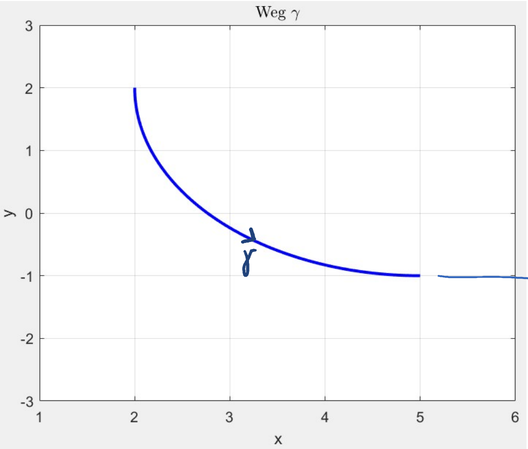
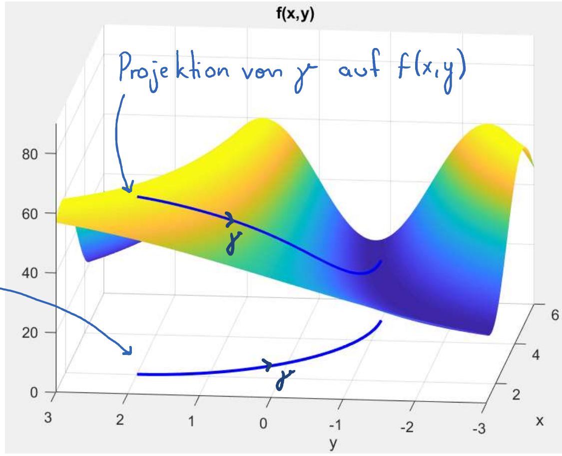
Wegintegrale

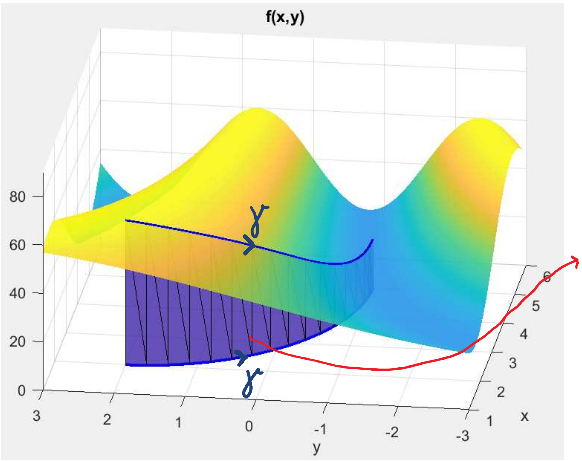
→ Komplexe Integrale können wegen der Mehrdimensionalität schwer verständlich sein
 • Ich versuche hier eine graphische Interpretation der komplexen Integrale zu geben

→ Betrachte erst folgende Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einen Integrationsweg γ





→ Wenn wir $f(x,y)$ über γ integrieren, berechnen wir effektiv die Fläche:



$$\int_\gamma f(x,y)\, ds$$

„$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$"

 • Für Funktionen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist es analog, aber da können wir nicht diese Fläche direkt „sehen". Dafür bräuchte man 4 Dimensionen.

 • Was man machen kann, ist Realteil und Imaginärteil separat zu integrieren

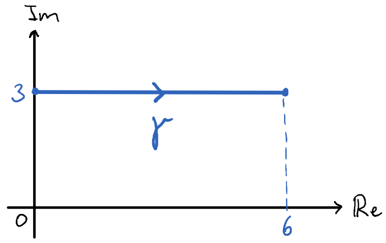
$$f(z) = \mathrm{Re}\{f(z)\} + i\,\mathrm{Im}\{f(z)\} = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma u(x,y)\, ds + i \int_\gamma v(x,y)\, ds$$

→ Da u und v Funktionen von $\mathbb{C}$ (= „$\mathbb{R}^2$") $\longrightarrow \mathbb{R}$ sind, können wir sie in 3 Dimensionen graphisch darstellen → Wie wir es in Serie 2, Aufgabe 7 gemacht haben

[Siehe Beispiel auf der nächsten Seite]

<u>Beispiel:</u> Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Finde $\int_\gamma f(z)\,dz$

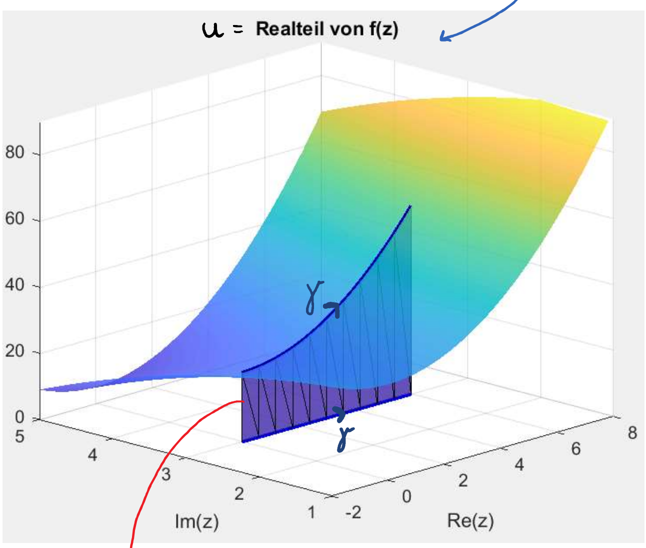


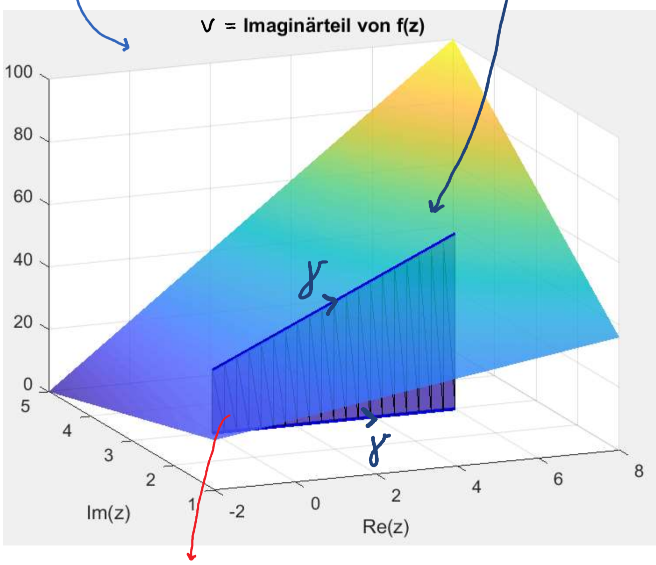
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u(x,y) + i v(x,y)\,dz = \int_\gamma u(x,y)\,dz + i \int_\gamma v(x,y)\,dz$$

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \operatorname{Re}\{f(z)\}\,dz + i \int_\gamma \operatorname{Im}\{f(z)\}\,dz$$

Projektion von γ auf $v(x,y)$





[Linienintegral]

$$\int_\gamma \operatorname{Re}\{f(z)\}dz = \int_\gamma u(x,y)\,ds$$
$$= \int_0^1 u(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 [(6t)^2 - 3^2]\sqrt{6^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 216t^2 - 54\,dt = \underline{18}$$

Parametrisierung von γ

$x(t) := 6t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 6$

$y(t) := 3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$

$$\int_\gamma \operatorname{Im}\{f(z)\}\,dz = \int_\gamma v(x,y)\,ds$$
$$= \int_0^1 v(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 2 \cdot 6t \cdot 3 \cdot \sqrt{6^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 216t\,dt = \underline{108}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 18 + \underline{i \cdot 108}$$

→ Die Mathematik müsst ihr nicht verstehen, da wir in Komplexe Analysis diese Methode nicht verwenden werden (das kommt später in Analysis).

→ Die Idee ist eigentlich die graphische Darstellung eines Wegintegrals zu zeigen. Für $f(z) \in \mathbb{C}$ ist also $\int_\gamma f(z)\,dz$ einfach das Integral von Realteil und Imaginärteil über γ, was diese Fläche entspricht

$$\underbrace{\text{„}\forall z \in \gamma \rightsquigarrow f(z) = z^2 \longrightarrow \Sigma\text{“}}_{\int_\gamma f(z)\,dz}$$

→ Die Methode die wir in Komplexe Analysis verwenden ($\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$) ist eine elegantere und einfachere Variante, da wir Realteil und Imaginärteil zusammen integrieren (es ist nicht nötig Realteil und Imaginärteil separat zu betrachten/integrieren) → Deswegen ist es auch in diesem Fall schwierig sich die „Bedeutung" von $\int_\gamma f(z)dz$ vorzustellen

→ Man sollte komplexe Integrale mit Parametrisierung und nicht mittels Aufteilen in Real- und Imaginärteil lösen