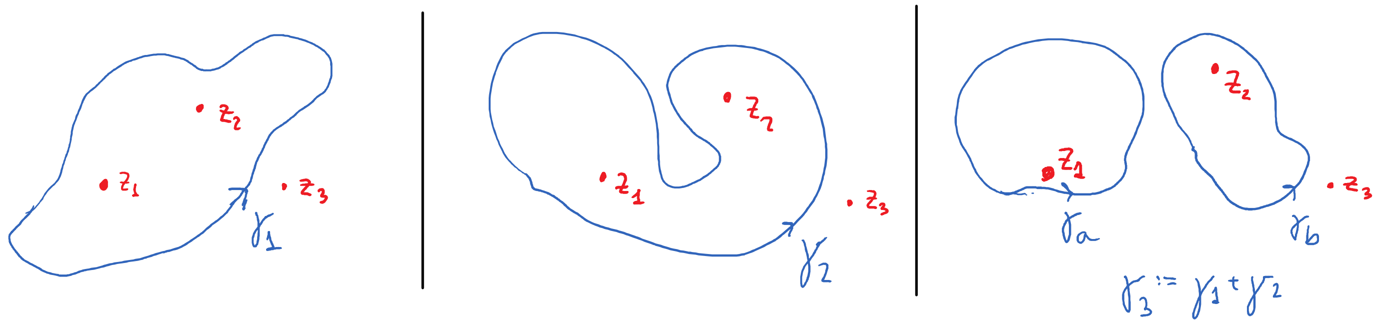
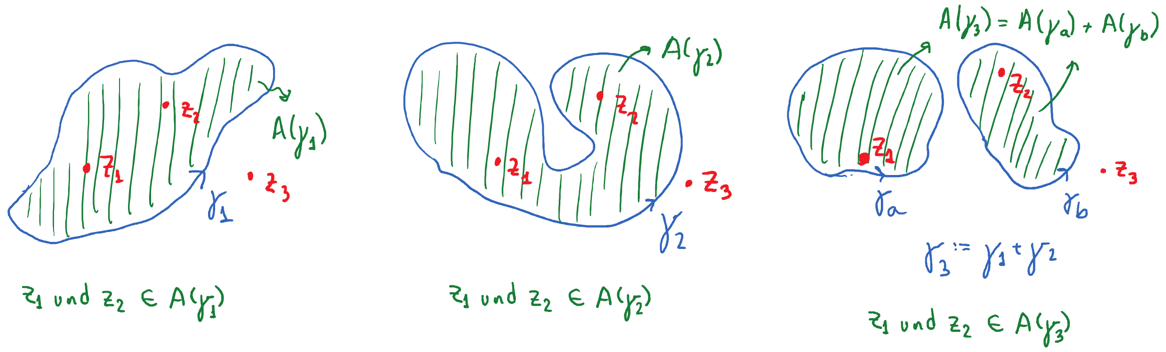
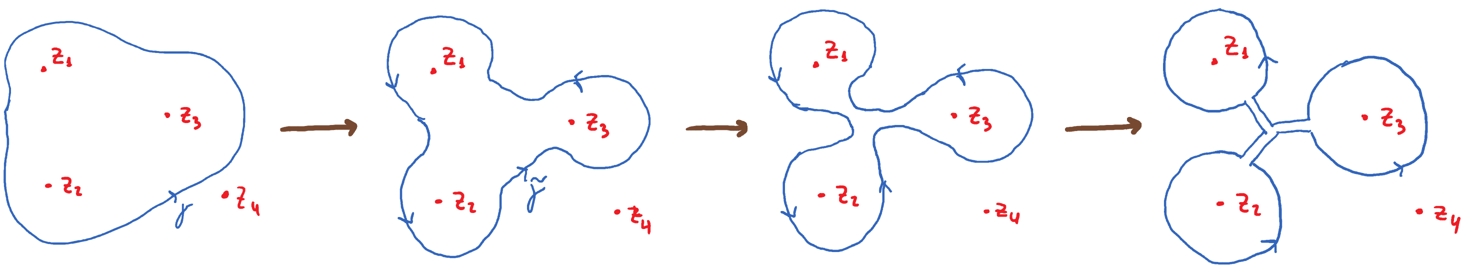
Theorie

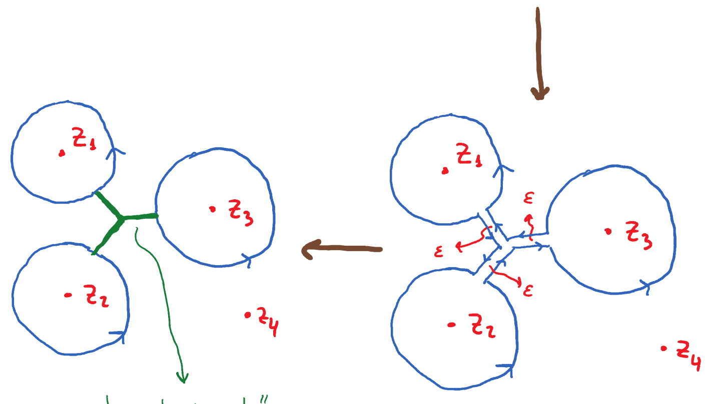


$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

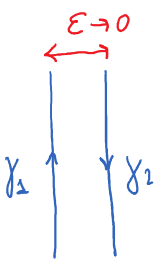


→ Singularitäten innerhalb bzw ausserhalb $A(\gamma_i)$ sind gleich $\Rightarrow \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_3}$





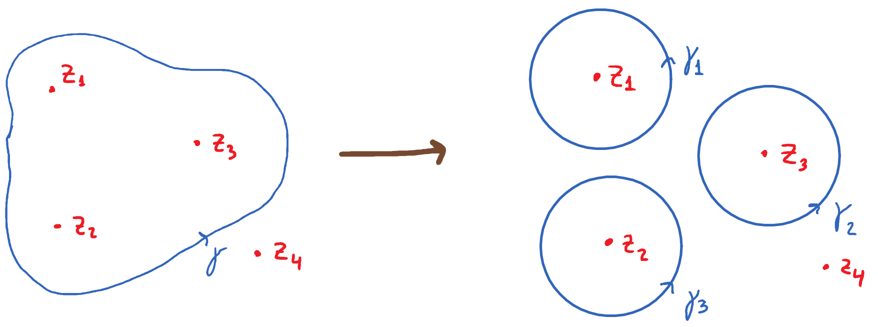
„abgekürzt"
(Wegintegrale in entgegengesetzte Richtung heben sich auf)



mit $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \gamma_1 = -\gamma_2$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\left(\text{da} \int_{\gamma} f(z)\,dz = -\int_{-\gamma} f(z)\,dz\right)$$



→ Da hier alle Singularitäten erhalten sind, gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$

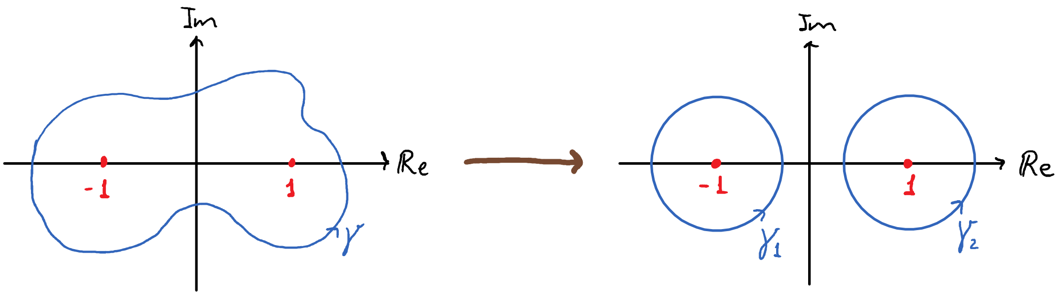
Für N Singularitäten haben wir also

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

wobei γ_i ein geschlossener Weg entspricht, der nur die Singularität z_i enthält (jetzt sehen wir warum der Begriff „isolierte Singularität" so wichtig ist)

→ Bedeutung/Interpretation: Wir können unser Integral in mehrere Integrale aufteilen, wobei jedes Teilintegral nur eine Singularität enthält (also können wir immer Integralformel verwenden, da in γ_i nur eine Singularität liegt).

Beispiel: $g(z) := \frac{z+2}{(z+1)(z-1)}$. Berechne $\int_\gamma g(z)\,dz$ wobei $z = 1, -1$ in γ liegen



Singularitäten erhalten $\Rightarrow$ $\int_\gamma g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz$

$\int_{\gamma_1} g(z)\,dz \rightsquigarrow \int_{\gamma_1} \frac{\left(\frac{z+2}{z-1}\right)}{z+1}\,dz$ → $f(z) = \frac{z+2}{z-1}$ $\Rightarrow$ $\int_{\gamma_1} g(z)\,dz = -\pi i$

↳ nur Sing. $z=-1$ innerhalb γ_1

$\Rightarrow$ $\int_\gamma g(z)\,dz = 3\pi i + (-\pi i) = \underline{2\pi i}$

$\int_{\gamma_2} g(z)\,dz \rightsquigarrow \int_{\gamma_2} \frac{\left(\frac{z+2}{z+1}\right)}{z-1}\,dz$ → $f(z) = \frac{z+2}{z+1}$ $\Rightarrow$ $\int_{\gamma_2} g(z)\,dz = 3\pi i$

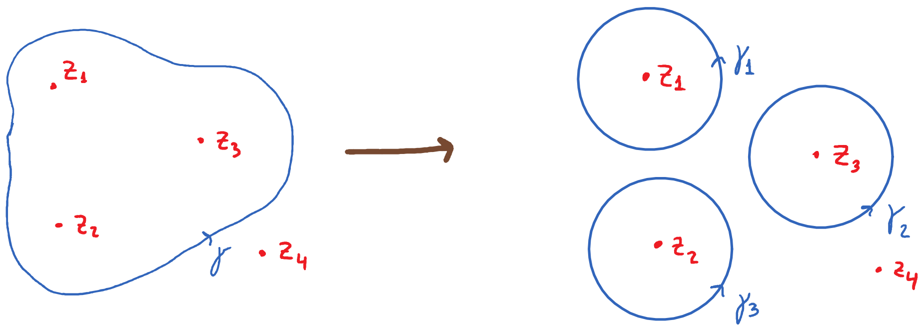
↳ nur Sing. $z=-1$ innerhalb γ_1

Oder mit Partialbruchzerlegung lösen

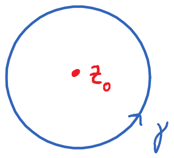
1. Wir können alle holomorphe Funktionen in Laurentreihen darstellen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

2. Wir können Integrale in Teilintegrale aufteilen, wobei ein Teilintegral nur eine Singularität enthält.



3. Wir untersuchen $\int_\gamma (z-z_0)^n \, dz$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $z_0 \in A(\gamma)$



$g_n(z) := (z-z_0)^n$. $\int_\gamma g_n(z) \, dz$

für $n \geq 0$ ist $g_n(z)$ in $A(\gamma)$ holomorph $\Rightarrow \int_\gamma g_n(z) \, dz = 0, \quad n \geq 0$

für $n < 0$ können wir γ parametrisieren oder Integralformel verwenden

wir suchen $\int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^k} \, dz$, wobei hier $k = -n \quad (n < 0)$

$$f^{(k-1)}(z_0) = \frac{(k-1)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} \, dz \rightsquigarrow \text{Integralformel} \Rightarrow f(z) := 1$$

i. Für $k = 1 \Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z-z_0} \, dz = 2\pi i \, f(z_0) = 2\pi i$

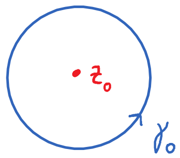
ii. Für $k > 1 \Rightarrow f^{(k-1)}(z_0) = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(1) \Big|_{z=z_0} = 0$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^k} \, dz = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

Also haben wir

$$\boxed{\int_\gamma (z-z_0)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}}$$

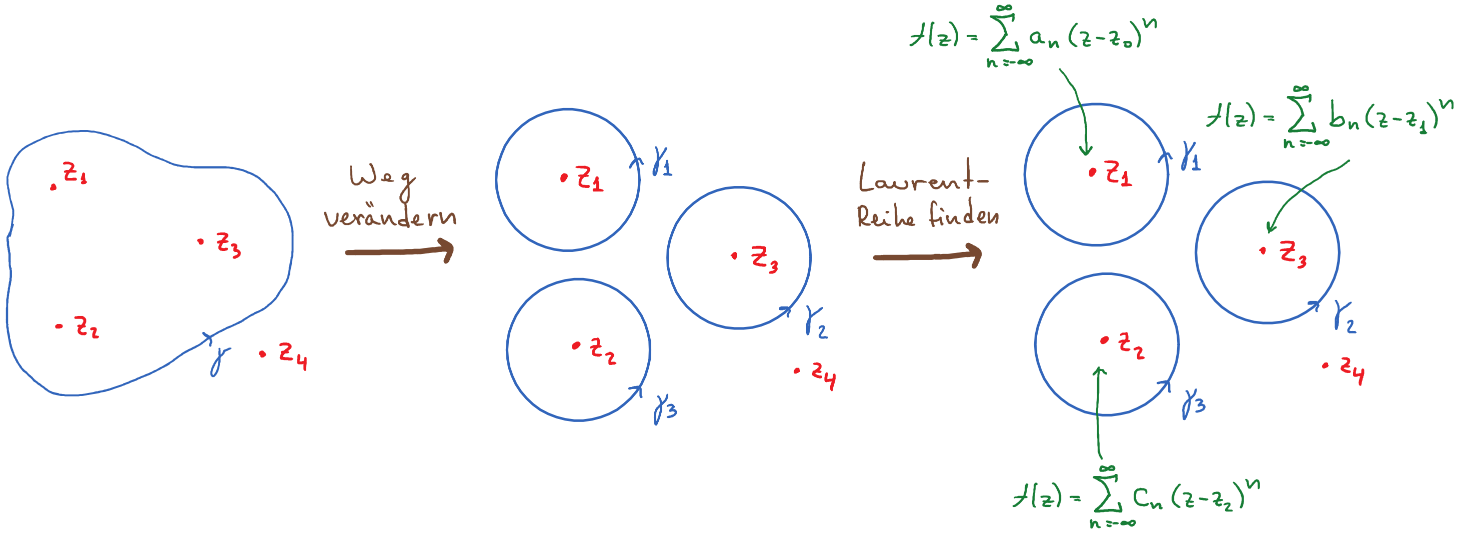
→ Wenn wir also die Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0 (wo die Singularität ist) haben, gilt:



$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\gamma_0} (z-z_0)^n \,dz$$

$$= a_{-1} \cdot 2\pi i \,, \quad \text{weil} \int_{\gamma} (z-z_0)^n \,dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

⇒ Wenn wir die Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0 kennen, ist $\int_{\gamma_0} f(z)dz$ einfach $2\pi i$ mal der Koeffizient c_{-1} → wir müssen theoretisch nicht die ganze Entwicklung (alle Koeffizienten) kennen, nur c_{-1}. Der c_{-1}-te Koeffizient nennt man **Residuum**.



⚠ Wir müssen für jedes z_i eine neue Reihenentwicklung finden, da die Reihen einen Konvergenzradius haben ⇒ Wir entwickeln die Reihe um die Singularität

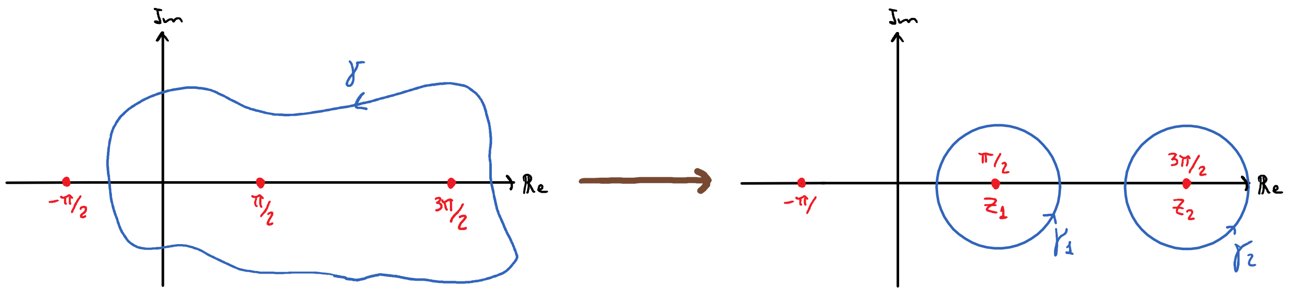
$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz = 2\pi i\, a_{-1} + 2\pi i\, b_{-1} + 2\pi i\, c_{-1}$$

$$= 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f \mid z_i)$$

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f \mid z_i)}$$

$\mathrm{Res}(f \mid z_i)$ = Koeffizient c_{-1} der Laurentreihe der Funktion f mit Entwicklungspunkt z_i ⇝ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ ⇒ $\mathrm{Res}(f \mid z_0) = c_{-1}$

Beispiel: Wir berechnen $\int_\gamma \tan(z)\,dz$



tan(z) hat Singularitäten bei $z=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, aber nur $z_1=\frac{\pi}{2}$ und $z_2=\frac{3\pi}{2}\in A(\gamma)$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f|z_i) = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f|z_1)+\mathrm{Res}(f|z_2)\right)$$

wir suchen also die Potenzreihe (Laurentreihe) von $f(z)$ mit Entwicklungspunkt z_1 und z_2

für $z_1 \Rightarrow f(z_1) = -\frac{1}{x-\pi/2} + \frac{1}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{45}\left(x-\pi/2\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x-\pi/2\right)^5\right)$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f|z_1) = -1$ $\quad c_{-1}=-1$ $\quad \left[-\frac{1}{x-\pi/2} = -1\cdot\frac{1}{x-\pi/2} = -1\cdot\left(x-\pi/2\right)^{-1}\right]$

für $z_2 \Rightarrow f(z_2) = -\frac{1}{x-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{3}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{45}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^5\right)$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f|z_2) = -1$

Da tan(z) periodisch ist, sind alle ihre Singularitäten gleich (gleiche Ordnung, gleiche Residuen etc.)

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f|z_i) = 2\pi i\,(-1-1) = \underline{-4\pi i}$$

→ **Problem:** Wir wollen nicht für alle Singularitäten die ganze Laurentreihe berechnen. Uns interessiert nur der C_{-1}-te Koeffizient. Wie können wir ganz einfach $\mathrm{Res}(f|z_i)$ direkt finden?

1. Berechnung von $\operatorname{Res}(f|z_i)$

i. Pole n-te Ordnung:

$$\boxed{\operatorname{Res}(f|z_i) := \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_i)^n f(z)\right]}$$

ii. Pole 1. Ordnung:

$$\boxed{\operatorname{Res}(f|z_i) = \lim_{z\to z_i}(z-z_i)f(z)}$$

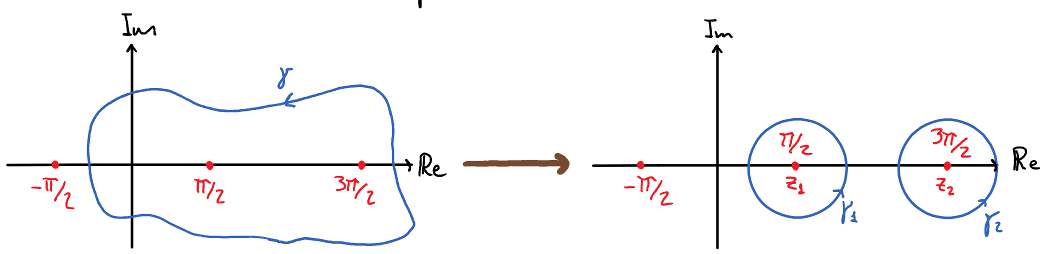
- Eine andere Methode für einfache Pole ist gegeben durch:

$f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$, wobei h, g holomorph an der Stelle z_i sind und $h(z_i) \neq 0$

$h(z)$ darf keine NS bei z_i haben (sonst wäre es hebbar)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{Res}(f|z_i) = \frac{h(z_i)}{g'(z_i)}}$$

Beispiel: Wir berechnen $\int_\gamma \tan(z)\,dz$



$\tan(z)$ hat Singularitäten bei $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, aber nur $z_1 = \frac{\pi}{2}$ und $z_2 = \frac{3\pi}{2} \in A(\gamma)$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f|z_i) = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f|z_1) + \operatorname{Res}(f|z_2)\right)$$

erst untersuchen wir die Singularität von $\tan(z)$ $\longrightarrow$ Da die Singularitäten die Nullstellen von $\cos(z)$ sind $\left(\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}\right)$ und $\cos(z)$ NS. 1. Ordnung hat

$\Rightarrow$ $\tan(z)$ hat Singularität 1. Ordnung an der Stelle $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{Res}(f|\pi/2) = \lim_{z\to\pi/2}(z-\pi/2)\tan(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}(z-\pi/2)\frac{\sin(z)}{\cos(z)} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(z) + (z-\frac{\pi}{2})\cos(z)}{-\sin(z)} = -1$$

oder $\tan(z) = \dfrac{\sin(z) \to h(z)}{\cos(z) \to g(z)}$ h, g holomorph, $h(\pi/2) \neq 0$

$$\mathrm{Res}(f \mid \tfrac{\pi}{2}) = \frac{h(\pi/2)}{g'(\pi/2)} = \frac{\sin(\pi/2)}{-\sin(\pi/2)} = -1$$

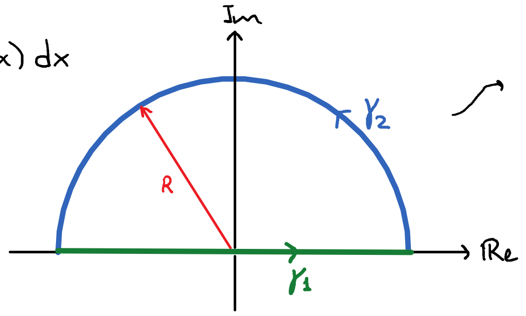
Wir haben also $\mathrm{Res}(f \mid \frac{\pi}{2}) = -1 \Rightarrow \mathrm{Res}(f \mid \frac{3\pi}{2}) = -1$

$\tan(z)$ ist periodisch $\Rightarrow$ alle Sing. haben identische Eigenschaften

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f \mid z_1) + \mathrm{Res}(f \mid z_2)) = 2\pi i\,(-1-1) = \underline{-4\pi i}$$

2. Uneigentliche Integrale

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$



$\nearrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ist gerade $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ für $R \to \infty$

$\downarrow$

$\left[\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \right]$

$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$

→ Wir betrachten $\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

Was wir suchen mit $R \to \infty$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(R\cdot e^{it}) \cdot Rie^{it}\,dt$$

(Parametrisierung → Halbkreis: Re^{it} für $t\,[0,\pi]$)

Falls $f(z) = \mathcal{O}(z^{-2}) \Rightarrow f(R\cdot e^{it}) = \mathcal{O}(R^{-2})$ → e^{it} spielt keine Rolle, da $|e^{it}| = 1$ ($|Re^{it}| = R$)

$\Rightarrow f(R\cdot e^{it}) \cdot Rie^{it} = \mathcal{O}(R^{-1})$

wenn wir jetzt das mit $R \to \infty$ betrachten $\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \underbrace{f(Re^{it}) \cdot Rie^{it}}_{\mathcal{O}(R^{-1})} = 0$

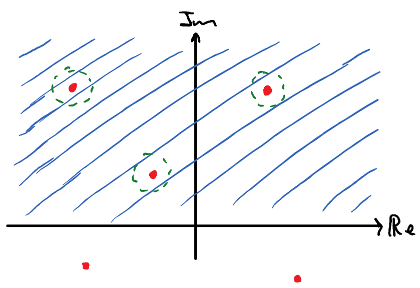
$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(Re^{it})\,Rie^{it}\,dt = \int_{\gamma_2} 0\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}_{0} = \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}$$

→ Wenn wir uneigentliche Integrale mit $f(x) = \mathcal{O}(x^{-2})$ berechnen wollen, können wir Residuensatz für den oberen Teil der Re-Achse anwenden ($\text{Im} \geq 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} \geq 0} \text{Res}(f \mid z_i)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \to$



[nur die mit ◌ markierte Singularitäten werden in $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ betrachtet (weil sie $\text{Im} \geq 0$ erfüllen)]