

1. Mittelwertsatz

→ Setze die Parametrisierung eines Kreises in der Integralformel von Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz \rightarrow \gamma(t) = re^{it} + a, t \in [0, 2\pi]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}+a)}{re^{it}+a-a} r i e^{it} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}+a) dt \quad \rightsquigarrow$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}+a) dt$$

→ Interpretation

- Setze $r=1$
- $2\pi =$ Umfang eines Kreises mit Radius 1 (Umfang = $2\pi r$)
- $e^{it} + a, t \in [0, 2\pi] =$ Kreis mit Mittelpunkt a und Radius 1

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}+a) dt = \text{Summe der Abbildungen auf } |z-a|=1 \quad \curvearrowright$$

→ „arithmetisches Mittel“

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}+a) dt = \text{Mittelwert der Abbildungen, die auf dem Kreis } |z-a|=1 \text{ liegen}$$

(da 2π dem Umfang des Kreises entspricht)

• Also für $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}+a) dt$

Auswertung der Funktion f an der Stelle $a =$ Mittelwert der Umgebung

→ Mittelwertungleichung

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}+a) dt$$

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}+a) dt \right| \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\Rightarrow |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it}+a)| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_{s \in [0, 2\pi]} |f(re^{is}+a)| dt = \max_{s \in [0, 2\pi]} |f(re^{is}+a)|$$

- Da $f(z) = u(z) + iv(z) \Rightarrow$ Mittelwertsatz auch gültig für u & v

1.1 Maximumsprinzip

→ Realteil bzw. Imaginärteil einer holomorphen Funktion besitzt keine lokale Maxima oder Minima (Minimumsprinzip für Minima), ausser wenn sie konstant ist

Reihen

2. Reihen

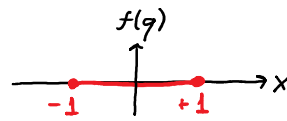
→ Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. $B_R(z_0) \subseteq U$. Dann ist f um z_0 als Potenzreihe darstellbar

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

2.1 Geometrische Reihen

- In Analysis haben wir gelernt, dass in \mathbb{R}

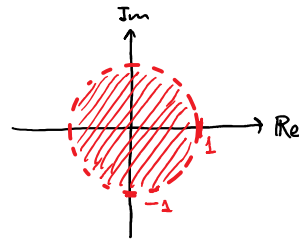
$$f(q) = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q| < 1$$



Potenzreihe konvergiert nur in $]-1, 1[$

- In \mathbb{C} ist es analog

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$



Potenzreihe konvergiert nur in $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Beispiel 2.1: $f(z) = \frac{1}{2z+3}$ finde die Potenzreihe von $f(z)$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$

→ Wir suchen etwas in der Form $\frac{1}{1-az}$

$$\frac{1}{2z+3} \stackrel{\cdot \frac{1}{3}}{=} \frac{1/3}{\frac{2}{3}z + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - (-\frac{2}{3}z)}$$

↳ a sagt nur unser Konvergenzradius
($|az| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{|a|}$)

↳ Geometrische Reihe verwenden

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - (-\frac{2}{3}z)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n, \quad \left|-\frac{2}{3}z\right| < 1$$

$$\text{Gültig für } \left|-\frac{2}{3}z\right| < 1 \rightarrow \left|\frac{2}{3}\right| |z| < 1 \rightarrow |z| < \frac{3}{2}$$

$$f(z) = \frac{1}{2z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n, & |z| < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2z+3}, & |z| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Diese Potenzreihe geht leider nur für $|z| < \frac{3}{2}$.

Betrachte $\frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$ anstatt $\frac{1}{1-z}$. Die Potenzreihe lautet $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ und konvergiert für $|\frac{1}{z}| < 1 \Rightarrow |z| > 1$.

\Rightarrow Um die Potenzreihe auf dem anderen Bereich zu finden, müssen wir die Geometrische Reihe mit der Inversion von z finden.

$$\frac{1}{1 - \text{etwas mit } z} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \frac{1}{1 - \text{etwas mit } \frac{1}{z}}$$

$|z| < \rho$ $|z| > \rho$

schauen wir das vorherige Beispiel: $f(z) = \frac{1}{2z+3}$

wir brauchen hier etwas mit $\frac{1}{z}$

$$f(z) = \frac{1}{2z+3} = \frac{1}{2 + \frac{3}{z}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2z}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{3}{2z}\right)}$$

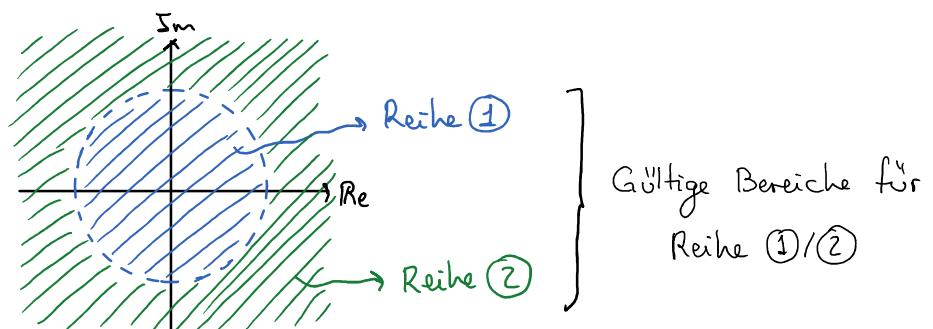
\hookrightarrow Geometrische Reihe

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2} \frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}}$$

$$\rightarrow \text{Gültig für } \left|-\frac{3}{2z}\right| < 1 \rightarrow \left|\frac{3}{2}\right| \cdot \frac{1}{|z|} < 1 \rightarrow |z| > \frac{3}{2}$$

$$\text{Also haben wir } f(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{n+1}} z^{-n-1}, & |z| < \frac{3}{2} \quad \text{Reihe ①} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2} \quad \text{Reihe ②} \end{cases}$$

Bemerkung: keine Aussage für $|z| = \frac{3}{2}$. Wir wissen nicht ob eine der Reihen für ein z mit $|z| = \frac{3}{2}$ überhaupt konvergieren wird.



2.2 Konvergenzradius

→ Zum wissen wann/wo man eine gegebene Reihendarstellung verwenden kann ist es nützlich den Konvergenzradius zu berechnen. Er ist gegeben durch:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Beispiel 2.2: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot z^n$. Für welche z ist die Potenzreihe definiert?

→ Wir suchen den Konvergenzradius von $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n}_{a_n} z^n \quad \leftarrow z_0 = 0$$

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot \frac{3^n}{2^n}}{(-1)^{n+1} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n 3^n 2^{n+1}}{(-1)^{n+1} 3^{n+1} 2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{-1} \cdot \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

also konvergiert die Potenzreihe nur für $|z| < \frac{2}{3}$

wäre $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{z^n}$ so würde es für $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{2}{3} \Rightarrow |z| > \frac{3}{2}$

Beispiel 2.3: $f(z) = \frac{3z+4}{2z^2+5z+3}$. Finde die entsprechende Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$

Partialbruchzerlegung von $f(z) = \frac{3z+4}{(2z+3)(z+1)} = \frac{1}{2z+3} + \frac{1}{z+1}$

$$\frac{1}{2z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n, & |z| < \frac{3}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2} \end{cases} \quad (\text{Beispiel 1.1})$$

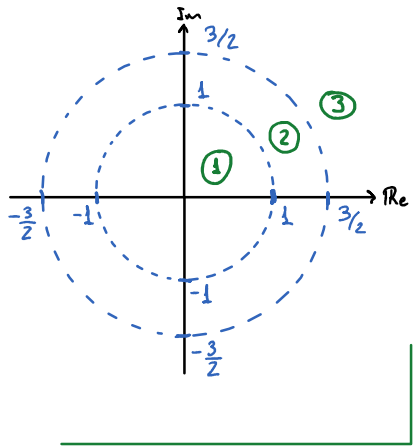
$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \text{für } |z| < 1$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1/z}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^n} \quad \text{für } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

• wir haben also

$$\frac{1}{2z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} z^n, & |z| < \frac{3}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+z} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, & |z| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}, & |z| > 1 \end{cases}$$

• Da $f(z) = \frac{1}{2z+3} + \frac{1}{z+1}$ wissen wir für alle Bereiche eine Fallunterscheidung machen:

$$f(z) = \frac{3z+4}{2z^2+5z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, & |z| < 1 \quad \textcircled{1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}, & 1 < |z| < \frac{3}{2} \quad \textcircled{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2} \quad \textcircled{3} \end{cases}$$


2.3 Cauchy-Produktregel

→ Produkt von zwei Summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}$$

Beispiel 2.4: $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$. Finde die Reihendarstellung von $f(z)$ für $z_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= \left[\frac{1}{z+1} \right]^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \quad \begin{matrix} \rightarrow a_n = (-1)^n z^n \\ \rightarrow b_k = (-1)^k z^k \end{matrix} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k z^k \cdot (-1)^{n-k} z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n (-1)^n z^n}_{\text{unabhängig von } k} = \sum_{n=0}^{\infty} n (-1)^n z^n \end{aligned}$$

(und wir n-mal addiert)

Beispiel 2.4 (Methode 2)

→ Wir bemerken, dass $F(z) := \int f(z) dz = \int \frac{1}{(z+1)^2} dz = -\frac{1}{z+1} + c$

$$-\frac{1}{z+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \rightarrow \text{also } F(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + c$$

• Da $F(z) = \int f(z) dz \Rightarrow f(z) = \frac{d}{dz} F(z)$

$$f(z) = \frac{d}{dz} \left[- \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + c \right] = - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n (-1)^n z^n$$

also ist $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ gegeben durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n (-1)^n z^n$ (für $|z| < 1$)

2.4 Formeln

→ Wir berechnen eine generelle Formel für die Potenzreihendarstellung von $\frac{1}{az+b}$ mit Entwicklungspunkt z_0 .

$$i. \quad \frac{1}{z+b} = \frac{1}{(z-z_0) + b+z_0} = \frac{\frac{1}{b+z_0}}{\frac{(z-z_0)}{b+z_0} + 1} = \frac{1}{b+z_0} \frac{1}{1 - \left(-\frac{(z-z_0)}{b+z_0}\right)} = \frac{1}{b+z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{b+z_0}\right]^n (z-z_0)^n$$

→ für $\frac{|z-z_0|}{|b+z_0|} < 1 \Rightarrow |z-z_0| < |b+z_0|$

$$ii. \quad \frac{1}{z+b} = \frac{1}{(z-z_0) + b+z_0} = \frac{\frac{1}{z-z_0}}{1 + \frac{b+z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \left(-\frac{b+z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} [-(b+z_0)]^n \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [-(b+z_0)]^n \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \quad \text{oder} \quad = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[-\frac{1}{b+z_0}\right]^{k+1} (z-z_0)^k$$

↓
Schon in Laurentreihe

→ für $\frac{|b+z_0|}{|z-z_0|} < 1 \Rightarrow |z-z_0| > |b+z_0|$

Also haben wir

$$\frac{1}{z+b} = \begin{cases} \frac{1}{b+z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{b+z_0}\right]^n (z-z_0)^n, & |z-z_0| < |b+z_0| \\ \sum_{n=0}^{\infty} [-(b+z_0)]^n \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}, & |z-z_0| > |b+z_0| \end{cases}$$

Beispiel 2.5: $f(z) = \frac{1}{2z+3}$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 2$

↳ z wird mit 2 multipliziert

$$f(z) = \frac{1}{2z+3} = \frac{1/2}{z+3/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{z+3/2} \rightarrow b = \frac{3}{2}, z_0 = 2$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3/2+2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{3/2+2}\right]^n (z-2)^n, \quad |z-z_0| < |3/2+2|$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}+2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{\frac{3}{2}+2} \right]^n (z-2)^n, \quad |z-2| < \left| \frac{3}{2}+2 \right|$$

$$= \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n (z-2)^n, \quad |z-2| < \frac{7}{2}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\frac{3}{2}+2\right) \right]^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{n+1}}, \quad |z-2| > \frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{n+1}}, \quad |z-2| > \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow f(z) = \begin{cases} \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n (z-2)^n, & |z-2| < \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{n+1}}, & |z-2| > \frac{7}{2} \end{cases}$$

2.5 Trigonometrische Funktionen

→ Taylorentwicklung betrachten
 • Konvergenzradius ist ganz \mathbb{C}

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\ln(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{z^k}{k}$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$