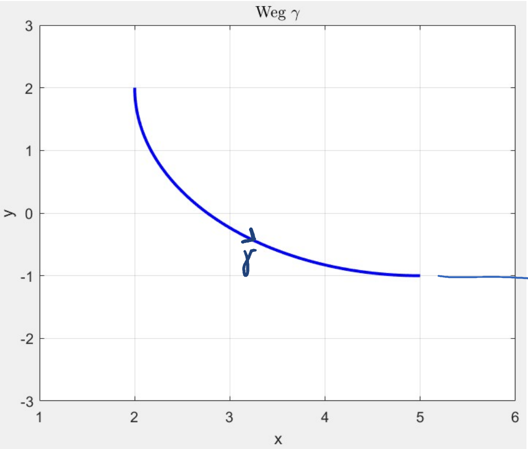
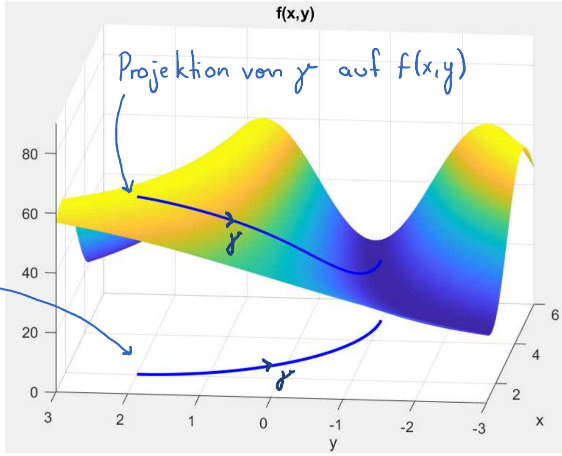
Kurvenintegrale - eine graphische Interpretation

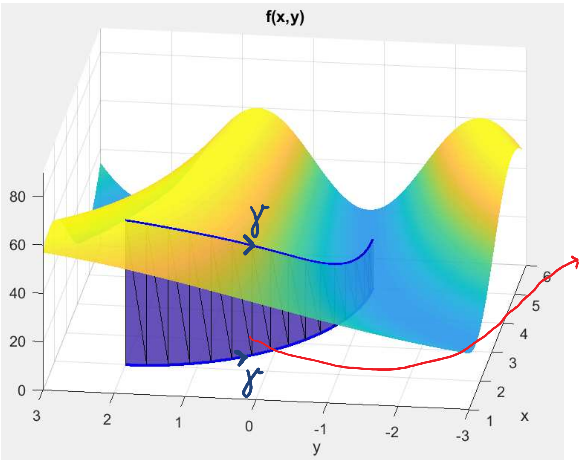
→ Komplexe Integrale können wegen der Mehrdimensionalität schwer verständlich sein
- Ich versuche hier eine graphische Interpretation der komplexen Integrale zu geben

→ Betrachte erst folgende Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einen Integrationsweg γ





→ Wenn wir $f(x,y)$ über γ integrieren, berechnen wir effektiv die Fläche:



$$\int_\gamma f(x,y)\, ds$$

„$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$"

- Für Funktionen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist es analog, aber da können wir nicht diese Fläche direkt „sehen". Dafür bräuchte man 4 Dimensionen.
- Was man machen kann, ist Realteil und Imaginärteil separat zu integrieren

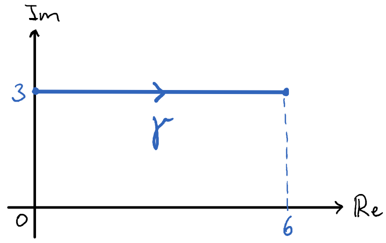
$$f(z) = \mathbb{R}e\{f(z)\} + i\, \mathrm{Im}\{f(z)\} = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma u(x,y)\, ds + i \int_\gamma v(x,y)\, ds$$

→ Da u und v Funktionen von $\mathbb{C}$ (= „$\mathbb{R}^2$") $\to \mathbb{R}$ sind, können wir sie in 3 Dimensionen graphisch darstellen

[Siehe Beispiel auf der nächsten Seite]

Beispiel: Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Finde $\int_\gamma f(z)\,dz$



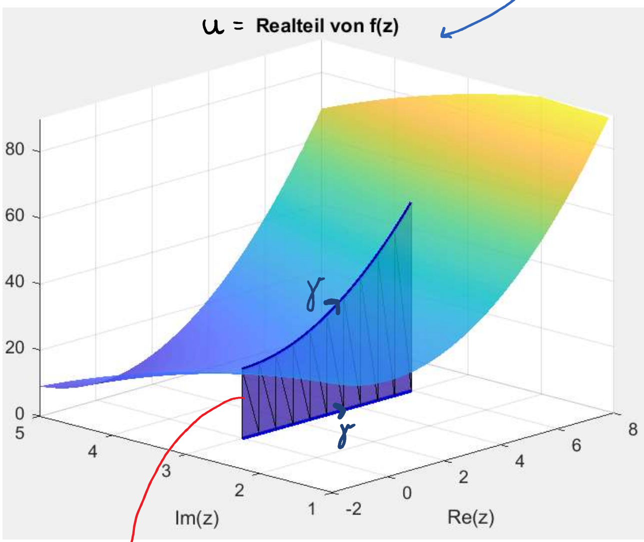
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u(x,y) + i v(x,y)\,dz$$

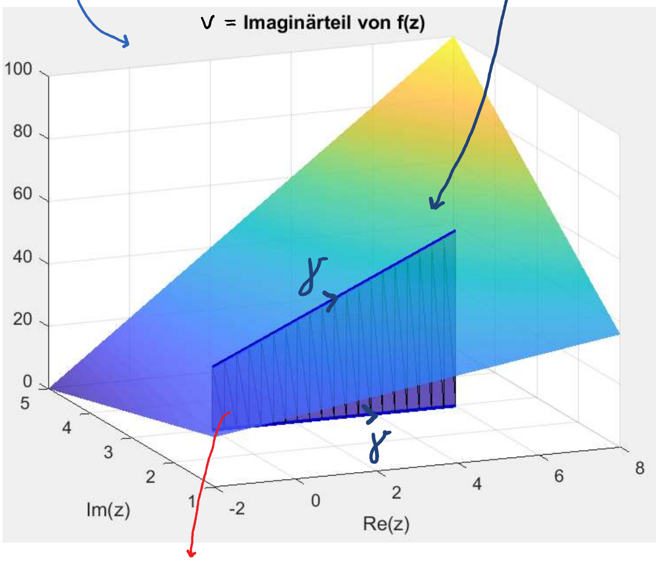
$$= \int_\gamma u(x,y)\,dz + i \int_\gamma v(x,y)\,dz$$

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_\gamma \operatorname{Re}\{f(z)\}\,dz}_{} + i \underbrace{\int_\gamma \operatorname{Im}\{f(z)\}\,dz}_{}$$

Projektion von γ auf $v(x,y)$





$$\int_\gamma \operatorname{Re}\{f(z)\}\,dz = \int_\gamma u(x,y)\,ds$$

$$= \int_0^1 u(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[(6t)^2 - 3^2\right]\sqrt{6^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 216t^2 - 54\,dt = \underline{18}$$

[Linienintegral]

Parametrisierung von γ

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) := 6t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 6 \\ y(t) := 3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0 \end{array}}$$

$$\int_\gamma \operatorname{Im}\{f(z)\}\,dz = \int_\gamma v(x,y)\,ds$$

$$= \int_0^1 v(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 2 \cdot 6t \cdot 3 \cdot \sqrt{6^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 216t\,dt = \underline{108}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 18 + i \cdot \underline{108}$$

→ Die Mathematik müsst ihr nicht verstehen, da wir in Komplexe Analysis diese Methode nicht verwenden werden (das kommt später in Analysis).

→ Die Idee ist eigentlich die graphische Darstellung eines Wegintegrals zu zeigen. Für $f(z) \in \mathbb{C}$ ist also $\int_\gamma f(z)\,dz$ einfach das Integral von Realteil und Imaginärteil über γ, was diese Fläche entspricht

$$\underbrace{\text{„}\forall z \in \gamma \rightsquigarrow f(z) = z^2 \longrightarrow \Sigma\text{“}}_{\int_\gamma f(z)\,dz}$$

→ Die Methode die wir in Komplexe Analysis verwenden ($\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)dt$) ist eine elegantere und einfachere Variante, da wir Realteil und Imaginärteil zusammen integrieren (es ist nicht nötig Realteil und Imaginärteil separat zu betrachten/integrieren) → Deswegen ist es auch in diesem Fall schwierig sich die „Bedeutung" von $\int_\gamma f(z)dz$ vorzustellen

→ Man sollte komplexe Integrale mit Parametrisierung und nicht mittels Aufteilen in Real- und Imaginärteil lösen

2. Mengen

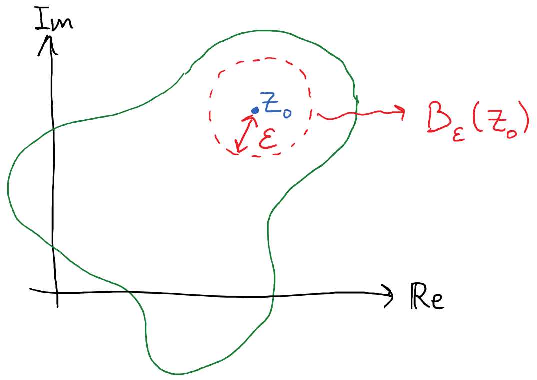
→ Teilmengen von $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \ldots$ können verschiedene Eigenschaften haben. Diese Eigenschaften können uns sagen, wie bestimmte Abbildungen oder komplexe Integrale, zum Beispiel, sich verhalten werden. Hier werden wir grundsätzlich 4 Eigenschaften betrachten:

i. Offen

in $\mathbb{R}$: $U \subset \mathbb{R}$ heisst offen, falls $\forall x \in U \; \exists \; \varepsilon > 0$ s.d. $x + \varepsilon \in U$

in $\mathbb{C}$: $U \subset \mathbb{C}$ heisst offen, falls $\forall z \in U \; \exists \; B_{\varepsilon>0}(z)$ s.d. $B_{\varepsilon>0}(z) \in U$, wobei

$$B_{\varepsilon>0}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$$

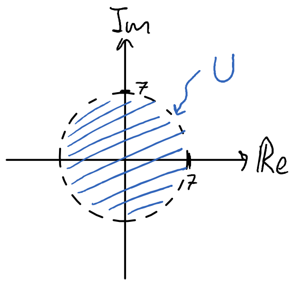


Beispiel: $U \subset \mathbb{R}$, $U :=]-\infty, 1]$
für Werte $x \in U$ mit $x \to -\infty$ ist es klar, dasses offen ist. Für $x \to 1$ können wir auch unendlich nahe entfernt sein (Abstand kann unendlich klein sein, dass heisst, wir können immer näher dran kommen ($\varepsilon > 0$) ohne die Grenze zu überschreiten ($\Rightarrow x + \varepsilon > 0$ ist immer noch in U))
↳ $0.99999\ldots + 10^{-999\ldots} \in U$

Beispiel: $U \subset \mathbb{R}$, $U :=]-\infty, 1]$
für $x \to -\infty$ ist es offen, aber für $x \to 1$ ist es nicht offen, weil $1 \in U$ und $1 +$ irgend eine Zahl grösser als Null ist dann nicht mehr in U.
Hier haben wir eine Mischung von offen und nicht offen. U ist also nicht offen (Schau mal die Definition von offen: $\forall x \in U \ldots$)
↑
!

Beispiel: $B_7(0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 7 \}$ ist offen

$\forall z \in B_7(0) \; \exists \; B_{\varepsilon>0}(z)$ s.d. $B_{\varepsilon>0}(z) \in B_7(0)$



<u>Beispiel:</u> $U := \mathbb{C}$, U ist offen

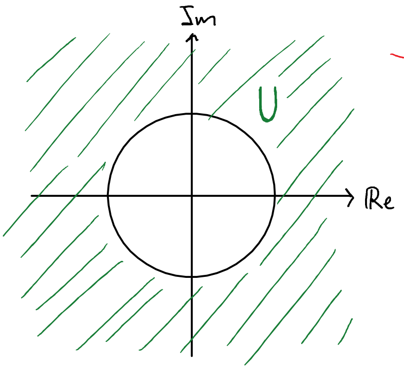
<u>Beispiel:</u> $U := \emptyset = \{\}$, U ist offen (kein $z \Rightarrow \forall z$ erfüllt)

ii. **Abgeschlossen:** $U \subset \mathbb{C}$ heisst abgeschlossen, falls $\mathbb{C} \setminus U$ offen ist

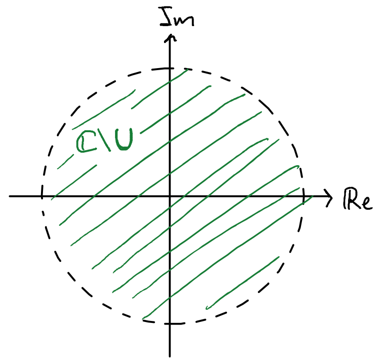
↳ Komplementärmenge einer offenen Menge

<u>Beispiel:</u> $U \subset \mathbb{C}$, $U := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 3 \}$

$\mathbb{C} \setminus U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3 \} = B_3(0)$ ⇝ $B_R(z_0)$ ist immer offen, also ist U abgeschlossen



⟶ für $z \in U$ ist U für $r \to \infty$ (also in Polarform) offen aber für $r \to 3$ nicht offen $\Rightarrow$ U ist nicht offen



$\mathbb{C} \setminus U$ ist offen

<u>Beispiel:</u> $U := \mathbb{C}$

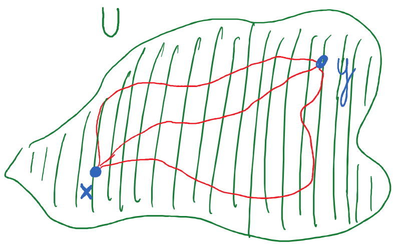
U ist offen (Bedingung für alle $z \in U = \mathbb{C}$ erfüllt. Da U die ganze komplexe Ebene entspricht, sind alle mögliche z in U)

$U \setminus \mathbb{C} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C} = \emptyset = \{\}$. Wie wir schon gesehen haben, ist die leere Menge offen. $\Rightarrow$ U ist abgeschlossen

$\mathbb{C}$ ist offen und abgeschlossen

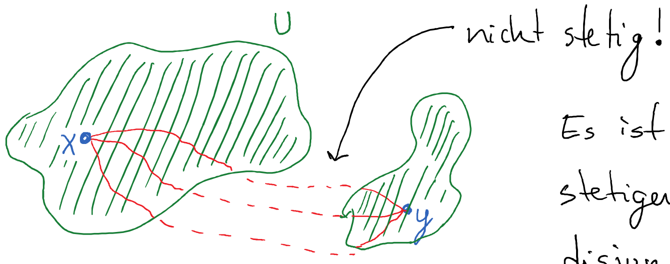
⚠ Wenn eine Menge Halboffen (↱ manchmal offen, manchmal nicht) ist (also eine Mischung wie bei $]3, 2]$, zum Beispiel), dann sagen wir einfach, dass die Menge nicht offen ist (offen nur falls Bedingung für $\forall z$ erfüllt ist!) Gleich für abgeschlossen: Falls $\mathbb{C} \setminus U$ offen ist, dann ist U abgeschlossen. Aber falls $\mathbb{C} \setminus U$ manchmal offen und manchmal nicht offen ist, dann ist U nicht abgeschlossen

iii. **Wegzusammenhängend**: für jedes Paar x, y $(x, y \in U)$ gibt es einen <u>stetigen</u> Weg von x nach y.



Wegzusammenhängend

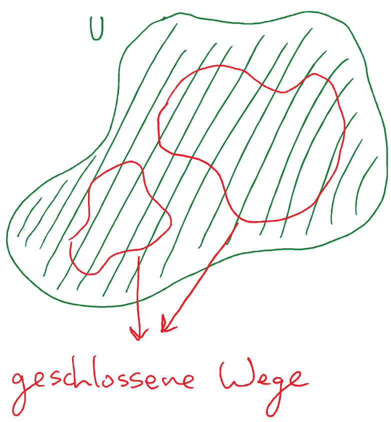
Für alle Paare x, y $(x, y \in U \subset \mathbb{C})$ existiert ein Weg, die die beiden verknüpft und <u>komplett</u> in U liegt



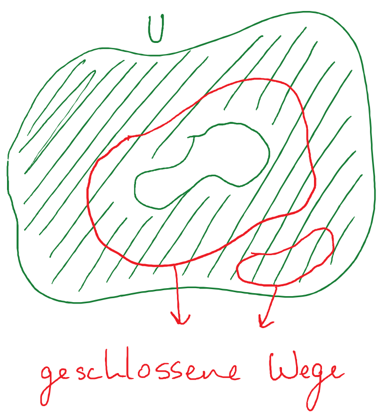
nicht wegzusammenhängend

Es ist unmöglich x und y durch einen stetigen Weg zu verknüpfen. Generell sind <u>disjunkte</u> Mengen nicht wegzusammenhängend
↳ $A, B \subset \mathbb{C}$, $A \cap B = \emptyset$

iv. **Einfach zusammenhängend**: Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend, falls sie wegzusammenhängend <u>und</u> Nullhomotop ist. Nullhomotop heisst, dass „bei geschlossene Wege nur Elemente von U enthalten sind (in die geschlossene Fläche)".
↳ stetig

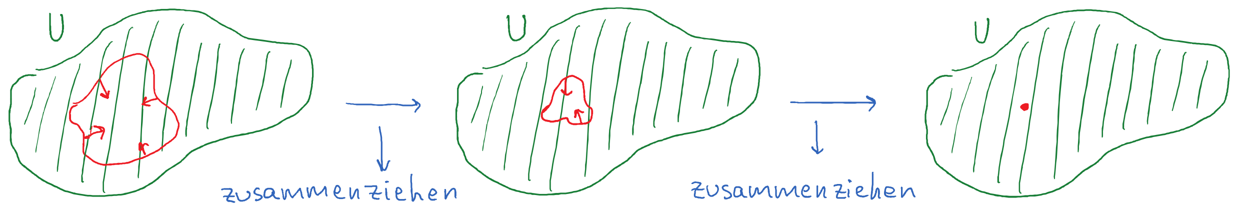


Für alle geschlossene Wege ist die innere Fläche vom Weg in U
⇒ einfach zusammenhängend

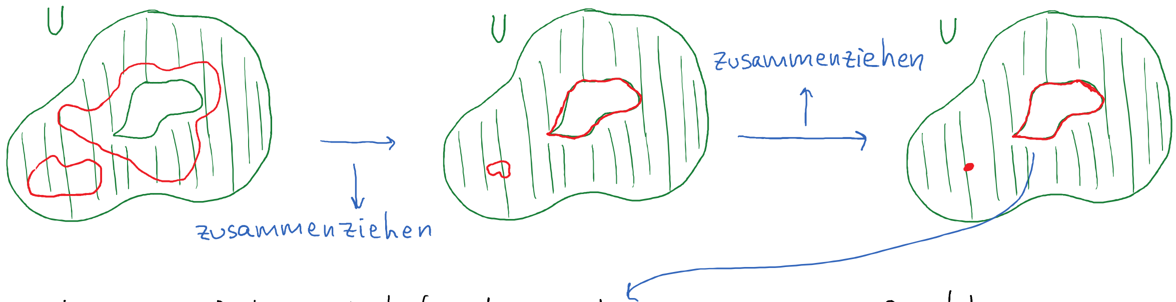


Für gewisse Wege ist die innere Fläche nicht ganz in U
⇒ nicht einfach zusammenhängend

→ Nullhomotopie kann auch wie folgt interpretiert werden: jeder geschlossene Weg lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen



Wir ziehen den Weg zusammen und schauen, ob es möglich ist, es zu einen Punkt transformieren. Hier ist es für alle geschlossene Wege möglich und deshalb ist U auch einfach zusammenhängend



Hier ist es nicht möglich den Weg zu einen Punkt zusammenziehen, weil sonst der Weg nicht in U ist (ein Weg ist nichts anderes als die Zusammensetzung von verschiedenen Punkten $z_i \in U$. Also müssen Wege, egal ob geschlossen oder nicht, immer in U sein). Hier wäre also U nicht einfach zusammenhängend