Im}\{z\}$ generell nicht.

4. Trigonometrische Funktionen

• Betrachte die Taylorentwicklung

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \qquad e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{etc.}$$

Beispiel: $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z}$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \lim_{z\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}$$ → Polynome sind stetig an der Stelle $z=0$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!} = \lim_{z\to 0} \left[1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\right] = \underline{1}$$

Es ist einfach zu zeigen, dass ein Limes nicht existiert, aber sehr schwierig, dass er konvergiert.