Theorie

1. Cauchy - Integralsatz

1.1 Satz von Cauchy

→ Sei $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$, eine in ganz U stetige Funktion. Dann gilt

i. $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossene Kurven $\gamma \in U$

Bemerke, dass es unabhängig vom Weg ist!

ii. $f(z)$ besitzt eine Stammfunktion $F(z)$ mit $F'(z) = f(z)$
(Mit ii. können wir i. beweisen)

Beweis:

• Für eine geschlossene Kurve γ gilt, dass die Endpunkten identisch sind ⇒ Wenn wir γ im Intervall $[a,b]$ definieren, so gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0,$$ da $f(z)$ die Stammfunktion $F(z)$ besitzt und $\gamma(b) = \gamma(a) \Rightarrow F(\gamma(b)) = F(\gamma(a))$ ■

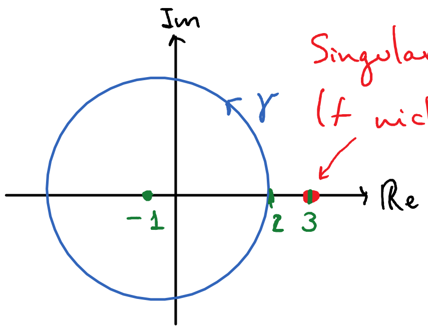
1.2 Satz von Cauchy (Erweiterung)

→ Sei jetzt $f: U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet. Für jede geschlossene Kurve in U gilt

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$$

Beispiel: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-3}$
mit $\gamma \Rightarrow |z+1| = 3$ (Kreis mit Mittelpunkt $(-1,0)$ und Radius 3)

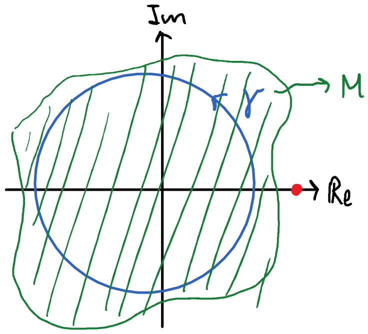
Wir suchen $\int_\gamma f(z)\,dz$



Singularität → Definitionslücke
(f nicht holomorph hier :( )

[f is überall ausser in $z = 3$ analytisch
holomorph]

• Aber wir können ein einfach zusammenhängendes Gebiet $M \subset U$ finden, so dass der ganze Weg γ in M liegt und f auch innerhalb ganz ist.



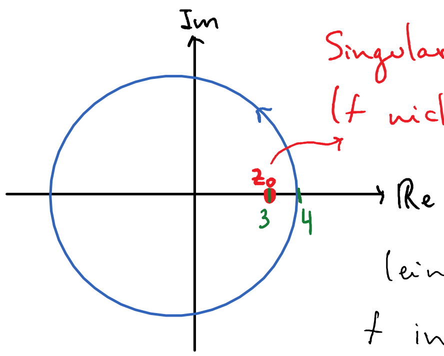
M ist einfach zusammenhängend, f ist innerhalb M ganz und $\gamma \in M$

$\Rightarrow$ Satz von Cauchy $\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{|z+1|=3} \frac{1}{z-3}\,dz = 0$

Bemerkung:

$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz$ Integrationsweg ist Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r

Beispiel: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-3}$. Wir wollen jetzt wieder $\int_\gamma f(z)\,dz$ berechnen aber jetzt mit $\gamma := |z+1| = 5$. Also suchen wir $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz$

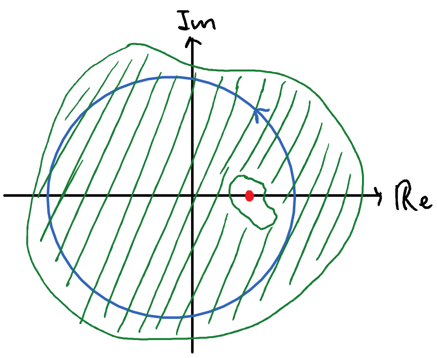


Singularität
(f nicht holomorph hier :)

Hier ist es unmöglich, ein Gebiet M zu finden (einfach zusammenhängend), so dass γ in M liegt und f innerhalb ganz ist (ganz = überall in M holomorph)

$\Longrightarrow$ Aussage $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz = 0$ gilt nicht!

• Einige würden argumentieren, dass man so ein M finden kann:



Also mit $z = 3$ ausserhalb M. Aber das ist nicht einfach zusammenhängend.

1.3 Satz von Cauchy (Interpretation)

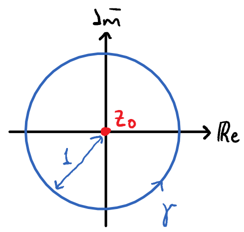
→ Wir können diese beide Theoreme wie folgt interpretieren: Für eine beliebige holomorphe (nicht unbedingt überall) Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ und eine geschlossene Kurve γ gilt

i. Falls es innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche keine Singularität gibt, so ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

ii. Falls es jetzt eine Singularität innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche gibt, so gilt die Aussage $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ nicht!

Bemerkung: Es kann schon den Zufall geben, wo das Integral gerade null ist, obwohl es innerhalb der von γ geschlossene Fläche eine Singularität gibt.

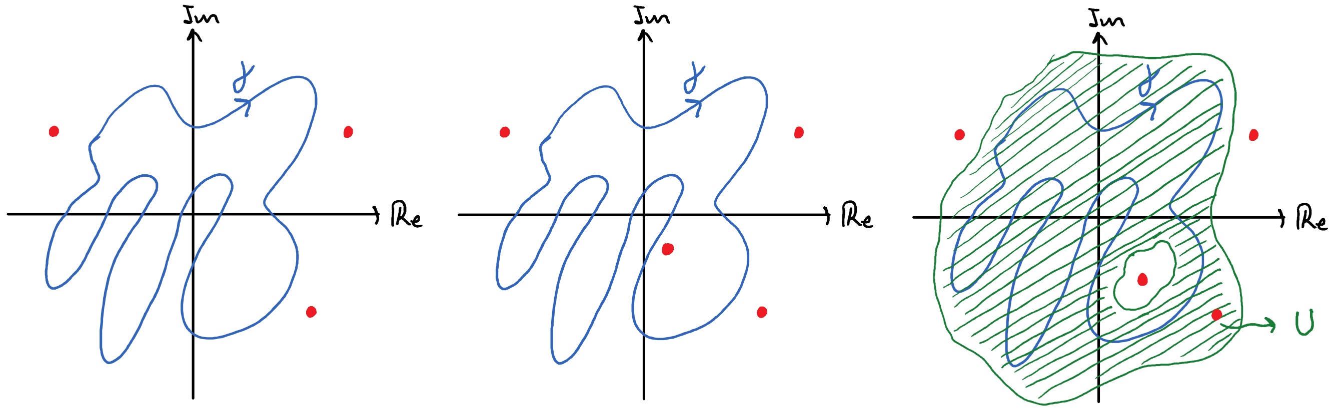
Beispiel: $\int_\gamma \frac{1}{z^n}\,dz$



Wie wir in der Serie gesehen haben, ist $\int_\gamma \frac{1}{z^n}\,dz = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}$

Satz von Cauchy ist hier nicht anwendbar, da es eine Singularität innerhalb γ gibt (bei $z_0 = 0$). Aber trotzdem ist $\int_\gamma \frac{1}{z^n}\,dz = 0$ für $n \neq 1$

Beispiel: • = Singularität von $f(z)$



$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

keine aussage $\left(\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0\right)$

keine aussage $\left(\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0\right)$ wobei $f: U \to \mathbb{C}$

(also f nur in U definiert)

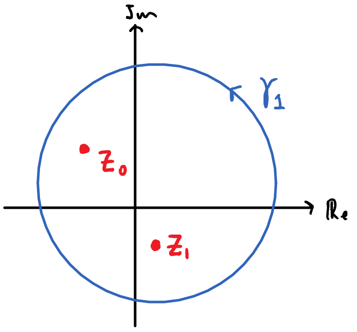
→ Korollar: Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet U. Dann ist das Integral von f unabhängig von der Kurve, das heisst, seien γ_1, γ_2 zwei Kurven von p nach q, wobei $p, q \in U$. Dann gilt

$$\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}$$

[Das haben wir schon in 1.1 bewiesen ⟶ mit $\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$]

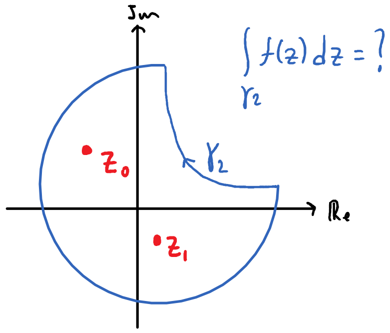
→ Das gilt auch für den Fall wo wir Singularitäten innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche haben. Betrachte $f: U \to \mathbb{C}$, f holomorph mit Singularitäten bei $z = z_0$ und $z = z_1$:

Beweis:

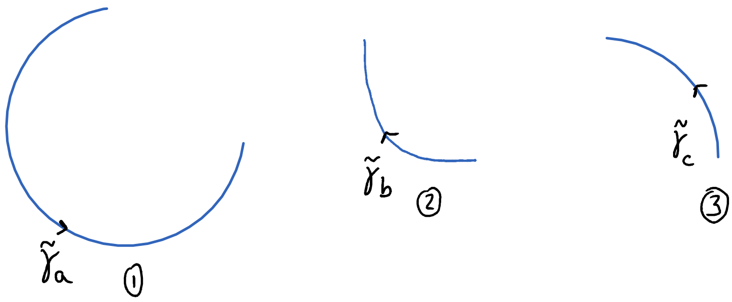


$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \neq 0$. Sagen wir mal $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \sigma \in \mathbb{C}$

Wir definieren γ_2 und wollen jetzt $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ berechnen.



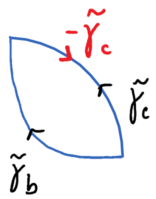
Dafür definieren wir ein Paar Wegfragmente:



Wir haben $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_a + \tilde{\gamma}_c$ und $\gamma_2 = \tilde{\gamma}_a + \tilde{\gamma}_b$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}_a} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_b} f(z)\,dz \quad \to \text{ mit } \tilde{\gamma}_a = \gamma_1 - \tilde{\gamma}_c$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_b} f(z)\,dz \quad \longrightarrow \quad \tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_c =$$



$\int_{\tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz = 0$

↓

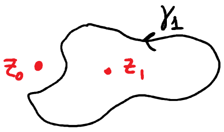
($\tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_c$ ist geschlossen und enthält keine Singularität)

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \sigma \quad \square$$

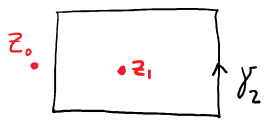
$$\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}$$

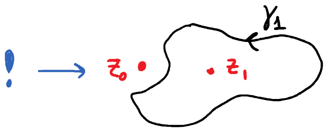
$$\int_{\tilde{\gamma}_b-\tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}_b} f(z)\,dz + \int_{-\tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz$$

→ Folgerung: Das Integral, obwohl es Singularitäten innerhalb der Fläche von γ_1 und γ_2 gibt, ist unabhängig vom Weg. Das ist nur gültig, falls die Singularitäten innerhalb und ausserhalb der von γ_1 bzw γ_2 eingeschlossene Fläche gleich bleiben.

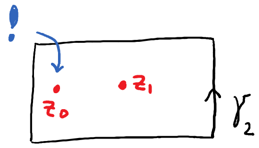


$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$





$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \neq \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$



2. Mengen

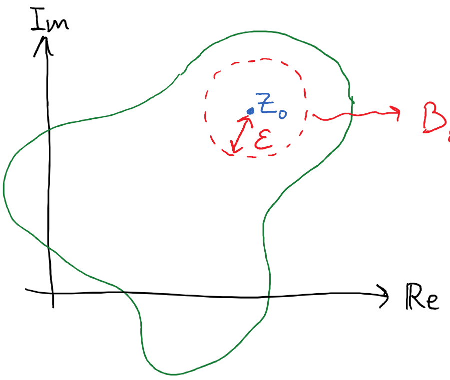
→ Teilmengen von $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \ldots$ können verschiedene Eigenschaften haben. Diese Eigenschaften können uns sagen, wie bestimmte Abbildungen oder komplexe Integrale, zum Beispiel, sich verhalten werden. Hier werden wir grundsätzlich 4 Eigenschaften betrachten:

i. Offen

in $\mathbb{R}$: $U \subset \mathbb{R}$ heisst offen, falls $\forall x \in U \; \exists \, \varepsilon > 0$ s.d. $x + \varepsilon \in U$

in $\mathbb{C}$: $U \subset \mathbb{C}$ heisst offen, falls $\forall z \in U \; \exists \, B_{\varepsilon>0}(z)$ s.d. $B_{\varepsilon>0}(z) \in U$, wobei

$$B_{\varepsilon>0}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$$



Beispiel: $U \subset \mathbb{R}$, $U :=]-\infty, 1]$

für Werte $x \in U$ mit $x \to -\infty$ ist es klar, dass es offen ist. Für $x \to 1$ können wir auch unendlich nahe entfernt sein (Abstand kann unendlich klein sein, dass heisst, wir können immer näher dran kommen ($\varepsilon > 0$) ohne die Grenze zu überschreiten ($\Rightarrow x + \varepsilon > 0$ ist immer noch in U))

↳ $0.99999\ldots + 10^{-999\ldots} \in U$

Beispiel: $U \subset \mathbb{R}$, $U :=]-\infty, 1]$

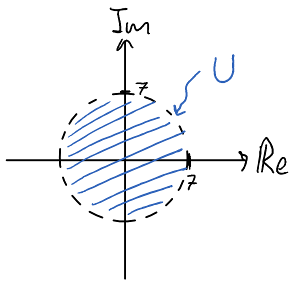
für $x \to -\infty$ ist es offen, aber für $x \to 1$ ist es nicht offen, weil $1 \in U$ und $1 +$ irgend eine Zahl grösser als Null ist dann nicht mehr in U.

Hier haben wir eine Mischung von offen und nicht offen. U ist also <u>nicht</u> offen (Schau mal die Definition von offen: $\forall x \in U \ldots$)

↑
!

Beispiel: $B_7(0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 7 \}$ ist offen

$\forall z \in B_7(0) \; \exists \, B_{\varepsilon>0}(z)$ s.d. $B_{\varepsilon>0}(z) \in B_7(0)$



Beispiel: $U := \mathbb{C}$, U ist offen

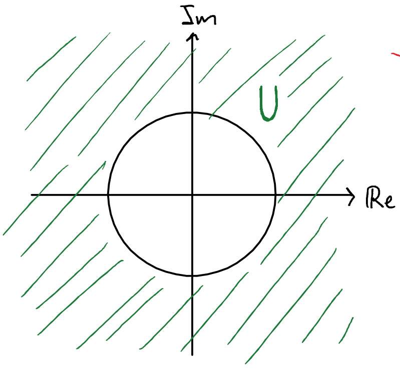
Beispiel: $U := \emptyset = \{\}$, U ist offen (kein $z \Rightarrow \forall z$ erfüllt)

ii. **Abgeschlossen:** $U \subset \mathbb{C}$ heisst abgeschlossen, falls $\mathbb{C} \setminus U$ offen ist

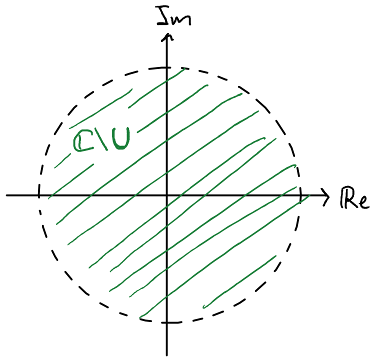
↳ Komplementärmenge einer offenen Menge

Beispiel: $U \subset \mathbb{C}$, $U := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 3 \}$

$\mathbb{C} \setminus U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3 \} = B_3(0)$ ⤳ $B_R(z_0)$ ist immer offen, also ist U abgeschlossen



→ für $z \in U$ ist U für $r \to \infty$ (also in Polarform) offen aber für $r \to 3$ nicht offen $\Rightarrow$ U ist nicht offen



$\mathbb{C} \setminus U$ ist offen

Beispiel: $U := \mathbb{C}$

U ist offen (Bedingung für alle $z \in U = \mathbb{C}$ erfüllt. Da U die ganze komplexe Ebene entspricht, sind alle mögliche z in U)

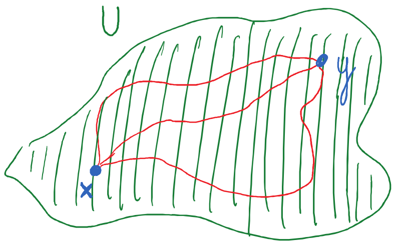
$U \setminus \mathbb{C} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C} = \emptyset = \{\}$. Wie wir schon gesehen haben, ist die leere Menge offen. $\Rightarrow$ U ist abgeschlossen

$\mathbb{C}$ ist offen und abgeschlossen

↱ manchmal offen, manchmal nicht

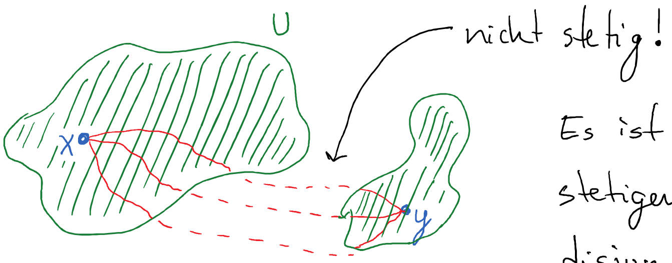
⚠ Wenn eine Menge Halboffen ist (also eine Mischung wie bei $]3, 2]$, zum Beispiel), dann sagen wir einfach, dass die Menge nicht offen ist (offen nur falls Bedingung für $\forall z$ erfüllt ist!) Gleich für abgeschlossen: Falls $\mathbb{C} \setminus U$ offen ist, dann ist U abgeschlossen. Aber falls $\mathbb{C} \setminus U$ manchmal offen und manchmal nicht offen ist, dann ist U nicht abgeschlossen

iii. **Wegzusammenhängend**: für jedes Paar x, y $(x, y \in U)$ gibt es einen <u>stetigen</u> Weg von x nach y.



Wegzusammenhängend

Für alle Paare x, y $(x, y \in U \subset \mathbb{C})$ existiert ein Weg, die die beiden verknüpft und <u>komplett</u> in U liegt



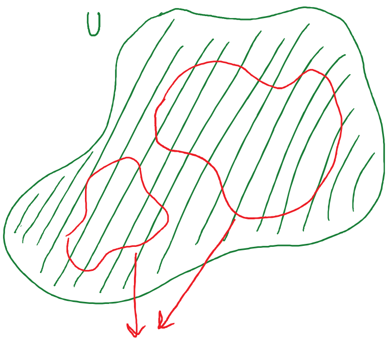
nicht wegzusammenhängend

Es ist unmöglich x und y durch einen stetigen Weg zu verknüpfen. Generell sind <u>disjunkte</u> Mengen nicht wegzusammenhängend

↳ $A, B \subset \mathbb{C}$, $A \cap B = \emptyset$

iv. **Einfach zusammenhängend**: Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend, falls sie wegzusammenhängend <u>und</u> Nullhomotop ist. Nullhomotop heisst, dass „bei geschlossene Wege nur Elemente von U enthalten sind (in die geschlossene Fläche)".

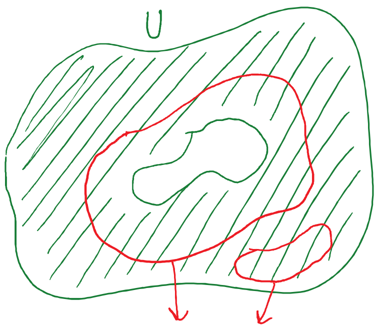
↳ stetig



geschlossene Wege

Für alle geschlossene Wege ist die innere Fläche vom Weg in U

$\Rightarrow$ einfach zusammenhängend

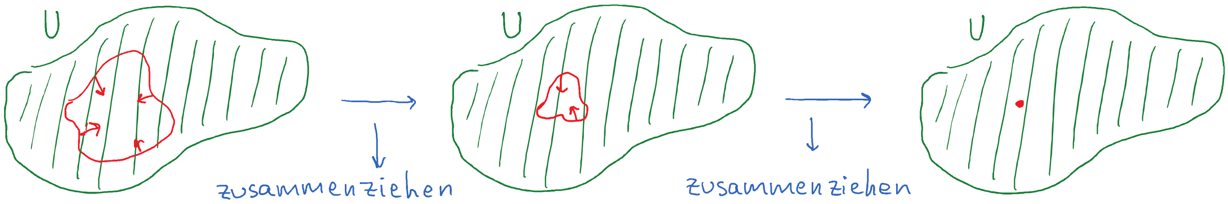


geschlossene Wege

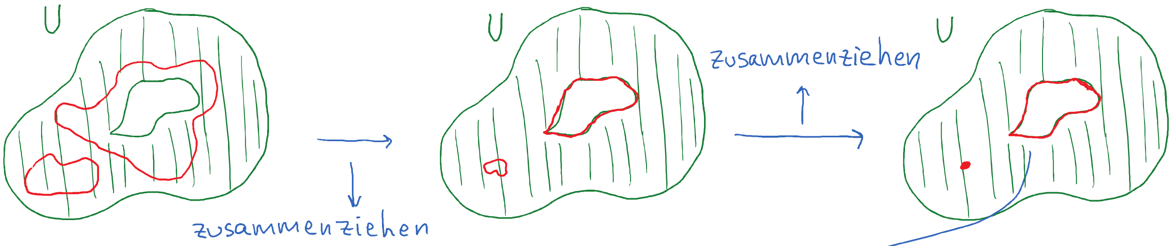
Für gewisse Wege ist die innere Fläche nicht ganz in U

$\Rightarrow$ nicht einfach zusammenhängend

→ Nullhomotopie kann auch wie folgt interpretiert werden: jeder geschlossene Weg lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen



Wir ziehen den Weg zusammen und schauen, ob es möglich ist, es zu einen Punkt transformieren. Hier ist es für alle geschlossene Wege möglich und deshalb ist U auch einfach zusammenhängend



Hier ist es nicht möglich den Weg zu einen Punkt zusammenziehen, weil sonst der Weg nicht in U ist (ein Weg ist nichts anderes als die Zusammensetzung von verschiedenen Punkten $z_i \in U$. Also müssen Wege, egal ob geschlossen oder nicht, immer in U sein). Hier wäre also U nicht einfach zusammenhängend