Tipps - Serie 4

Aufgabe 1

→ MATLAB Template

Aufgabe 2

→ Satz von Cauchy

Aufgabe 3

γ geschlossen

→ Wie in der Theorie ⇒ Falls $\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall \gamma \in U$ und f holomorph in U

⇒ f besitzt eine Stammfunktion in U

a. $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Betrachte $n \neq -1$ und $n = -1$. Ist f in U holomorph? Ist auch $\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall \gamma \in U$? [$\int_\gamma z^n\,dz$ mit $z = 0 \in A(\gamma)$ habt ihr in Serie 3, Aufgabe 8 gelöst]

b. $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Gleich wie a.

c. $g(z) := e^{\ell(z)} = z$. Nehmen wir mal an, dass $\ell(z)$ holomorph ist ⇒ Wir können $g(z)$ und $\ell(z)$ ableiten. Finde $g'(z)$ und verwende auch $g(z) = e^{\ell(z)} = z$ und die Kettenregel. Ihr bekommt eine Gleichung für $\ell'(z)$. Hat $\ell'(z)$ eine Stammfunktion? (Ihr müsst zeigen, dass $\ell'(z)$ keine Stammfunktion hat → verwende Teilaufgaben a, b)

Aufgabe 4

→ Vorlesung ⇝ f holomorph ⇒ $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x,y)$ eine Gleichung einsetzen

f holomorph ⇒ Cauchy-Riemann Gleichungen sind erfüllt

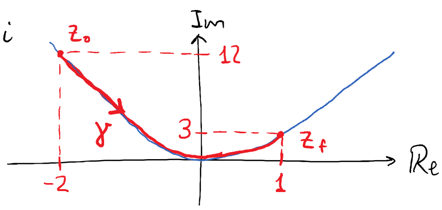
→ Cauchy-Riemann Gleichungen verwenden $g(z) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)}_{\tilde{u}(x,y)} - i \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)}_{\tilde{v}(x,y)}$ u, v Funktionen von g

Aufgabe 5

Beispiel: $y = 3x^2$ Parametrisiere es von $z_0 = -2 + 12i$ bis $z_f = 1 + 3i$

$y = \mathrm{Im}\{z\}$, $x = \mathrm{Re}\{z\}$

⇒ $\gamma(t) = \underbrace{3t^2}_{y} i + \underbrace{t}_{x}$, $t \in [-2, 1]$ $[\gamma(-2) = z_0,\ \gamma(1) = z_f]$



Für Homotopie verwenden wir normalerweise $t \in [0,1]$ für Parametrisierungen

muss aber nicht unbedingt so sein

⇒ Anpassen von $\gamma(t)$

⇒ $\gamma(t) = 3(3t-2)^2 + 3t - 2$, $t \in [0,1]$

→ y^2 ⇝ $y = \pm\sqrt{\ldots}$ ⇒ 2 Parametrisierungen sind nötig $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ → $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [c,d] \end{cases}$

Finde eine Funktion $H(s,t)$ wobei $H(0,t) = \gamma(t)$, $H(1,t) = \delta(t)$ $[H(s,t) = s\,\delta(t) + (s-1)\gamma(t)]$

Jetzt muss man nur zeigen, dass $H(s,t)$ stetig ist (Bedingung für Homotopie)