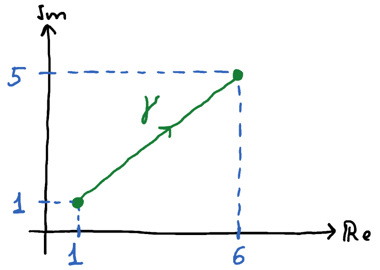
Theorie

1. Kurvenintegrale

– Wir wollen das Integral einer bestimmten Abbildung auf einem bestimmten Weg integrieren

<u>Beispiel:</u> $f(z) = z^2$



Wir suchen $\int_\gamma f(z)\,dz$, wobei $f(z) = z^2$

→ Das heisst, wir lassen alle Punkte auf γ durch die Abbildung gehen und summieren es am Ende

$$\underbrace{„\forall z \in \gamma \longrightarrow f(z) = z^2 \longrightarrow \Sigma“}_{\int_\gamma f(z)\,dz}$$

– Die Schwierigkeit beim Berechnen des Integrals besteht darin, dass wir nur die komplexe Zahlen auf γ integrieren wollen. Dafür benutzen wir die sogenannte Parametrisierung von γ.

1.1 Parametrisierung

– Eine Parametrisierung ist eine Funktion, die für eine laufende Variable im Interval $[a,b]$, alle gewünschten komplexen Zahlen z auf dem Weg γ gibt.

<u>Beispiel:</u> Wir suchen die Parametrisierung für das vorherige Beispiel

Nennen wir mal unsere laufende Variable t. Wir suchen $\gamma(t)$ die für $t \in [a,b]$ (wobei wir $a, b \in \mathbb{R}$ willkürlich auswählen können) alle z auf γ „referenziert“

$\gamma(t) := 1 + i + t(5+4i) \rightsquigarrow$ eine Gerade! $\gamma(t) = z_0 + t \cdot z_r$, z_0 = Anfangsverschiebung („Achsenabschnitt“)

$z_0, z_r \in \mathbb{C}$
$t \in \mathbb{R}$

z_r = Richtung/Steigung

t = Skalierungsfaktor

Da wir uns nur mit den Werten von $1+i = z_0$ bis $6+5i$ interessieren, definieren wir unser Interval $I := [0,1]$. Also läuft t von 0 bis 1 $(t \in I)$

– Setzen wir $\gamma(t)$ im z vom $\int_\gamma f(z)\,dz$ und lassen t von 0 bis 1 gehen, so können wir die Abbildung aller komplexen Zahlen auf γ integrieren.

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,dz$$

!

⚠ Wenn wir dieses Integral richtig anschauen, sehen wir, dass es hier ein Problem gibt

Wir wollen nicht mehr nach z (dz) integrieren, sondern nach t (dt), unsere neue Variable der Parametrisierung. Wir suchen also ein Verhältnis zwischen der infinitesimalen Integrationslänge im z-Raum und im t-Raum.

Einfach gesagt, das Verhältnis zwischen dz und dt.

Dieses erhalten wir indem wir unser $z=\gamma(t)$ nach t ableiten:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\gamma(t)}{dt} = \gamma'(t) \rightarrow \frac{dz}{dt} = \gamma'(t) \Rightarrow dz = \gamma'(t)\,dt$$

- Setzen wir $dz = \gamma'(t)\,dt$ im Integral, so erhalten wir

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

- Generalisiert:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt, \quad t\in[a,b]}$$

<u>Beispiel:</u> Wir berechnen jetzt $\int_\gamma f(z)\,dz$

- Für die Abbildung gilt $f(z) = z^2$
- Für den Integrationsweg (ihre Parametrisierung) gilt $\gamma(t) = 1+i+t(5+4i), \quad t\in[0,1]$

Einsetzen von $\gamma(t)$ in $f(z) \Rightarrow f(\gamma(t)) = [1+i+t(5+4i)]^2 = (1+i)^2 + 2(1+i)\cdot t(5+4i) + [t(5+4i)]^2$

$$= \cancel{1} + 2i - \cancel{1} + 2t + 18ti + t^2(9+40i)$$

$$= 2i + t(2+18i) + t^2(9+40i)$$

Berechnen von $dz \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\gamma(t) = (5+4i) \Rightarrow dz = (5+4i)dt$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 [2i + t(2+18i) + t^2(9+40i)]\cdot(5+4i)\,dt$$

$$= (5+4i)\left[2it + \frac{1}{2}t^2(2+18i) + \frac{1}{3}t^3(9+40i)\right]_0^1 = \boxed{-\frac{232}{3} + \frac{413}{3}i}$$

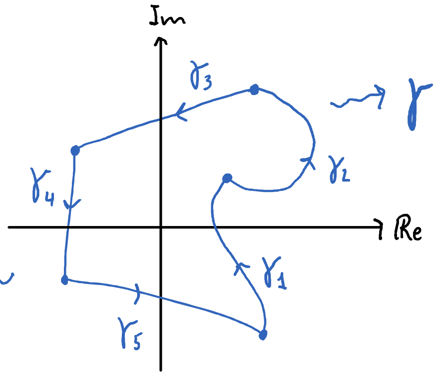
1.2 <u>Eigenschaften</u>

i. Linearität: $\int_\gamma \alpha f(z) + \beta g(z)\,dz = \alpha\int_\gamma f(z)\,dz + \beta\int_\gamma g(z)\,dz$

ii. $\int_\gamma f(z) = -\int_{-\gamma} f(z)\,dz \longrightarrow -\gamma =$ die in umgekehrte Richtung durchlaufene Kurve.

iii. Jst γ eine Kette von Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ so gilt

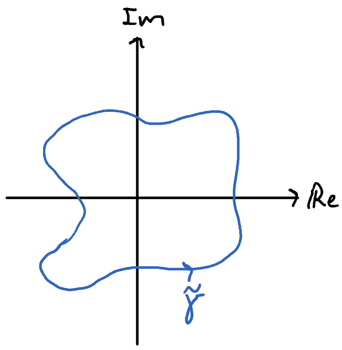
$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1} \int_{\gamma_n} f(z)\,dz}$$

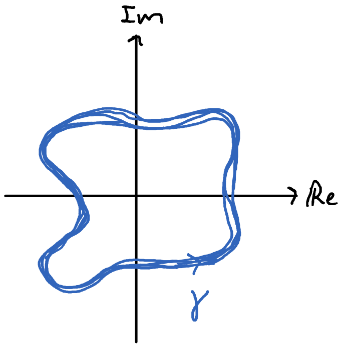


$\rightsquigarrow \gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_4} f(z)dz \leftsquigarrow$

iv. Durchläuft γ den Weg $\tilde{\gamma}$ k mal, so gilt





γ = k-mal $\tilde{\gamma}$

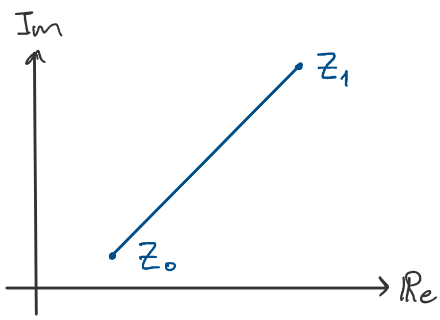
$$\int_\gamma f(z)\,dz = k \cdot \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz$$

(„k mal das gleiche Integral da wir $\tilde{\gamma}$ k mal durchlaufen“)

Notation: $\gamma = k \cdot \tilde{\gamma}$

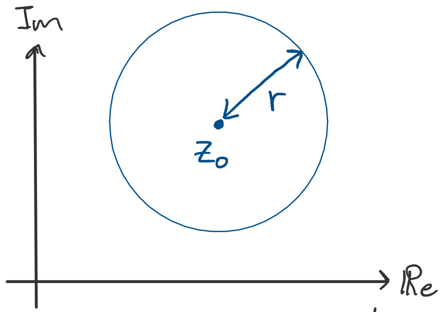
v. Wichtige Parametrisierungen

Gerade von z_0 nach z_1



$$\gamma(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$$
$$t \in [0,1]$$

Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r



$$\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$$
$$t \in [0,1]$$

Wir verwenden hier die 2π-Periodizität der (kompl.) Exponentialfunktion

Natürlich könnte man γ auch anders parametrisieren

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$

$\gamma(t) = z_0 + re^{\pi i t}, \ t \in [0, 2]$

$\vdots$

2. Satz von Cauchy

→ Sei $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$, eine in ganz U stetige Funktion. Dann gilt

i. $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossene Kurven $\gamma \in U$

Bemerke, dass es unabhängig vom Weg ist!

ii. $f(z)$ besitzt eine Stammfunktion $F(z)$ mit $F'(z) = f(z)$

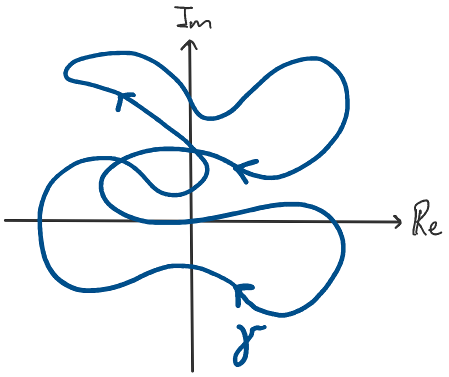
(Mit ii. können wir i. beweisen)

Beweis:

• Für eine geschlossene Kurve γ gilt, dass die Endpunkten identisch sind $\Rightarrow$ Wenn wir γ im Intervall $[a, b]$ definieren, so gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0,$$ da $f(z)$ die Stammfunktion $F(z)$ besitzt und $\gamma(b) = \gamma(a) \Rightarrow F(\gamma(b)) = F(\gamma(a))$ ∎

Beispiel: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^2$



$f(z) = z^2$ ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph

$\Rightarrow f$ besitzt in ganz $\mathbb{C}$ eine Stamfunktion

$$F(z) = \frac{1}{3} z^3 \quad [f(z) = F'(z)]$$

$\Rightarrow$ Satz von Cauchy $\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$

γ geschlossen