Theorie

1. Fourierreihe

→ Satz von Parseval: Sei f eine 2π-periodische reellwertige Funktion. Dann gilt:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)}$$

Beispiel: Berechne $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ mit dem Satz von Parseval und die Fourierreihe von $f(t) := t,\ t\in[0,2\pi]$ [Serie 9, A4a]

→ In Serie 9 A4a haben wir gesehen, dass $C_n = \begin{cases}\pi, & n=0\\ \frac{i}{n}, & \text{sonst}\end{cases}$

1. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left|\frac{i}{n}\right|^2 + C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i}{n}\right|^2 = \pi^2 + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ [da $|C_{-n}|^2 = |C_n|^2$]

2. $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{2^{\cancel{3}\,2}\pi^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{2\pi}\cdot 3} = \frac{4}{3}\pi^2$$

Parseval $\Rightarrow$ $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi^2 = \pi^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3\cdot 2}\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} = \underline{\frac{\pi^2}{6}}$$

2. Fouriertransformation

$$\boxed{\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt}$$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega}$$

→ Eigenschaften

1. $\mathcal{F}\{f(t)+g(t)\} = \hat{f}(\omega)+\hat{g}(\omega)$
2. $\mathcal{F}\{f(t)\cdot g(t)\} = \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)$ [Faltung]
3. $\mathcal{F}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = i\omega\hat{f}(\omega)$
4. $\mathcal{F}\{t f(t)\} = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$
5. $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$

→ Satz von Plancherel

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega}$$

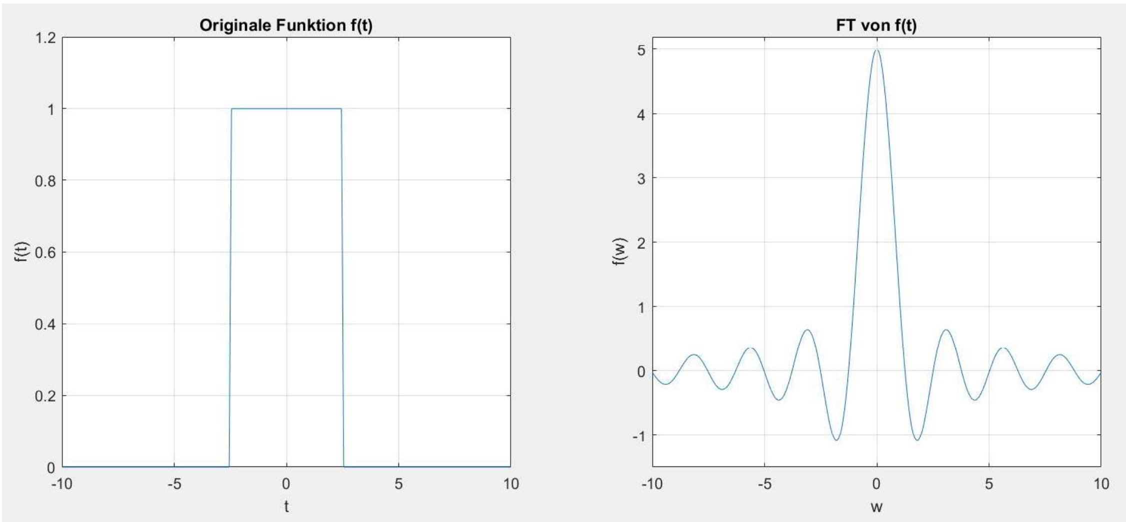
Beispiel: Finde die Fouriertransformation $\hat{f}(\omega)$ von $f(t) = \begin{cases} 1, & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{T/2}^{T/2} e^{-i\omega t}\, dt = \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t}\right]_{-T/2}^{T/2} = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega T/2} + \frac{1}{i\omega} e^{i\omega T/2}$$

$$= \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$\left[\operatorname{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}\right]$$

[T = 5]



Beispiel: Berechne $\mathcal{F}\{t^2 f''(t)\}(\omega)$ in Abhängigkeit von $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$

$$\mathcal{F}\{t^2 f''(t)\}(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}\{t f''(t)\}(\omega) = i^2 \frac{d}{d\omega}\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}\{f''(t)\}(\omega)$$

$$= -\frac{d^2}{d\omega^2}\, i\omega\, \mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = -\frac{d^2}{d\omega}(i\omega)^2\, \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$$

$$= \frac{d^2}{d\omega^2}\left[\omega^2 \hat{f}(\omega)\right]$$