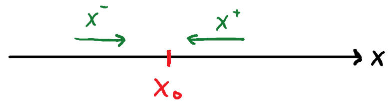
1. Limes in $\mathbb{C}$

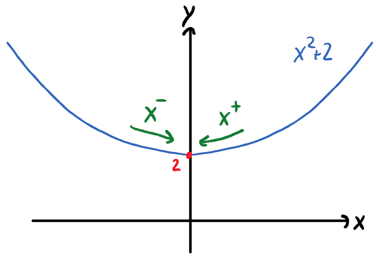
→ Der Limes einer Funktion in $\mathbb{R}$ ist relativ trivial, da man nur die Konvergenz von zwei Richtungen zeigen muss (von $-x$ und $+x$ Richtung)

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, falls $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ⇝



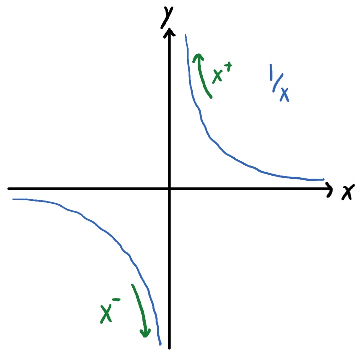
<u>Beispiel:</u> $\lim_{x\to 0} (x^2+2) = 2$

$\lim_{x\to 0^-} (x^2+2) = 2 \qquad \lim_{x\to 0^+} (x^2+2)$

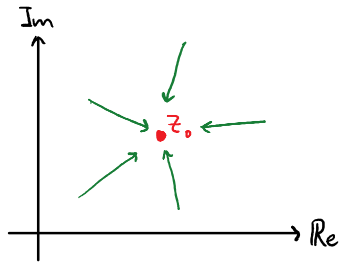


<u>Beispiel:</u> $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$



→ In $\mathbb{C}$ ist es komplizierter, da wir etwas zweidimensionales haben (wir können von unendlich verschiedenen Richtungen zu Punkt z_0 „konvergieren")

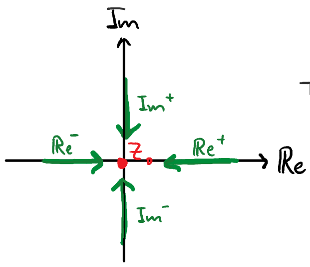


Damit der Limes existiert, müssen <u>alle</u> möglichen <u>Kurven</u> zur gleichen Abbildung von f konvergieren (wenn die Kurve nach z_0 geht)

→ Tipps für Limes Berechnung

1. <u>Widerspruch</u>

i. Betrachte den Limes für etwas rein Reelles oder rein Imaginäres (also 4 Richtungen). Sie sollten alle gleich sein (weil es von der Richtung unabhängig sein sollte)



für $z_0 = 0$ $\begin{cases} \text{rein reell} \rightsquigarrow z = x \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \\ \text{rein imaginär} \rightsquigarrow z = yi \Rightarrow \lim_{y\to 0} f(yi) \end{cases}$ Vergleichen mit

Es reicht zu zeigen, dass der Limes nicht existiert, aber falls jetzt $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to 0} f(iy)$ gibt es keine Aussage

<u>Beispiel:</u> $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}}$

rein reell $\quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$

rein imaginär $\quad \lim_{y\to 0} f(iy) = \lim_{y\to 0} \frac{i\cancel{y}}{-i\cancel{y}} = -1$

$\neq \Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ existiert nicht

(von wo wir zum Punkt konvergieren)

ü Da der Limes von der Richtung unabhängig sein soll, muss es auch unabhängig von θ sein, falls wir $|z|e^{i\arg(z)}$ in z einsetzen und $r\to 0$ gehen lassen

$\Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} f(re^{i\theta}) \rightsquigarrow$ Keine Aussage, falls es unabhängig von θ ist

$\Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} f(re^{i\theta}) \rightsquigarrow$ existiert nicht, falls es abhängig von θ ist

Beispiel: $\lim_{z\to 1+i} \log(z)$

$1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$$\lim_{z\to 1+i} \log(z) = \lim_{z\to 0} \log(1+i-z) \Rightarrow \lim_{r\to 0} \log(|1+i-re^{i\theta}|) + i\arg(1+i-re^{i\theta}) = \log(|1+i|) + i\cdot\arg(1+i) = \log(\sqrt{2}) + i\cdot\frac{\pi}{4}$$

unabhängig von θ $\Rightarrow$ Limes kann existieren $\to$ andere Methode verwenden

Beispiel: $\lim_{z\to 0} \log(z) - \log(|z|)$

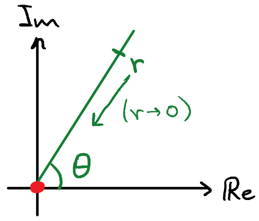
$[\log(z) = \log(|z|) + i\cdot\arg(z)]$

$$\lim_{z\to 0} \log(z) - \log(|z|) \Rightarrow \lim_{r\to 0} \log(re^{i\theta}) - \log(|re^{i\theta}|) = \lim_{r\to 0} \cancel{\log(|re^{i\theta}|)} + i\arg(re^{i\theta}) - \cancel{\log(|re^{i\theta}|)} = \lim_{r\to 0} i\cdot\overbrace{\arg(re^{i\theta})}^{\theta}$$

$= \lim_{r\to 0} i\cdot\theta \to$ Es ist abhängig von $\theta \Rightarrow \lim_{z\to 0} \log(z) - \log(|z|)$ existiert nicht!

- Warum ist es überhaupt möglich, dass $\lim_{z\to 0} f(z)$ nicht existiert, falls $\lim_{r\to 0} f(re^{i\theta})$ unabhängig von θ ist?

$\lim_{r\to 0} re^{i\theta}$ entspricht eine Gerade mit Winkel θ, wobei $re^{i\theta}$ zum Punkt $(0,0)$ konvergiert $\longrightarrow$



aber

Damit der Limes existiert, müssen alle möglichen Kurven zur gleichen Abbildung von f konvergieren (wenn die Kurve nach z_0 geht) $\to$ nicht nur Geraden

Beispiel: $\lim_{z\to 0} \frac{[\mathrm{Im}\{z\}]^2}{\mathrm{Re}\{z\}}$

eine nicht-lineare Kurve

$$\lim_{r\to 0} f(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin^2(\theta)}{r\cos(\theta)} = 0 \quad \text{aber} \quad \lim_{x\to 0} f(x^2+ix) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = +1$$

$\hookrightarrow$ unabhängig von θ aber $\neq 1 \Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z)$ existiert nicht

2. Limes Regeln

- $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = \lim_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim_{z\to z_0} g(z)$
- $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)}$

Vorsichtig! $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ etc.

- $\lim_{z\to z_0} f(z) \pm g(z) = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z)$

[nur gültig, falls $\lim_{z\to z_0} f(z)$ und $\lim_{z\to z_0} g(z)$ existieren]

3. Stetige Funktionen

- Falls eine Funktion $f(z)$ an der Stelle z_0 stetig ist, dann existiert auch der Limes $\lim_{z\to z_0} f(z)$
- Das ist nützlich, falls die Funktion die zusammensetzung von mehrere Funktionen ist.
- Mit „2. Limes Regeln" lässt sich vieles vereinfachen

- Das ist nützlich, falls die Funktion die Zusammensetzung von mehrere Funktionen ist.
- Mit „2. Limes Regeln" lässt sich vieles vereinfachen

Beispiel: $\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{2z+2}$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{2z+2} = \frac{\lim_{z\to 0} z^2}{\lim_{z\to 0} 2z+2}$$ → Polynome sind stetig an der Stelle $z=0$ → Beide Limes existieren

$$= \frac{0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{2z+2} = 0$$

• Polynome, trigonometrische Funktionen, log, e^z usw. sind in einer Umgebung um 0 stetig. Funktionen mit $\bar{z}$, $\mathrm{Re}\{z\}$, $\mathrm{Im}\{z\}$ generell nicht.

4. Trigonometrische Funktionen

• Betrachte die Taylorentwicklung

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \qquad e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{etc.}$$

Beispiel: $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z}$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \lim_{z\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}$$ → Polynome sind stetig an der Stelle $z=0$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!} = \lim_{z\to 0} \left[1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\right] = 1$$

Es ist einfach zu zeigen, dass ein Limes nicht existiert, aber sehr schwierig, dass er konvergiert.

2. Komplexe Funktion

→ Funktion $f: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto f(z)$

Beispiel: $f(z) = z^2$ $\quad z = x + yi$

$$\Rightarrow f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{Re\{f(z)\}} + \underbrace{(2xy)}_{Im\{f(z)\}} i$$

→ Wir können es auch als eine zweidimensionale Funktion betrachten (da $z = x + yi$)

$$f(z) = f(x+yi) = \tilde{f}(x,y) \qquad \left[\text{für } f(z) = z^2 \Rightarrow f(x+yi) = \tilde{f}(x,y) = x^2 - y^2 + 2xyi \right]$$

→ Abbildung in Re- bzw Im-Teil

$$\tilde{f}(x,y) = f(x+iy) = \underbrace{u(x,y)}_{Re\{\tilde{f} \text{ bzw } f\}} + i\underbrace{v(x,y)}_{Im\{\tilde{f} \text{ bzw } f\}}$$

→ Stetigkeit → f ist bei $z = z_0$ stetig, falls

(i) $f(z)$ ist bei $z = z_0$ definiert

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existiert und ist gleich $f(z_0)$ → $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \overset{!}{=} f(z_0)$

Beispiel: Ist $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z} - Im\{z\}}$ bei $z_0 = 0$ stetig?

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x - 0} = 1$$

$$\lim_{y \to 0} f(iy) = \lim_{y \to 0} \frac{iy}{-iy - iy} = -\frac{1}{2}$$

↯ Widerspruch ⇒ Nicht stetig!