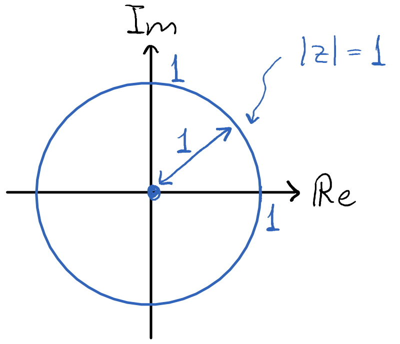
Theorie

1. Integrale mit $e^{\cdot it}$, $\cos(\cdot t)$, $\sin(\cdot t)$

Mit der Parametrisierung eines Kreises mit Radius 1 und Mittelpunkt $z=0$ ($\Rightarrow \gamma(t) = e^{\frac{2\pi}{T}it}$, $t \in [0,T]$) können wir reelle Integrale wieder auf komplexwertige Integrale bringen (mit Hilfe einer „Rückparametrisierung"). Generell gilt:

$$\boxed{\int_{Tm+c}^{Tl+c} f\left(e^{\frac{2\pi}{T}it}\right) dt = (l-m) \int_{|z|=1} f(z) \frac{T}{2\pi i z}\, dz}$$



$l, m \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$

→ Für $\cos(\cdot t)$, $\sin(\cdot t)$ $\Rightarrow \cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$

→ Das geht natürlich nur für Funktionen die nur $e^{\cdot it}$ enthalten, wobei alle Exponentialfunktion die gleiche Periode haben.

→ Variablenwechsel mit $z = e^{\frac{2\pi}{T}it}$

$$\int_{mT}^{lT} f\left(e^{\frac{2\pi}{T}it}\right) dt = (l-m) \int_{|z|=1} f(z) \frac{T}{2\pi i z}\, dz$$

→ Parametrisierung eines Kreises

- **Grenzen:** Das Laufen von $e^{\frac{2\pi}{T}it}$ von mT bis lT entspricht gerade $(l-m)$ Umdrehungen um den Einheitskreis (ganze Umdrehungen)
- **Integrationsvariable:** Wir haben $z = e^{\frac{2\pi}{T}it}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2\pi i}{T} e^{\frac{2\pi}{T}it} = \frac{2\pi i z}{T} \Rightarrow dt = \frac{T}{2\pi i z}$$

$$\Rightarrow \int_{mT}^{lT} f\left(e^{\frac{2\pi}{T}it}\right) dt = (l-m) \int_{|z|=1} f(z) \frac{T}{2\pi i z}\, dz, \quad l, m \in \mathbb{Z}$$

∎

Beispiel: Berechne $\int_0^{4\pi} \frac{e^{it}}{1+2e^{it}}\,dt$

- Funktion enthält nur Exponentialfunktionen mit Periode 2π
- Variablentransformation: $z := e^{it}$
- Neue Grenzen: $t \in [0, 4\pi]$ für e^{it} entspricht gerade 2 Umdrehungen um den Einheitskreis
- $\frac{dz}{dt} = ie^{it} = iz \Rightarrow dt = \frac{1}{iz}$

$$\Rightarrow \int_0^{4\pi} \frac{e^{it}}{1+2e^{it}}\,dt = \int_{2\times|z|=1} \frac{\cancel{z}}{1+2z} \cdot \frac{1}{i\cancel{z}}\,dz = 2\int_{|z|=1} \frac{1}{1+2z}\,\frac{1}{i}\,dz = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{1+2z}\,dz$$

- Integrationsweg: Einheitskreis
- Singularitäten: einfache Polstelle an der Stelle $z = -\frac{1}{2} \in A(\gamma)$ Einheitskreis

$$g(z) := \frac{1}{1+2z} \rightsquigarrow \operatorname{Res}(g \mid z=-\tfrac{1}{2}) = \lim_{z\to-\frac{1}{2}} (z+\tfrac{1}{2})\frac{1}{1+2z} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=1} \frac{1}{1+2z}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g \mid z=-\tfrac{1}{2}) = \cancel{2}\pi i \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \pi i$$

$$\Rightarrow \int_0^{4\pi} \frac{e^{it}}{1+2e^{it}}\,dt = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{1+2z}\,dz = \frac{2}{i}\cdot\pi i = \boxed{2\pi}$$