Theorie

1. Komplexe Funktion

→ Funktion $f: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$

Beispiel: $f(z) = z^2$ $\quad z = x + yi$

$$\Rightarrow f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{\mathrm{Re}\{f(z)\}} + \underbrace{(2xy)}_{\mathrm{Im}\{f(z)\}} i$$

→ Wir können es auch als eine zweidimensionale Funktion betrachten (da $z = x + yi$)

$$f(z) = f(x+yi) = \tilde{f}(x,y) \qquad \left[\text{für } f(z) = z^2 \Rightarrow f(x+yi) = \tilde{f}(x,y) = x^2 - y^2 + 2xyi\right]$$

2. Cauchy-Riemannsche Gleichungen

→ Eine Funktion definiert auf $U \subset \mathbb{C}$ lässt sich als Funktion $\tilde{f}$ auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auffassen

$$\tilde{f}(x,y) = \underbrace{f(x+iy)}_{f(z)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

wobei $x = \mathrm{Re}\{z\}$, $y = \mathrm{Im}\{z\} \longrightarrow z = x + iy$

- $$\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(x+h, y) - \tilde{f}(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h} \qquad \text{! } h \in \mathbb{R}$$

  $= f'(x+iy)$, falls f komplex differenzierbar ist

  (Bem.: hier haben wir Differenzierbarkeit auf der Re-Achse definiert)

- $$\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(x, y+h) - \tilde{f}(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+i(y+h)) - f(x+iy)}{h}$$

  $$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+iy+ih) - f(x+iy)}{h} = i \lim_{h\to 0} \frac{f(x+iy+ih) - f(x+iy)}{ih}$$

  $= i f'(x+iy)$, falls f komplex differenzierbar ist

  (Bem.: hier haben wir Differenzierbarkeit auf der Im-Achse definiert)

Damit es jetzt generell differenzierbar ist, müssen diese zwei Ableitungen die gleiche sein:

$$\Rightarrow \boxed{i \frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+iy)}$$

→ Wenn wir jetzt auch die Abbildung in Re- bzw Im-Teil teilen, das heisst

$$\tilde{f}(x,y) = f(x+iy) = \underbrace{u(x,y)}_{\mathrm{Re}\{\tilde{f} \text{ bzw } f\}} + \underbrace{iv(x,y)}_{\mathrm{Im}\{\tilde{f} \text{ bzw } f\}}$$

Dann können wir zusätzliche Gleichungen finden

$$i\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+iy)$$

$$i\frac{\partial}{\partial x}(u(x,y) + iv(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(u(x,y) + i\,v(x,y))$$

$$i\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) + i\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)$$

Da $u(x,y)$ und $v(x,y)$ reell sind, müssen wir hier nur Re- bzw Im-Teil vergleichen (Koeffizientenvergleich)

Realteile $\Longrightarrow$

Imaginärteile $\Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x}u(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}v(x,y) \end{aligned}}$$

andere Schreibweise:

$$-v_x = u_y$$
$$u_x = v_y$$

→ **Theorem:** Eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph wenn die Cauchy-Riemannschen Gleichungen erfüllt sind

⚠ holomorph = komplex differenzierbar = analytisch

<u>Beispiel:</u> $f(z) = z^2$

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$i\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = i\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2xyi - y^2) = i(2x + 2yi) = 2xi - 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xyi - y^2) = 2xi - 2y \quad \overset{?}{=}$$

Ja, also ist $f(z) = z^2$ holomorph

<u>Beispiel:</u> $f(z) = \bar{z}$

$$f(x+iy) = x - iy$$

$$i\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = i\frac{\partial}{\partial x}(x-iy) = i$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y}(x-iy) = -i \quad \overset{?}{=}$$

Nein, also ist $f(z) = \bar{z}$ <u>nicht</u> holomorph

Beispiel: $f(z) = x^2 - x + 2xyi - yi - y^2$ für $z = x+iy$, $z \in \mathbb{C}$

wir versuchen es jetzt mit den anderen zwei Gleichungen (die mit Ableitungen von $u(x,y)$ und $v(x,y)$)

$$f(z) = (x^2 - x - y^2) + i(2xy - y) \rightsquigarrow \begin{array}{l} u(x,y) = \mathrm{Re}\{f(z)\} = x^2 - x - y^2 \\ v(x,y) = \mathrm{Im}\{f(z)\} = 2xy - y \end{array}$$

$$u_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - x - y^2) = 2x - 1 \qquad v_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - y) = 2y$$

$$u_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - x - y^2) = -2y \qquad v_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - y) = 2x - 1$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{i. Ist } u_x \overset{?}{=} v_y & \Rightarrow & 2x - 1 \overset{?}{=} 2x - 1 \\ \text{ii. Ist } u_y = -v_x & \Rightarrow & -2y \overset{?}{=} -2y \end{array}\right\}$$ Ja, also ist hier $f(z)$ holomorph

(Bem.: $x^2 - x + 2xyi - yi - y^2$ entspricht $(x+yi)^2 - (x+iy) = z^2 - z$. Also ist $f(z) = z^2 - z$ und Polynome sind <u>immer</u> holomorph)

3. Laplace Operator

→ Der Laplace-Operator (Δ) ist die Summe der zweifachen partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ nach allen Variablen.

→ Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ist der Laplace-Operator gegeben durch

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f$$

↳ $f = f(x_1, x_2, \dots x_n) \rightsquigarrow$ nur Abkürzung :)

$$\text{Notation: } \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)$$

→ Da wir hier in $\mathbb{C}$ sind, benutzen wir nur den zweidimensionalen Laplace-Operator

$$\Delta f(x+iy) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x+iy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x+iy)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Beispiel: $f(z) := z^2 - z$. Berechne $\Delta f(z)$

$$f(x+iy) = x^2 - x + 2xyi - yi - y^2$$

$$\begin{aligned} \Delta f(x+iy) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x+iy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x+iy) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - x + 2xyi - yi - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - x + 2xyi - yi - y^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2x - 1 + 2yi) + \frac{\partial}{\partial y}(2xi - i - 2y) = 2 - 2 = \underline{0} \end{aligned}$$

→ Theorem: Alle komplex differenzierbare Funktionen erfüllen $\Delta f(z) = 0$

$$\Delta f(x+iy) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x+iy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x+iy)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u(x,y) + i\,v(x,y)\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(u(x,y) + i\,v(x,y)\right)$$

Abkürzung

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x,y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) + i\,v(x,y)\right) \qquad (u = u(x,y),\ V = v(x,y))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} u}_{u_x = v_y} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y} u}_{u_y = -v_x} + i\left(\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} v}_{v_x = -u_y} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y} v}_{v_y = u_x}\right) \qquad (= \Delta u + \Delta v)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial}{\partial x} v\right) + i\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial}{\partial y} u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} u\right)$$

$$= \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} v - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} v}}_{0} + i\left(\underbrace{\cancel{-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} u}}_{0}\right) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= 0$$

$\blacksquare$

4. Ableitungen

→ Die Ableitung einer Funktion an der Stelle z_0 ist definiert als

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z+z_0) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{oder} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \quad \left[\begin{matrix} h \to 0 \\ \Rightarrow |h| \to 0 \end{matrix}\right] \quad !\ h \in \mathbb{C}$$

- Der Limes existiert, falls die Cauchy-Riemannsche Gleichungen erfüllt sind

→ Beispiel: $f(z) = z^3 + z^2 \longrightarrow f'(z) = 3z^2 + 2z$

Beispiel: $f(z) = e^z \rightsquigarrow f'(z) = e^z$

Beispiel: $f(z) = \bar{z} \longrightarrow \bar{z}$ erfüllt nicht die Cauchy-Riemannschen Gleichungen $\Rightarrow f'(z)$ existiert nicht

Beispiel: $\tilde{F}(x,y) = x^2 - y^2 + 3x + (2xy + 3y)i \longrightarrow$ wir wollen die Ableitung mit z ($f'(z)$) und nicht x,y

mit $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$$\Rightarrow f(z) = \tilde{f}(x,y) = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + 3\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\cdot\left(\frac{z-\bar{z}}{2\cancel{i}}\right)\cancel{i} + 3\left(\frac{z-\bar{z}}{2\cancel{i}}\right)\cancel{i}$$

$$= \frac{1}{4}\left(z^2 + \cancel{2z\bar{z}} + \cancel{\bar{z}^2}\right) + \frac{1}{4}\left(z^2 - \cancel{2z\bar{z}} + \cancel{\bar{z}^2}\right) + \frac{6}{4}\left(z + \cancel{\bar{z}}\right) + \frac{2}{4}\left(z^2 - \cancel{\bar{z}^2}\right) + \frac{6}{4}\left(z - \cancel{\bar{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{6}{4}z + \frac{2}{4}z^2 + \frac{6}{4}z$$

$$= z^2 + 3z$$

$$\Rightarrow f'(z) = 2z + 3$$

- Man kann es natürlich auch mit $f'(x+yi) = \frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} f(x+yi)$ lösen

→ Produkt-/Quotienten-/Kettenregel und altbekannte Ableitungsregeln sind auch in $\mathbb{C}$ gültig

⚠ Bevor man $f'(z)$ berechnet $\Rightarrow$ Ist f überhaupt holomorph?