Theorie

1. Ableitung in $\mathbb{R}^n$

– Wir betrachten die Kettenregel in $\mathbb{R}^n$, was für Variablentransformationen sehr nützlich ist

$$f(z) = f(x+yi) = \tilde{f}(x,y), \quad \tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$$

Beispiel: $\tilde{f}(x,y) = x^2 - y^2 + 2xyi \longrightarrow \tilde{f}(x,y)$ entspricht gerade $f(z) = z^2$

– Kettenregel (mit Variablentransformation $\rightsquigarrow x_i(b)$, b = neue Variable)

in $\mathbb{R}^1$:

$$\frac{d}{db} f(x(b)) = \frac{d}{dx} f(x) \frac{dx}{db} = f'(x) \cdot \frac{dx}{db}$$

in $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial}{\partial b} f(x_1(b), x_2(b), \dots) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \dots) \frac{\partial x_1(b)}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \dots) \cdot \frac{\partial x_2(b)}{\partial b} + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial b} f(x_1(b), \dots, x_n(b)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial x_k(b)}{\partial b}$$

in $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ (mit Variablen x, y):

$$\frac{\partial}{\partial b} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial b} f(x(b), y(b)) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \frac{\partial y}{\partial b}$$

Beispiel: $f(z) = z^2$. Wir definieren b, sodass $x = 3b$, $y = 1 - b^2$. Finde $\frac{\partial}{\partial b} f(z)$

$$f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial b} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial b} f(x(b), y(b)) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x + 2yi \qquad \frac{\partial x}{\partial b} = 3$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -2y + 2xi \qquad \frac{\partial y}{\partial b} = -2b$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial b} f(x,y) = (2x + 2yi) \cdot 3 + (-2y + 2xi) \cdot (-2b)$$

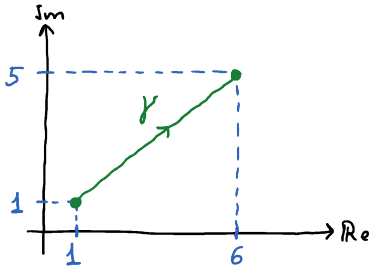
$$= [2 \cdot 3 + 2(1 - b^2)i] \cdot 3 + [-2 \cdot (1 - b^2) + 2 \cdot 3 \cdot i] \cdot (-2b)$$

oder $b(x,y)$ einsetzen, um alles nur in abhängigkeit von x, y zu erhalten

2. Kurvenintegrale

– Wir wollen das Integral einer bestimmten Abbildung auf einem bestimmten Weg integrieren

Beispiel: $f(z) = z^2$



Wir suchen $\int_\gamma f(z)\, dz$, wobei $f(z) = z^2$

→ Das heisst, wir lassen alle Punkte auf γ durch die Abbildung gehen und summieren es am Ende

$$\underbrace{\text{„}\forall z \in \gamma \longrightarrow f(z) = z^2 \longrightarrow \Sigma\text{"}}_{\int_\gamma f(z)\, dz}$$

– Die Schwierigkeit beim Berechnen des Integrals besteht darin, dass wir nur die komplexe Zahlen auf γ integrieren wollen. Dafür benutzen wir die sogenannte Parametrisierung von γ.

2.1 Parametrisierung

– Eine Parametrisierung ist eine Funktion, die für eine laufende Variable im Interval $[a,b]$, alle gewünschten komplexen Zahlen z auf dem Weg γ gibt.

Beispiel: Wir suchen die Parametrisierung für das vorherige Beispiel
Nennen wir mal unsere laufende Variable t. Wir suchen $\gamma(t)$ die für $t \in [a,b]$ (wobei wir $a,b \in \mathbb{R}$ willkürlich auswählen können) alle z auf γ „referenziert"

$\gamma(t) := 1+i+t(5+4i)$ $\rightsquigarrow$ eine Gerade! $\gamma(t) = z_0 + t \cdot z_r$, $z_0 =$ Anfangsverschiebung („Achsenabschnitt")

$z_0, z_r \in \mathbb{C}$
$t \in \mathbb{R}$

$z_r =$ Richtung/Steigung

$t =$ Skalierungsfaktor

Da wir uns nur mit den Werten von $1+i = z_0$ bis $6+5i$ interessieren, definieren wir unser Interval $I := [0,1]$. Also läuft t von 0 bis 1 $(t \in I)$

– Setzen wir $\gamma(t)$ im z vom $\int_\gamma f(z)\,dz$ und lassen t von 0 bis 1 gehen, so können wir die Abbildung aller komplexen Zahlen auf γ integrieren.

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,dz$$

! Wenn wir dieses Integral richtig anschauen, sehen wir, dass es hier ein Problem gibt

Wir wollen nicht mehr nach z (dz) integrieren, sondern nach t (dt), unsere neue Variable der Parametrisierung. Wir suchen also ein Verhältnis zwischen der infinitesimalen Integrationslänge im z-Raum und im t-Raum.
Einfach gesagt, das Verhältnis zwischen dz und dt.
Dieses erhalten wir indem wir unser $z = \gamma(t)$ nach t ableiten:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\gamma(t)}{dt} = \gamma'(t) \rightsquigarrow \frac{dz}{dt} = \gamma'(t) \Rightarrow dz = \gamma'(t)\,dt$$

– Setzen wir $dz = \gamma'(t)\,dt$ im Integral, so erhalten wir

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

– Generalisiert:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt, \quad t \in [a,b]}$$

Beispiel: Wir berechnen jetzt $\int_\gamma f(z)\,dz$

- Für die Abbildung gilt $f(z) = z^2$
- Für den Integrationsweg (ihre Parametrisierung) gilt $\gamma(t) = 1+i+t(5+4i), \quad t \in [0,1]$

Einsetzen von $\gamma(t)$ in $f(z) \Rightarrow f(\gamma(t)) = [1+i+t(5+4i)]^2 = (1+i)^2 + 2(1+i)\cdot t(5+4i) + [t(5+4i)]^2$

$$= \cancel{1} + 2i - \cancel{1} + 2t + 18ti + t^2(9+40i)$$

$$= 2i + t(2+18i) + t^2(9+40i)$$

Berechnen von $dz \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\gamma(t) = (5+4i) \Rightarrow dz = (5+4i)dt$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 [2i + t(2+18i) + t^2(9+40i)]\cdot(5+4i)\,dt$$

$$= (5+4i)\left[2it + \frac{1}{2}t^2(2+18i) + \frac{1}{3}t^3(9+40i)\right]_0^1 = -\frac{232}{3} + \frac{413}{3}i$$

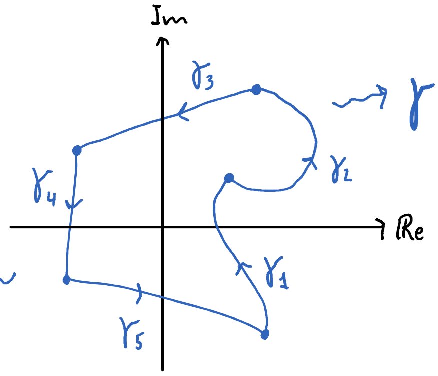
2.2 Eigenschaften

i. Linearität: $\int_\gamma \alpha f(z) + \beta g(z)\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma g(z)\,dz$

ii. $\int_\gamma f(z) = -\int_{-\gamma} f(z)\,dz$ $\rightarrow$ $-\gamma$ = die in umgekehrte Richtung durchlaufene Kurve.

iii. Ist γ eine Kette von Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ so gilt

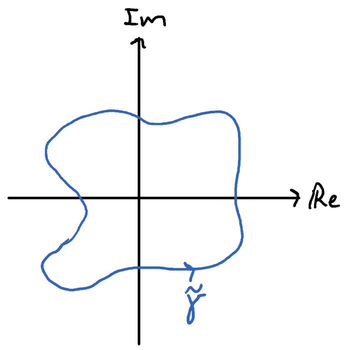
$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1} \int_{\gamma_n} f(z)\,dz}$$

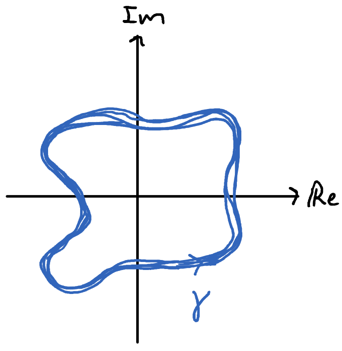


$\rightsquigarrow \gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_4} f(z)dz \leftsquigarrow$

iv. Durchläuft γ den Weg $\tilde{\gamma}$ k mal, so gilt





γ = k-mal $\tilde{\gamma}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = k\cdot\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz$$

(„k mal das gleiche Integral da wir $\tilde{\gamma}$ k mal durchlaufen")

Notation: $\gamma = k\cdot\tilde{\gamma}$