Singularitäten

- Wir können alle Singularitäten folgendermassen aufteilen:

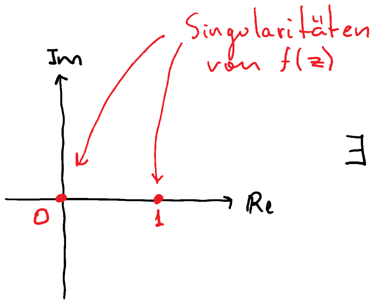
  1) Isolierte Singularitäten
     i. Hebbare Singularitäten
     ii. Polstellen
     iii. Wesentliche Singularitäten
  2) Nicht isolierte Singularitäten.

Es ist besser erst zu zeigen was überhaupt „isoliert" hier bedeutet

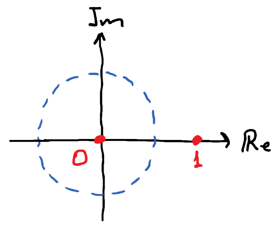
2) Nicht isolierte Singularitäten

Eine Singularität heisst isoliert, falls $\exists B_{R=\varepsilon>0}(z_0)$ s.d. die Singularität an der Stelle z_0 die einzige Singularität in $B_\varepsilon(z_0)$ ist. Es ist nicht isoliert, falls diese Bedingung nicht erfüllt ist.

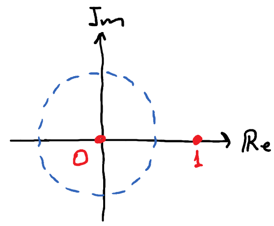
Beispiel: $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 z}$ $\longrightarrow$ zwei Singularitäten: $\to z=0$, $\to z=1$



$\exists B_{\varepsilon>0}(z=0)$ und $\exists B_{\varepsilon>0}(z=1)$?



für $B_{R<1}(z=0)$ ist nur Sing. $z=0$ im Ball

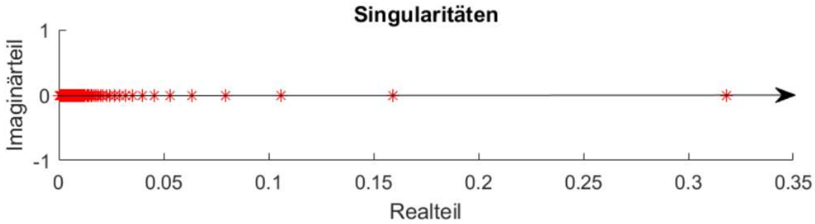


für $B_{R<1}(z=1)$ ist nur Sing. $z=1$ im Ball

$\Rightarrow$ Beide Singularitäten sind isoliert

Beispiel: $f(z) := \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$

Singularitäten von $f(z)$ sind gerade die Nullstellen von $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.
$\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ist gerade null bei $\frac{1}{z} = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow z = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$
Die Singularität an der Stelle $z=0$ ist nicht isoliert. Warum?



Hier sind die Singularitäten von $f(z)$ auf der $\mathbb{R}$e-Achse dargestellt. Wie wir sehen können, nimmt der Abstand zwischen den Singularitäten (mit $z \to 0$) mit ein Faktor n^{-1} ab. Da wir unendlich viele Singularitäten haben und der Abstand immer kleiner wird, ist $z=0$ von eine Singularität mit unendlich kleiner Abstand benachbart $\Rightarrow$ nicht isoliert.

Generell haben Funktionen mit nicht isolierte Singularitäten folgende Form:

$$f(z) = \frac{1}{\text{period\_func}\left(\frac{1}{z}\right)}$$

⚠ Obwohl $\cosh(z)$ und $\sinh(z)$ keine periodische Funktion auf der $\mathbb{R}$e-Achse sind, haben sie unendlich viele Nullstellen auf der $\mathbb{I}$m-Achse (sind dort periodisch)

1) Isolierte Singularitäten

i. Hebbare Singularitäten

- Eine Singularität heisst hebbar, falls die Funktion sich analytisch fortsetzen lässt.

Beispiel: $f(z) = \frac{(z-3)}{(z-3)(z-2)}$

$$f(z) = \frac{(z-3)}{(z-3)(z-2)} = \frac{1}{z-2} =: \tilde{f}(z) \quad \text{für } z \neq 3$$

„Singularität vollständig abgekürzt"

Wir haben $f(z)$ analytisch fortgesetzt (an der Stelle $z=3$), weil jetzt die Fortsetzung $\tilde{f}(z)$ holomorph an der Stelle $z=3$ ist

Beispiel: $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \mathcal{O}(z^7)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) =: \tilde{f}(z) \text{ ist holomorph an der Stelle } z=0$$

$\Rightarrow z=0$ ist eine hebbare Singularität.

– Wir haben zwei Methoden um hebbare Singularitäten zu identifizieren.

1) Explizite Abkürzung der Singularität (mit Verwendung der Taylorreihe, zum Beispiel).

2) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ konvergiert.

Da „echte" Singularitäten bei den Singularitäten „explodieren" ($\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$), müssen wir nur sehen, ob $f(z)$ überhaupt an der Singularität konvergiert.

$\lim_{z \to z_0} f(z)$ konvergiert $\Rightarrow$ hebbare Singularität

$\lim_{z \to z_0} f(z)$ divergiert $\Rightarrow$ nicht hebbare Singularität

– Das ist analog zu sagen, dass die entsprechende Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ von $f(z)$ keine Terme mit negativen Exponenten hat.

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

<u>Beispiel:</u> $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos(z)}{1} = 1$$

Da $\lim_{z \to z_0} f(z)$ konvergiert $\Rightarrow$ $z=0$ ist eine hebbare Singularität

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \mathcal{O}(z^7)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

$$\text{mit} \quad c_k = \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{(k+1)!}, & \text{für } k > 0 \text{ und } k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist $c_k = 0 \ \forall\ k < 0 \Rightarrow$ Laurentreihe hat keine Terme mit negativen Exponenten (man kann es eigentlich direkt von der Taylorreihe ablesen)

ii. Polstellen

– Polstellen sind nicht hebbare Singularitäten mit endlicher Ordnung. Das heisst, es kommen Termen mit negativen Koeffizienten in endlicher Anzahl vor in der Laurentreihe.

Wenn es in endliche Anzahl vorkommt, dann muss es auch ein $k \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $(z-z_0)^k f(z)$ an der Stelle z_0 hebbar ist.

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z) \text{ konvergiert}$$

Der minimale k mit diese Eigenschaft nennt man Ordnung der Singularität

Beispiel: $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$

$f(z)$ hat eine Polstelle 1. Ordnung an der Stelle $z=0$ (auch gültig für $z=\pi n, n \in \mathbb{Z}$)

$\lim_{z \to 0} |f(z)| = \infty \Rightarrow$ Singularität $z=0$ ist nicht hebbar.

$\lim_{z \to 0} z^1 \cdot f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin(z)} = 1 \Rightarrow$ konvergiert schon für $k=1 \Rightarrow$ Polstelle 1. Ordnung

– Man kann normalerweise für Polynome im Nenner die Ordnung direkt ablesen.

Beispiel: $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2 z}$

- $\lim_{z \to 2} |f(z)| = \infty \Rightarrow z=2$ nicht hebbar
- $\lim_{z \to 2} (z-2) \frac{1}{(z-2)^2 z} = \lim_{z \to 2} \frac{1}{(z-2) z}$ divergiert
  $\Rightarrow z=2$ nicht 1. Ordnung
- $\lim (z-2)^2 \frac{1}{(z-2)^2 z} = \lim_{z \to 2} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ konvergiert
  $\Rightarrow z=2$ hat 2. Ordnung

- $\lim_{z \to 0} |f(z)| = \infty \Rightarrow z=0$ nicht hebbar
- $\lim_{z \to 0} z \cdot \frac{1}{(z-2) z} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}$ konvergiert
  $\Rightarrow z=0$ hat 1. Ordnung

$z=2 \rightarrow$ Polstelle 2. Ordnung

$z=0 \rightarrow$ Polstelle 1. Ordnung

iii. Wesentliche Singularitäten

– Wesentliche Singularitäten sind nicht hebbare Singularitäten mit unendliche Ordnung. Das heisst, Laurentreihe hat unendlich viele Termen mit negativen Exponenten oder $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k f(z)$, $k \in \mathbb{N}$, divergiert $\forall k$.

<u>Beispiel:</u> $f(z) = e^{1/z}$

$$\lim_{z\to 0} z^k e^{1/z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{1/z}}{\frac{1}{z^k}} = \lim_{z'\to\infty} \frac{e^{z}}{z^k} = \infty \quad \forall k,$$ da die Exponentialfunktion immer schneller wächst als Polynome. $\Rightarrow$ wesentliche Singularität

oder:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \Rightarrow e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}$$ $\rightsquigarrow$ Das ist nicht die Laurentreihe, weil es nicht in der $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ ist

es darf nur $(z-z_0)^k$ enthalten und nicht $\frac{1}{(z-z_0)^k}$. Das können wir lösen indem wir die Grenzen vertauschen

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{k!} z^k$$ = Laurentreihe von $e^{1/z}$

↳ hat unendliche viele Termen mit negativen Exponenten

$\Rightarrow$ wesentliche Singularität