Theorie

1. Cauchy-Integralsatz

1.1 Satz von Cauchy

→ Sei $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$, eine in ganz U stetige Funktion. Dann gilt

i. $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossene Kurven $\gamma \in U$

Bemerke, dass es unabhängig vom Weg ist!

ii. $f(z)$ besitzt eine Stammfunktion $F(z)$ mit $F'(z) = f(z)$
(Mit ii. können wir i. beweisen)

Beweis:

• Für eine geschlossene Kurve γ gilt, dass die Endpunkten identisch sind ⇒ Wenn wir γ im Intervall $[a,b]$ definieren, so gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0,$$ da $f(z)$ die Stammfunktion $F(z)$ besitzt und $\gamma(b) = \gamma(a) \Rightarrow F(\gamma(b)) = F(\gamma(a))$ ∎

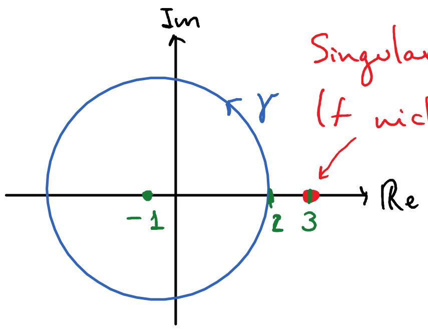
1.2 Satz von Cauchy (Erweiterung)

→ Sei jetzt $f: U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet. Für jede geschlossene Kurve in U gilt

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$$

Beispiel: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-3}$ mit $\gamma \Rightarrow |z+1| = 3$ (Kreis mit Mittelpunkt $(-1,0)$ und Radius 3

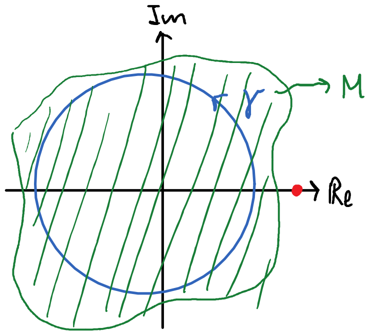
// Wir suchen $\int_\gamma f(z)\,dz$



Singularität → Definitionslücke
(f nicht holomorph hier :))

[f is überall ausser in $z = 3$ analytisch
holomorph]

• Aber wir können ein einfach zusammenhängendes Gebiet $M \subset U$ finden, so dass der ganze Weg γ in M liegt und f auch innerhalb ganz ist.



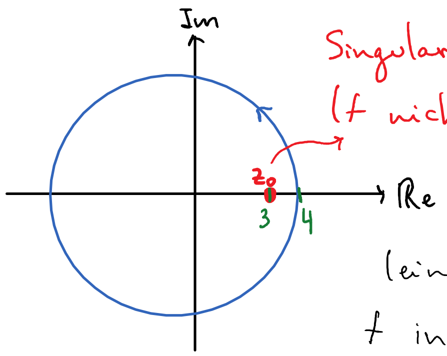
M ist einfach zusammenhängend, f ist innerhalb M ganz und $\gamma \in M$

$\Rightarrow$ Satz von Cauchy $\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{|z+1|=3} \frac{1}{z-3}\,dz = 0$

Bemerkung:

$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz \rightarrow$ Integrationsweg ist Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r

Beispiel: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-3}$. Wir wollen jetzt wieder $\int_\gamma f(z)\,dz$ berechnen aber jetzt mit $\gamma := |z+1| = 5$. Also suchen wir $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz$

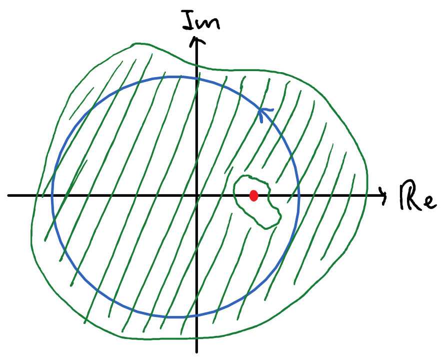


Singularität
(f nicht holomorph hier :( )

Hier ist es unmöglich, ein Gebiet M zu finden (einfach zusammenhängend), so dass γ in M liegt und f innerhalb ganz ist (ganz = überall in M holomorph)

$\Longrightarrow$ Aussage $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz = 0$ gilt nicht!

• Einige würden argumentieren, dass man so ein M finden kann:



Also mit $z=3$ ausserhalb M. Aber das ist nicht einfach zusammenhängend.

1.3 Satz von Cauchy (Interpretation)

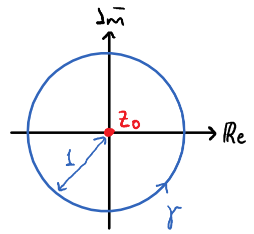
→ Wir können diese beide Theoreme wie folgt interpretieren: Für eine beliebige holomorphe (nicht unbedingt überall) Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ und eine geschlossene Kurve γ gilt

i. Falls es innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche **keine** Singularität gibt, so ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

ii. Falls es jetzt eine Singularität innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche gibt, so gilt die Aussage $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ **nicht**!

Bemerkung: Es kann schon den Zufall geben, wo das Integral gerade null ist, obwohl es innerhalb der von γ geschlossene Fläche eine Singularität gibt.

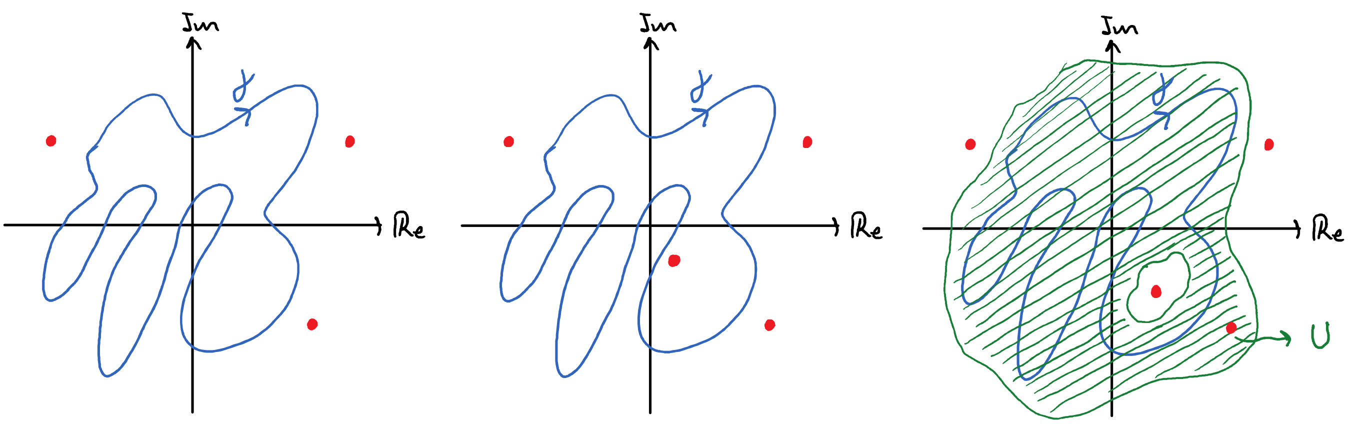
Beispiel: $\int_\gamma \frac{1}{z^n}\,dz$



Wie wir in der Serie gesehen haben, ist $\int_\gamma \frac{1}{z^n}\,dz = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}$

Satz von Cauchy ist hier nicht anwendbar, da es eine Singularität innerhalb γ gibt (bei $z_0 = 0$). Aber trotzdem ist $\int_\gamma \frac{1}{z^n}\,dz = 0$ für $n \neq 1$

Beispiel: • = Singularität von $f(z)$



$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

keine aussage

$\left(\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0\right)$

keine aussage

$\left(\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0\right)$

wobei $f: U \to \mathbb{C}$

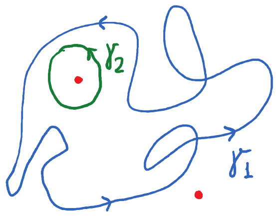
(also f nur in U definiert)

Theorie

2. Homotopie - Invarianz

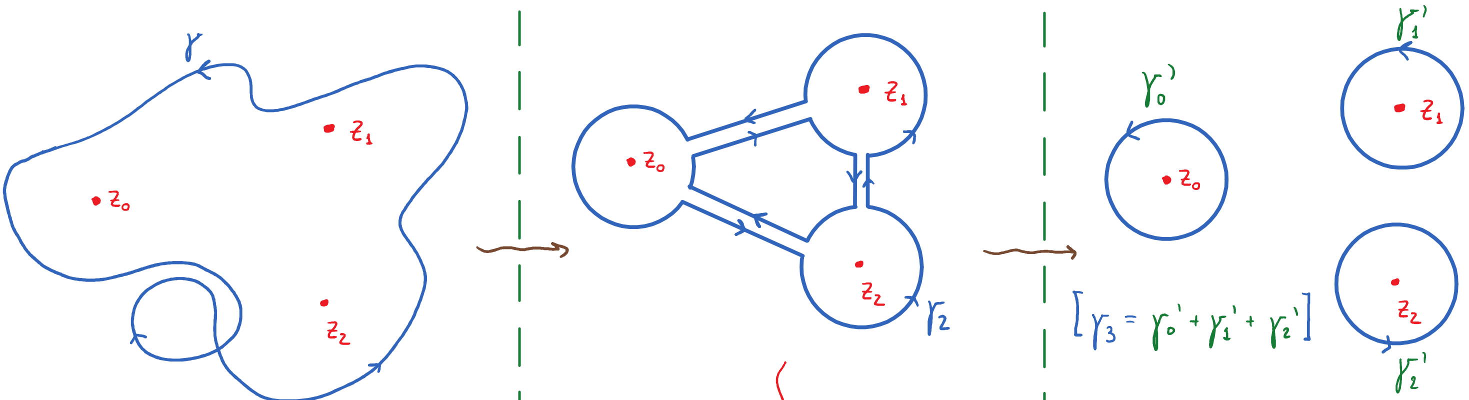
→ Wir haben schon gesehen, dass $\int_\gamma f(z)\,dz$ nur von den Singularitäten innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche abhängt und dass wir γ beliebig transformieren können ohne $\int_\gamma f(z)\,dz$ zu verändern (sofern die Singularitäten innerhalb und ausserhalb von $A(\gamma)$ erhalten sind)

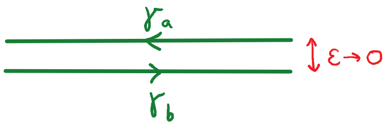
• Singularität von $f(z)$



$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

→ Integrale mit Singularitäten innerhalb $A(\gamma)$ müssen wir meistens mit Parametrisierung lösen. Die einfachste Parametrisierung ⇒ Kreis mit Mittelpunkt z_0, wobei z_0 die Stelle der Singularität innerhalb $A(\gamma)$ ist.





Mit $\varepsilon \to 0$ ist $\gamma_a = -\gamma_b$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_a} f(z)\,dz + \int_{\gamma_b} f(z)\,dz = 0$$

(Integrale heben sich auf)

• Hier haben wir nur die Homotopie-Invarianz verwendet und sind auf folgendes gekommen (ihr könnt euch überzeugen, dass alle Singularitäten innerhalb γ_1, γ_2 und γ_3 erhalten sind):

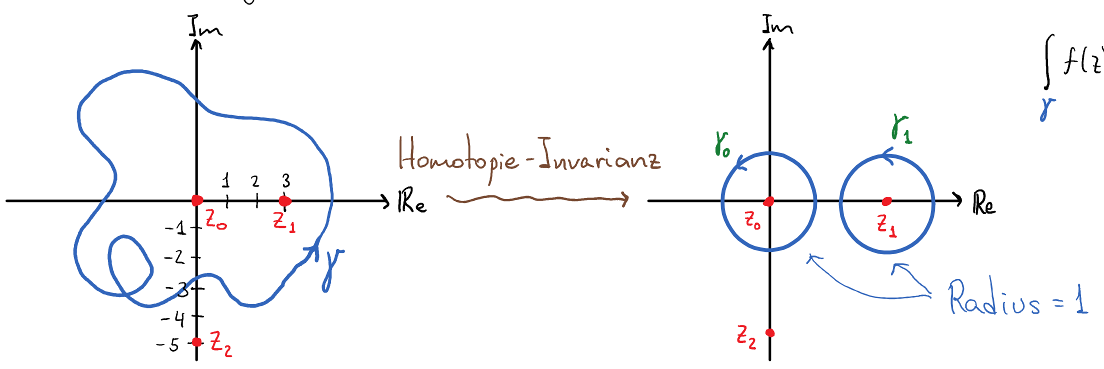
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

• Weiter gilt noch $\displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0'} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1'} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2'} f(z)\,dz$

• **Bedeutung**: Wir können alle Singularitäten in $A(\gamma)$ „isolieren" und separat betrachten/integrieren

→ **Beispiel**: Gegeben ist $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-3} - \frac{1}{(z+5i)^2}$. Finde $\int_\gamma f(z)\,dz$

$f(z)$ hat Singularitäten bei $z_0 = 0$, $z_1 = 3$, $z_2 = -5i$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

• Wir berechnen jetzt $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz$ und $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ mittels Parametrisierung (Wir verwenden Kreise mit Radius 1 und Mittelpunkt z_0 bzw z_1.)

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0} f(z)\,dz &= \int_{\gamma_0} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-3} - \frac{1}{(z+5i)^2}\,dz \qquad \text{(Satz von Cauchy) } ⊛\\ &= \int_{\gamma_0} \frac{1}{z^2}\,dz + \underbrace{\cancel{\int_{\gamma_0} \frac{1}{z-3}\,dz}}_{0} - \underbrace{\cancel{\int_{\gamma_0} \frac{1}{(z+5i)^2}\,dz}}_{0}\\ &= \int_{\gamma_0} \frac{1}{z^2}\,dz = \int_{\gamma_0} g_0(z)\,dz, \quad g_0(z) := \frac{1}{z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-3} - \frac{1}{(z+5i)^2}\,dz \qquad \text{(Satz von Cauchy)}\\ &= \underbrace{\cancel{\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2}\,dz}}_{0} + \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-3}\,dz - \underbrace{\cancel{\int_{\gamma_1} \frac{1}{(z+5i)^2}\,dz}}_{0}\\ &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-3}\,dz = \int_{\gamma_1} g_1(z)\,dz, \quad g_1(z) := \frac{1}{z-3}\end{aligned}$$

$\int_{\gamma_0} g_0(z)\,dz \rightsquigarrow$ $\gamma_0(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$
$\dot\gamma_0(t) = 2\pi i e^{2\pi i t}$

$\int_{\gamma_1} g_1(z)\,dz \rightsquigarrow$ $\gamma_1(t) = e^{2\pi i t} + 3$, $t \in [0,1]$
$\dot\gamma_1(t) = 2\pi i e^{2\pi i t}$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0} g_0(z)\,dz &= \int_0^1 g_0(\gamma_0(t))\cdot\dot\gamma_0(t)\,dt = \int_0^1 \frac{2\pi i e^{2\pi i t}}{(e^{2\pi i t})^2}\,dt\\ &= \cdots \text{langweilig} \cdots = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} g_1(z)\,dz &= \int_0^1 g_1(\gamma_1(t))\cdot\dot\gamma_1(t)\,dt = \int_0^1 \frac{2\pi i e^{2\pi i t}}{e^{2\pi i t} + 3 - 3}\,dt\\ &= \cdots \text{langweilig} \cdots = 2\pi i\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0 + 2\pi i = \boxed{2\pi i}$$

⊛ Die Funktionen $\frac{1}{z-3}$ und $\frac{1}{(z+5i)^2}$ haben keine Singularität innerhalb $A(\gamma_0)$

$\Rightarrow$ Satz von Cauchy $\Rightarrow \int_{\gamma_0} \frac{1}{z-3}\,dz = 0$ und $\int_{\gamma_0} \frac{1}{(z+5i)^2}\,dz = 0$

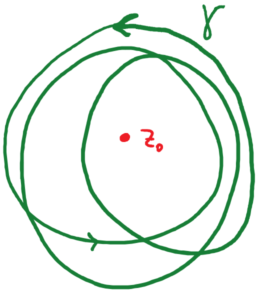
⚠ Bis jetzt haben wir immer angenommen, dass γ eine Singularität nur einmal in Gegenuhrzeigersinn umläuft. Das müssen wir später vor $\int_\gamma f(z)\,dz$ berechnen auch berücksichtigen → Siehe „2. Umlaufzahl"

3. Umlaufzahl

→ Wir haben gesehen, dass wir die Singularitäten „isolieren" können. Aber wir haben auch angenommen, dass jede Singularität nur einmal von γ umgekreist wird

→ Wir definieren jetzt die Umlaufzahl $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$ für eine Singularität z_i. Sie sagt uns wie oft eine Singularität von einer Kurve γ umgelaufen wird.

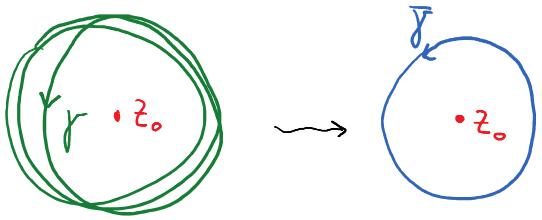
$\mathrm{Ind}_\gamma(z_i) = u \Rightarrow$ Singularität z_i wurde u-mal von γ umgelaufen



$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = 3$

z_0 wird 3-mal von γ umgelaufen

→ Da die Singularität $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$-mal umgelaufen wird, wird sie auch $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$-mal integriert (in Bezug zu $\bar{\gamma}$)

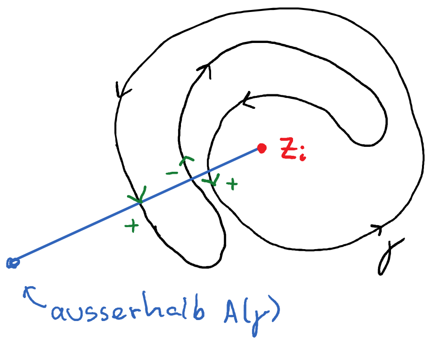


$$\int_\gamma f(z)\,dz = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \cdot \int_{\bar{\gamma}} f(z)\,dz$$
$$= 3 \cdot \int_{\bar{\gamma}} f(z)\,dz$$

• Hier habe ich den Weg $\bar{\gamma}$ so definiert, dass er die Singularität z_0 nur einmal in Gegenuhrzeigersinn (mathematisch positiv) umläuft. ("eine Normierung von γ"?)

→ Die Frage ist natürlich, wie man effektiv alle $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$ ganz einfach berechnen kann.

• Wir bilden eine Gerade von ausserhalb γ bis zur Singularität und zählen wie viele male γ unsere Gerade im positiven bzw negativen Sinn schneidet
↺ ↻

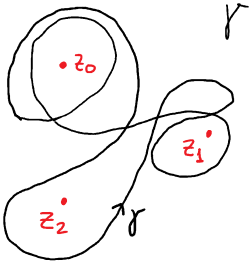


$2 \times \oplus + 1 \times \ominus = 1 \times \oplus$

$\Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_i) = 1$

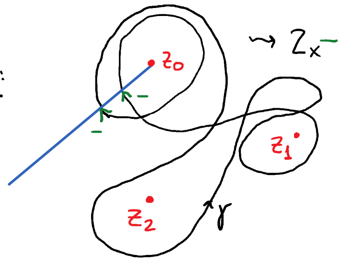
[↺ ⊕ mathematisch positiv
↻ ⊖ mathematisch negativ]

Beispiel: Sei eine holomorphe Funktion f und ein Integrationsweg γ gegeben. Vereinfache $\int_\gamma f(z)\,dz$



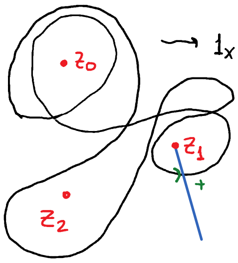
Wir müssen erst $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)\ \forall z_i \in A(\gamma)$ finden

für z_0:



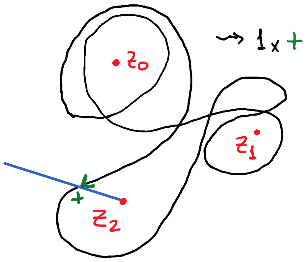
$\rightsquigarrow 2\times - \Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = -2$

für z_1:



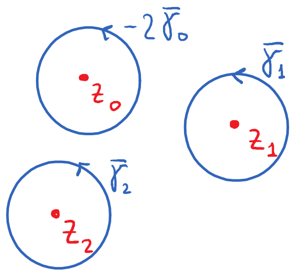
$\rightsquigarrow 1\times + \Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_1) = 1$

für z_2:



$\rightsquigarrow 1\times + \Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_2) = 1$

$\Rightarrow$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{-2}_{\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)}\int_{\bar{\gamma}_0} f(z)\,dz + \underbrace{1}_{\mathrm{Ind}_\gamma(z_1)}\int_{\bar{\gamma}_1} f(z)\,dz + \underbrace{1}_{\mathrm{Ind}_\gamma(z_2)}\int_{\bar{\gamma}_2} f(z)\,dz$$

→ Generell gilt also

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\int_{\bar{\gamma}_k} f(z)\,dz}$$

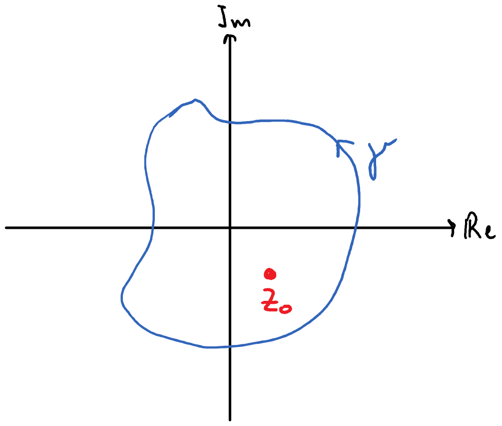
(z_k = Singularitäten von f innerhalb $A(\gamma)$)

4. Integralformel von Cauchy

→ Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet U. Dann gilt für jeden Punkt $z_0 \in U$ und jede geschlossene Kurve γ in U, die z_0 einmal im mathematisch positiven ($\circlearrowleft$) Sinn umläuft.

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz}$$

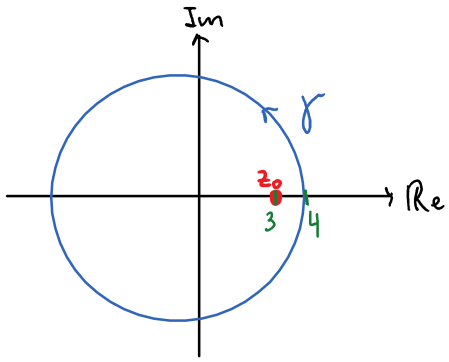
⚠ $f(z_0)$ ist $f(z)$ ausgewertet an der Stelle $z = z_0$



Umgeformt: $\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = 2\pi i \, f(z_0)$

Wir integrieren $\frac{f(z)}{z - z_0}$, wobei es nur eine Singularität an der Stelle $z = z_0$ innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche gibt (da $f(z)$ ganz in U ist → keine Singularität von $f(z)$ in $A(\gamma)$)

Beispiel: Wir berechnen $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3} \, dz$



Wenn wir uns die Integralformel ansehen, merken wir, dass eine Ähnlichkeit zu dem Beispielsintegral besteht

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz}_{} \approx \underbrace{\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3} \, dz}_{}$$

Das Integral wäre gleich, falls $f(z) = 1$, $z_0 = 3$ und $\gamma \to |z+1| = 5$
Die Bedingungen, damit die Integralformel auch mit unseren Werten funktioniert, sind:

i. $f(z) = 1$ muss ganz (überall holomorph) in $A(\gamma)$ sein ✓
   (von γ eingeschlossene Fläche)

ii. $z_0 = 3$ ist die einzige Singularität in γ ✓
   ↳ wäre $z_0 = 3$ ausserhalb $A(\gamma)$ ⇒ Satz von Cauchy ⇒ $\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = 0$

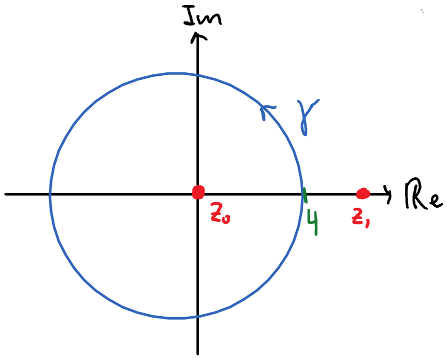
Da die Bedingungen erfüllt sind, gilt

$$f(3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=5} \frac{f(z)}{z-3}\,dz,$$ wobei $f(z)=1$ wie wir es vorher definiert haben

da $f(z)=1 \Rightarrow f(3)=1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz \rightsquigarrow$ nach $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz$ aufgelöst

$$\Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz = 2\pi i$$

<u>Beispiel:</u> Wir berechnen $\int_{|z+1|=5} \frac{\sin(z)}{z\cdot(z-7)}\,dz$



Wir haben hier nicht nur eine, sondern zwei Singularitäten (bei $z_0=0$ und $z_1=7$)
Da aber nur eine Singularität innerhalb von $\gamma: |z+1|=5$ liegt, sind die Bedingungen für die Cauchy-Integralformel erfüllt.

$$\underbrace{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}_{} \quad \approx \quad \underbrace{\int_{|z+1|=5} \frac{\sin(z)}{z(z-7)}\,dz}_{} = \int_{|z+1|=5} \frac{f(z)}{z}\,dz \quad \text{für } f(z) := \frac{\sin(z)}{z-7}$$

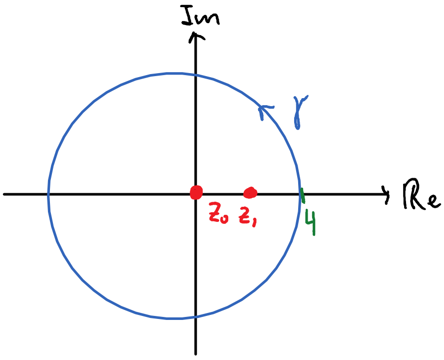
i. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z-7}$ ist ganz in γ ✓ ($z_1 = 7$ ist ausserhalb γ!)

ii. $z_0 = 0$ ist die einzige Singularität in γ ✓

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \quad \text{mit } f(z) := \frac{\sin(z)}{z-7}, \quad \gamma: |z+1|=5, \quad z_0 = 0$$

$$\frac{\sin(0)}{0-7} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=5} \frac{f(z)}{z}\,dz \Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{f(z)}{z}\,dz = \int_{|z+1|=5} \frac{\sin(z)}{z\cdot(z-7)}\,dz = 0$$

Beispiel: Wir berechnen $\displaystyle\int_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz$



Hier haben wir zwei Singularitäten aber beide liegen innerhalb γ. Wir können hier <u>nicht</u> Cauchy-Integralformel direkt anwenden!
(nur eine Singularität in γ nicht erfüllt)

Aber was wir machen können ist unsere Funktion $\frac{z^2-z+1}{(z-1)z}$ umformeln, so dass wir mehrere Funktionen mit je eine Singularität erhalten

$\Rightarrow$ Partialbruchzerlegung (PBZ)

$$\frac{z^2-z+1}{(z-1)z} = \underset{h(z)}{\frac{1}{z-1}} - \underset{g(z)}{\frac{1}{z}}$$

Cauchy-Integralformel anwendbar?

$$\Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz = \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\,dz = \underbrace{\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz}_{i.} - \underbrace{\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz}_{ii.}$$

i. $\displaystyle f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \approx \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz$

$f(z) := 1$, $\gamma: |z+1| = 5$, $z_0 := +1 \rightsquigarrow f(z_0) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz \Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz = 2\pi i$$

ii. $\displaystyle f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \approx \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz$

$f(z) := 1$, $\gamma: |z+1| = 5$, $z_0 := 0 \rightsquigarrow f(z_0) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz \Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

$$\int_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz = \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz - \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz = \underset{i.}{2\pi i} - \underset{ii.}{2\pi i} = 0$$

4.1 Integralformel von Cauchy für die n-te Ableitung $f^{(n)}$

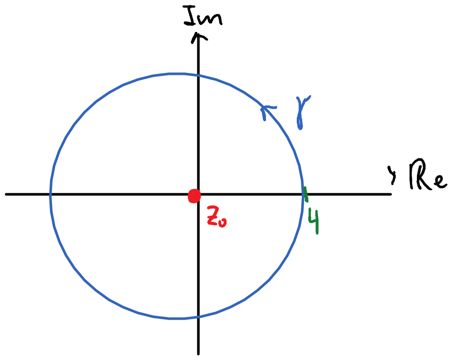
→ Sei $f: U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f beliebig oft differenzierbar, und für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ gilt die Formel:

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz}$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z)$$

→ Jetzt können wir auch Aufgaben lösen, wo mehrfache Singularitäten vorkommen

Beispiel: Wir berechnen $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3}\, dz$



Da wir eine dreifache Singularität an der Stelle $z=0$ haben, müssen wir die Ableitung der Cauchy-Integralformel verwenden. In diesem Fall für $n=2$.

$$f^{(2)}(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\, dz \approx \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3}\, dz$$

$$f(z) := 1, \quad \gamma: |z+1| = 5, \quad z_0 := 0 \rightsquigarrow f^{(2)}(z) = \frac{d^2}{dz^2}(1) = 0 \Rightarrow f^{(2)}(z_0) = 0$$

$$0 = \frac{2}{2\pi i} \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3}\, dz \Rightarrow \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3}\, dz = 0$$