Theorie

1. Fourier-Reihen

1.1 Periode

→ Eine Funktion heisst periodisch, falls

$$\exists p > 0, \text{ sodass } f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

p heisst Periode von f (die kleinste Periode heisst Fundamentalperiode)

1.2 Gerade/ungerade Fortsetzung

→ Manchmal wollen wir Funktionen im Intervall $[0, L]$ periodisch fortsetzen.

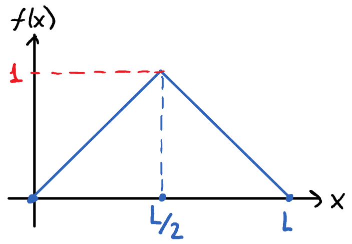
$f(x)$ = Stückweise-Funktion (Im Intervall $[0,L]$)

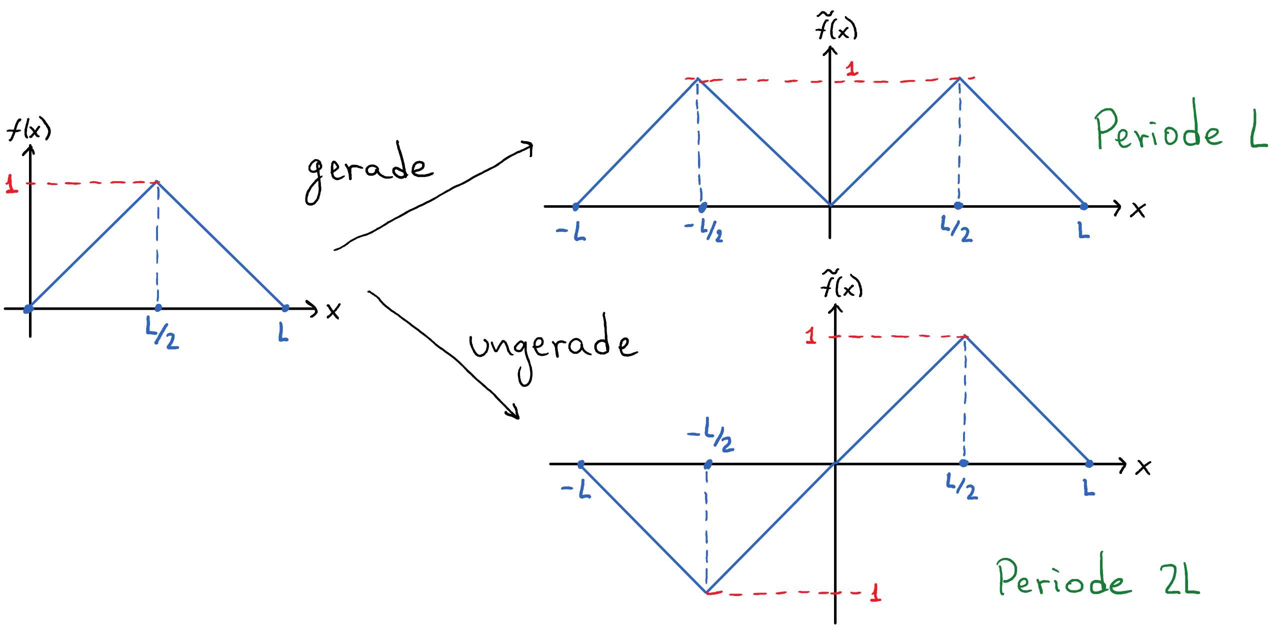
$\tilde{f}(x)$ = periodische Fortsetzung von $f(x)$ (Im Intervall $]-\infty, \infty[$)

- Gerade Fortsetzung von $f(x)$ ⇒ $\tilde{f}(x)$ ist gerade $\left(\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x)\right)$
- Ungerade Fortsetzung von $f(x)$ ⇒ $\tilde{f}(x)$ ist ungerade $\left(\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x)\right)$

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{L}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2}{L}(L-x), & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \rightarrow$$





1.3 Fourier-Reihen

→ Darstellung von periodische Funktionen durch trigonometrische Funktionen ($\cos(x)$, $\sin(x)$)

→ Ein trigonometrisches Polynom mit Grad N ist eine Linearkombination von trigonometrische Funktionen:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \quad \text{oder} \quad \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$$

→ Die Reihen mit Grenzen ∞ ($N \to \infty$) heissen trigonometrische oder Fourier-Reihen (Sie haben Periode 2π)

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \quad (k \geq 0)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \quad (k \geq 1)$$

→ Für T-periodische Funktionen f gilt

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{\frac{2\pi ikt}{T}}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-\frac{2\pi ikx}{T}}\, dx \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx \quad (k \geq 0)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx \quad (k \geq 1)$$

→ Eigenschaften

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, g(x)\, dx$ mit $\begin{cases} f(-x) = f(x) & \text{(gerade)} \\ g(-x) = -g(x) & \text{(ungerade)} \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, g(x) = 0$

- Symmetrisches Integrieren (von $-a$ bis a für $a \in \mathbb{R}$) einer ungeraden und geraden Funktion ist immer Null

(2) $\cos(x)$ ist eine gerade Funktion $[\cos(-x) = \cos(x)]$
$\sin(x)$ ist eine ungerade Funktion $[\sin(-x) = -\sin(x)]$

(3)

$\left.\begin{array}{l} g(x) \text{ gerade} \\ u(x) \text{ ungerade} \end{array}\right\}$

- $g(x)\cdot u(x)$ ist ungerade
- $g(x)\cdot g(x)$ und $u(x)\cdot u(x)$ sind gerade
- $\int_{-a}^{a} u(x)\,dx = 0$
- $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$

(4) Für die Fourier-Koeffizienten gilt also

<u>$f(x)$ gerade</u> $(f(-x) = f(x))$

$$b_k = 0 \quad \forall k$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right)dx$$

<u>$f(x)$ ungerade</u> $(f(-x) = -f(x))$

$$a_k = 0 \quad \forall k$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi k x}{T}\right)dx$$

→ Umformeln (komplex ⟷ reell)

$a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = i(c_k - c_{-k})$ für $k > 0$

$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ und $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ für $k > 0$